

Ion ACHIRI
Vasile NEAGU

Vasile CIOBANU
Nicolae PRODAN

Petru EFROS
Dumitru TARAGAN

Valentin GARIT
Anatol TOPALĂ

MATEMATICĂ

Ediția a II-a, revizuită și completată



Manualul a fost aprobat prin ordinul Ministrului Educației al Republicii Moldova nr. 267 din 11 aprilie 2014.

Lucrarea este elaborată conform curriculumului disciplinar și finanțată din Fondul Special pentru Manuale.

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației al Republicii Moldova.

Scoala/Liceul Manualul nr.				
Anul de folosire	Numele și prenumele elevului	Anul școlar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

- Dirigintele clasei va controla dacă numele elevului este scris corect.
- Elevii nu vor face nici un fel de însemnări în manual.
- Aspectul manualului (la primire și la returnare) se va aprecia: *nou, bun, satisfăcător, nesatisfăcător*.

Toate drepturile asupra acestei ediții aparțin Editurii *Prut Internațional*.

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau a ilustrațiilor din această carte este permisă doar cu acordul scris al editurii.

Autori: *Ion Achiri*, doctor, conferențiar universitar, IȘE (Capitolul 4)
Vasile Ciobanu, doctor, conferențiar universitar, USM (Capitolul 1)
Petru Efros, doctor, conferențiar universitar, USM (Capitolele 8–10)
Valentin Garit, doctor, conferențiar universitar, USM (Capitolele 8–10)
Vasile Neagu, doctor habilitat, profesor universitar, USM (Capitolele 3, 5)
Nicolae Prodan, doctor, conferențiar universitar, USM (Capitolele 6, 7)
Dumitru Taragan, doctor, conferențiar universitar, USM (Capitolul 2)
Anatol Topală, doctor, conferențiar universitar, USM (Capitolele 6, 7)

Comisia de evaluare: *Dorin Afanas*, doctor, conferențiar universitar, UST
Andrei Corlat, doctor, conferențiar universitar, AŞM
Aliona Pogreban, profesoară, grad didactic superior,
Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chișinău

Redactor: *Tatiana Rusu*

Corector: *Nina Artin*

Copertă: *Sergiu Stanciu*

Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

© Editura *Prut Internațional*, 2014

© I. Achiri, V. Ciobanu, P. Efros, V. Garit, V. Neagu, N. Prodan, D. Taragan, A. Topală, 2014

Editura *Prut Internațional*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1 A, Chișinău, MD 2051

Tel.: 75 18 74; tel./fax: 74 93 18; e-mail: editura@prut.ro; www.edituraprut.md

Imprimat la F.E.-P. *Tipografia Centrală*. Comanda nr. 3260

CZU 51(075.3)

M 47

ISBN 978-9975-54-145-9

Cuvînt-înainte

Prezentul manual este elaborat conform curriculumului liceal modernizat la matematică axat pe formarea de competențe.

Manualul este structurat pe module. Pentru orientare, la începutul fiecărui modul sînt formulate obiectivele educaționale care pot fi atinse studiind modulul respectiv. Obiectivele marcate cu * vizează numai elevii de la profilul real. Menționăm că manualul conține compartimente ce țin de elemente de analiză matematică, numere complexe, elemente de algebră superioară și geometrie.

La această treaptă a școlarizării, elevii se familiarizează cu o serie de concepte noi. Acest fapt este un motiv în plus să chemăm cititorii să parcurgă atent atît materialul teoretic (definiții, teoreme, proprietăți etc.), cît și exemplele ilustrative, exercițiile motivaționale și cele rezolvate. Numai în acest mod pot fi realizate prevederile principiilor constructiv și formativ puse la baza studierii matematicii în învățămîntul preuniversitar.

Menționăm că în manual sînt folosite și unele noțiuni, metode și procedee care nu sînt specificate de curriculum, însă reprezintă instrumente educaționale eficiente pentru atingerea obiectivelor. Printre ele menționăm: matricea eșalon, definiția determinanților axată pe dezvoltarea determinanților după o linie sau după o coloană. Astfel, prin intermediul manualului, autorii concretizează întru câtva curriculumul proiectat, pornind de la necesitățile actuale și de perspectivă privind predarea–învățarea–evaluarea matematicii în liceu.

Manualul este structurat astfel încît să poată fi utilizat la predarea matematicii atît elevilor de la profilul real, cît și celor de la profilul umanistic, arte și sport. De reținut că **materialul (textul) marcat în partea stîngă cu o bară verticală este prevăzut numai pentru profilul real. Pentru profilul umanistic aceste texte pot fi propuse ca extinderi.** În plus, în conformitate cu obiectivele preconizate, exercițiile și problemele propuse la sfîrșitul fiecărui paragraf, precum și la sfîrșitul fiecărui modul sînt clasificate după profil. Cele notate cu litera **A** sînt destinate ambelor profiluri, iar cele notate cu litera **B** – numai elevilor de la profilul real, fiind extinderi pentru cei de la profilul umanistic. Exercițiile marcate cu * au un grad sporit de complexitate și nu sînt obligatorii pentru rezolvare la profilul respectiv.

Problele de evaluare servesc la verificarea nivelului performanțelor atinse și sînt elaborate pe profiluri: **A** – profilul umanistic, arte și sport; **B** – profilul real.

Unele prevederi țin să faciliteze organizarea lucrului individual al elevilor. În afară de exemplele motivaționale, de consolidare și de utilizare a conceptelor, în manual sînt prezentate modele de rezolvare a principalelor tipuri de exerciții și probleme.

Simbolurile și notațiile folosite sunt cele întâlnite frecvent în literatura de specialitate și recomandate de curriculumul gimnazial la matematică. Sunt folosite literele alfabetului grec, pe care-l reproducem mai jos.

Manualul oferă elevilor pasionați de matematică posibilități pentru a-și extinde cunoștințele, atât prin însușirea unor noțiuni teoretice suplimentare (optionale), cât și prin rezolvarea unor probleme mai complicate.

Stimați profesori și dragi elevi, sperăm ca acest manual să devină un instrument didactic util în studierea matematicii. Totodată vom fi recunoscători pentru obiecțiile și sugestiile dumneavoastră ce vor contribui la îmbunătățirea conținutului manualului.

Autorii

Alfabetul grec

Litere	Citirea literelor	Litere	Citirea literelor
A α	alfa	N ν	niu
B β	beta	Ξ ξ	csi
Γ γ	gama	O o	omicron
Δ δ	delta	Π π	pi
E ε	epsilon	P ρ	ro
Z ζ	zeta	Σ σ	sigma
H η	eta	T τ	tau
Θ θ	teta	Y υ	ipsilon
I ι	iota	Φ φ	fi
K κ	kapa	X χ	hi
Λ λ	lambda	Ψ ψ	psi
M μ	miu	Ω ω	omega

Obiective

- ⇒ reprezentarea prin simboluri a şirurilor, *subşirurilor de numere reale;
- ⇒ clasificarea după diverse criterii a şirurilor numerice;
- ⇒ aplicarea progresiilor aritmetice și geometrice în diverse contexte;
- ⇒ *utilizarea în diverse contexte a noțiunii de vecinătate a unui punct în \mathbb{R} ;
- ⇒ *utilizarea în diverse contexte a noțiunii de limită a şirului, a simbolurilor și terminologiei respective;
- ⇒ *aplicarea proprietăților şirurilor convergente în contexte variate.

În modulele 1–5 vom studia elemente de analiză matematică – unul dintre compartimentele fundamentale ale matematicii. Aplicații ale analizei matematice întâlnim în fizică, tehnică, geometrie, economie și în multe alte domenii. Cadrul numeric al analizei matematice îl constituie mulțimea numerelor reale. Obiectele ei de studiu – dependențele funcționale, derivatele, integralele – sănt, în fond, limite definite în mod corespunzător. Pentru a studia limitele de funcții, este necesar să examinăm limitele de şiruri numerice.

§1 Şiruri numerice. Recapitulare și completări**1.1. Marginile inferioare și superioare ale mulțimilor de numere reale**

Vom studia unele proprietăți ale mulțimilor de numere reale necesare pentru fundamentarea studiului analizei matematice.

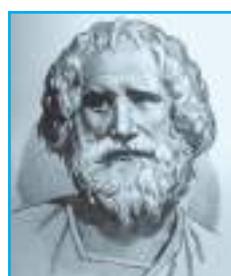
Axioma continuității mulțimii numerelor reale

Fie A și B două submulțimi nevide ale mulțimii \mathbb{R} , astfel încât pentru orice $a \in A$ și orice $b \in B$ are loc relația $a \leq b$. Atunci există cel puțin un $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \leq c \leq b$.

Principiul lui Arhimede¹

Pentru orice număr real x există un unic număr întreg m , astfel încât $m \leq x < m + 1$.

Numărul m se numește *partea întreagă* a numărului x și se notează $[x]$.



Arhimede din Siracusa

¹ Arhimede din Siracusa (cca 287–212 î.H.) – învățat grec.

- Definiții.** • Mulțimea $X \subset \mathbb{R}$ se numește **mărginită superior (mărginită inferior)** dacă există un număr $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $x \leq c$ ($x \geq c$), pentru orice $x \in X$. Numărul c se numește **majorant (minorant)** pentru mulțimea X .
- Mulțimea $X \subset \mathbb{R}$ se numește **mărginită** dacă ea este mărginită superior și inferior, adică există numerele reale m, M , astfel încât $m \leq x \leq M$, pentru orice $x \in X$.

Pentru fiecare dintre aceste propoziții poate fi formulată negația ei logică. De exemplu, negația primei propoziții este: mulțimea $X \subset \mathbb{R}$ nu este mărginită superior (mărginită inferior) dacă pentru orice $m \in \mathbb{R}$ există $x' \in X$, astfel încât $x' > m$ ($x' < m$). (Cu ajutorul cuantificatorilor universali \forall, \exists condiția „pentru orice [oricare ar fi] $m \in \mathbb{R}$ există $x' \in X$ ” se scrie concis astfel: $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x' \in X$.)

Observație. Orice mulțime $X \subset \mathbb{R}$, mărginită superior (mărginită inferior), are o infinitate de majoranți (minoranți). Dacă numărul c este un majorant (minorant) pentru mulțimea X , atunci oricare alt număr c_1 mai mare (mai mic) decât c de asemenea este un majorant (minorant) pentru mulțimea X . Într-adevăr, pentru orice $x \in X$, astfel încât $x \leq c$ și $c < c_1$, rezultă că $x \leq c_1$, deci c_1 este de asemenea un majorant.

Definiție. Elementul $a \in X$ (dacă există), $X \subset \mathbb{R}$, se numește **cel mai mare** (respectiv **cel mai mic**) element al mulțimii X dacă pentru orice $x \in X$ avem $x \leq a$ (respectiv $x \geq a$). În acest caz, se notează: $a = \max X$ ($a = \min X$).

Exemplu

Pentru mulțimea $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$, $\max A = 1$, iar $\min A$ nu există.

- Definiții.** • Cel mai mic majorant (dacă există) al mulțimii mărginite superior $X \subset \mathbb{R}$ se numește **margine superioară (supremum)** pentru X și se notează $\sup X$.
- Cel mai mare minorant (dacă există) al mulțimii mărginite inferior $X \subset \mathbb{R}$ se numește **margine inferioară (infimum)** pentru X și se notează $\inf X$.

Observație. Fie $\alpha = \inf X$ și $\beta = \sup X$, iar $Y = \{-x \mid x \in X\}$, atunci $\inf Y = -\beta$ și $\sup Y = -\alpha$.

Exemple

1. Mulțimea numerelor naturale \mathbb{N} nu este mărginită superior, dar este mărginită inferior. Prin urmare, mulțimea \mathbb{N} nu este mărginită. Mulțimile $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ nu sunt mărginite nici inferior, nici superior.

2. Mulțimea $X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ este mărginită, deoarece $\forall n \geq 1$ avem $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.

3. Mulțimea $A = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$ este mărginită, deoarece $-1 \leq \sin x \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Observație. În exemplul 2, $\inf X = 0 \notin X$, $\sup X = 1 \in X$, iar în exemplul 3, $\inf A = -1 \in A$, $\sup A = 1 \in A$. Așadar, supremul (infimumul) unei mulțimi $X \subset \mathbb{R}$ poate să aparțină sau poate să nu aparțină acestei mulțimi.

O mulțime nevidă mărginită superior are o infinitate de majoranți, iar supremumul ei este cel mai mic majorant. Cum o mulțime infinită de numere poate să nu aibă cel mai mic element (a se vedea exemplul 2), apare următoarea întrebare: o mulțime numerică nevidă mărginită superior (inferior) posedă oare supremum (infimum)?

Teorema 1. Orice mulțime numerică nevidă mărginită superior (inferior) posedă marginea superioară (inferioară) și această margine este unică.

Demonstrație

Fie $X \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă mărginită superior, iar Y mulțimea tuturor majoranților mulțimii X , adică $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X, x \leq y\}$.

Conform ipotezei, $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ și $x \leq y, \forall x \in X, \forall y \in Y$. În virtutea axiomei continuității mulțimii numerelor reale, există un număr c , astfel încât $\forall x \in X$ și $\forall y \in Y$

$$x \leq c \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq c, \\ c \leq y. \end{cases} \quad (1)$$

Din prima inegalitate a sistemului (1) rezultă că numărul c este un majorant pentru X , iar din a doua inegalitate – că numărul c este cel mai mic majorant pentru X , deci c este marginea superioară a mulțimii X . Astfel, $c = \sup X$.

Să demonstrăm că această margine este unică. Presupunem contrariul: că mulțimea X are două margini superioare diferite, c și c' . Fie, de exemplu, $c' < c$. Deoarece $c = \sup X$ și $c' < c$, conform definiției, rezultă că există un element $x_{c'} \in X$, astfel încât $x_{c'} > c'$. Aceasta contrazice presupunerea că $c' = \sup X$. Prin urmare, $c = c'$.

Existența marginii inferioare a unei mulțimi nevide mărginite inferior și unicitatea ei se demonstrează în mod analog. ►

Teorema 2 (de caracterizare a marginii superioare a unei mulțimi)

Fie $X \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă mărginită superior. Numărul M^* este marginea superioară a mulțimii X dacă și numai dacă:

- 1) $x \leq M^*$, pentru orice $x \in X$;
- 2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$, astfel încât $x_\varepsilon > M^* - \varepsilon$.

Teorema 3 (de caracterizare a marginii inferioare a unei mulțimi)

Fie $X \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă mărginită inferior. Numărul m^* este marginea inferioară a mulțimii X dacă și numai dacă:

- 1) $x \geq m^*$, pentru orice $x \in X$;
- 2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$, astfel încât $x_\varepsilon < m^* + \varepsilon$.

Demonstrația acestor teoreme rezultă imediat din definiția marginii superioare și respectiv a celei inferioare pentru o mulțime.

Dacă mulțimea X nu este mărginită superior (inferior), atunci vom conveni să scriem $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$). Pentru $X = \mathbb{R}$, convenim că $\inf \mathbb{R} = -\infty$ și $\sup \mathbb{R} = +\infty$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, considerăm că $-\infty < x < +\infty$.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine supremumul și infimumul mulțimii $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Rezolvare:

Evident că $0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deci, mulțimea A este mărginită.

Să demonstrăm că $\sup A = 1$. Vom aplica teorema de caracterizare a marginii superioare a unei mulțimi. Deoarece $1 - \frac{1}{n} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că prima condiție a teoremei 2 este verificată.

Observăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ inecuația $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ are soluții în \mathbb{N}^* . Fie n_ε una dintre aceste soluții. Obținem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul $1 - \frac{1}{n_\varepsilon} \in A$, astfel încât $1 - \frac{1}{n_\varepsilon} > 1 - \varepsilon$. Așadar, condiția a doua a teoremei 2 este verificată. Prin urmare, $\sup A = 1$.

Să demonstrăm că $\inf A = 0$. Avem $1 - \frac{1}{n} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum 0 aparține acestei mulțimi (pentru $n = 1$), rezultă că $\inf A = 0$. Constatăm că $\inf A = \min A \in A$, iar $\sup A \notin A$.

2. Fie mulțimea $A = \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 4} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Să se demonstreze că mulțimea A este mărginită.

b) Să se determine supremumul și infimumul mulțimii A .

Rezolvare:

a) Observăm că $0 \leq \frac{n^2}{n^2 + 4} < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deci, mulțimea A este mărginită.

b) Să demonstrăm că $\sup A = 1$. Vom aplica teorema 2. Prima condiție a teoremei este verificată. Vom arăta că pentru orice $0 < \varepsilon < 1$ inecuația $\frac{n^2}{n^2 + 4} > 1 - \varepsilon$ are soluții în \mathbb{N} .

Rezolvînd această inecuație, obținem $n > 2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$ și, conform principiului lui Arhimede,

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $n_\varepsilon > 2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, anume $n_\varepsilon = \left[2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \right] + 1$. Prin urmare, $\sup A = 1$.

Deoarece $\frac{n^2}{n^2 + 4} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, și $0 \in A$, rezultă că $\inf A = 0$.

Observație. Mulțimea tuturor fracțiilor subunitare pozitive nu posedă nici cel mai mic element, nici cel mai mare element, infimumul și supremumul acestei mulțimi fiind respectiv numerele 0 și 1.

1.2. Noțiunea de sir numeric. Siruri finite, infinite. Subsiruri

Definiție. Fie $E \subset \mathbb{R}$ o submulțime. Se numește **sir de numere reale** (**sir numeric, sir real**) orice funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow E$.

O astfel de funcție asociază fiecărui număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ un unic număr real $f(n) \in E$.

Dacă funcția f este definită pe o submulțime finită a elementelor consecutive ale mulțimii \mathbb{N}^* , atunci se obține un **sir numeric finit**. În caz contrar, sirul obținut se numește **sir numeric infinit**.

Numărul $f(n)$ se notează cu x_n și se numește **termenul de rang n** al sirului sau **termenul general** al sirului, iar însuși sirul se notează cu $(x_n)_{n \geq 1}$.

Observație 1. Uneori, funcția f este definită pe \mathbb{N} și atunci sirul începe cu termenul de rang zero, adică scriem $(x_n)_{n \geq 0}$, sau funcția este definită pe $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, k-1\}$, atunci scriem $(x_n)_{n \geq k}$.

2. În mod frecvent, pentru siruri utilizăm și notații ca $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, $(c_n)_{n \geq 1}$, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$, $(\beta_n)_{n \geq 1}$ etc.

Exemple

1. Sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n}$, reprezintă sirul inverselor numerelor naturale nenule.

2. Sirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = n$, este sirul numerelor naturale.

3. Sirul $(b_n)_{n \geq 2}$, $b_n = \sqrt{n-2}$, este sirul $0, 1, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n-2}, \dots$

Sirul se consideră definit dacă este indicat modul de obținere a termenilor săi.

Un sir poate fi definit:

1) *analitic*, adică prin **formula termenului general**

Această formulă permite calculul oricărui termen al sirului.

De exemplu, pentru sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin termenul general $x_n = 1 + (-1)^n$, avem $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, ...

2) *prin descrierea termenilor sirului*

De exemplu, sirul numerelor prime este $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$

3) *printr-o relație de recurență*. În acest caz se precizează unul sau cîțiva termeni și o relație de recurență din care se deduc ceilalți termeni ai sirului.

Exemple

1. Fie $x_1 = \sqrt{2}$ și relația de recurență $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, pentru orice $n \geq 1$.

Atunci obținem sirul $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ...

2. Fie $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ și $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ pentru orice $n \geq 2$. Aflăm termenii sirului: $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = x_1 + x_0 = 2$, $x_3 = x_2 + x_1 = 3$, $x_4 = x_3 + x_2 = 5$, $x_5 = x_4 + x_3 = 8$, ...

Așadar, obținem sirul $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$, care se numește **sirul lui Fibonacci**¹.

Se poate determina formula termenului general al sirului lui Fibonacci:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$



Leonardo da Pisa (Fibonacci)

¹ Leonardo da Pisa (Fibonacci) (1175–1250) – matematician italian.

Şirul lui Fibonacci are aplicații în diverse domenii ale matematicii: combinatorică, teoria numerelor, analiză matematică și.a. El posedă proprietăți interesante (de exemplu, toți termenii șirului de rang divizibil cu 3 sunt numere pare, termenii de rang divizibil cu 4 sunt divizibili cu 3, iar termenii de rang divizibil cu 15 sunt divizibili cu 10).

Definiție. Două șiruri, $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$, se numesc **egale** dacă $x_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Astfel, șirurile $\left(\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}\right)_{n \geq 1}$ și $1, 0, 1, 0, \dots$ sunt egale, iar șirurile $1, 0, 1, 0, \dots$ și $0, 1, 0, 1, \dots$ nu sunt egale, cu toate că au aceeași multime de valori ale termenilor: $\{0, 1\}$.

Definiție. Un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ se numește **constant** dacă $x_{n+1} = x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu

Şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit de $x_1 = 3$ și $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}, \forall n \geq 1$, este constant: $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 3, \dots$

1.3. Șiruri monotone. * Șiruri mărginite

Definiții. • Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ se numește **crescător** (respectiv **descrescător**) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (respectiv $x_n \geq x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
 • Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ se numește **strict crescător** (respectiv **strict descrescător**) dacă $x_n < x_{n+1}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
 • Șirurile crescătoare sau descrescătoare se numesc **șiruri monotone**.
 • Șirurile strict crescătoare sau strict descrescătoare se numesc **șiruri strict monotone**.

Observație. Există șiruri care nu sunt monotone.

De exemplu, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = (-1)^n$: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -1, \dots$

Pentru a determina dacă un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător sau descrescător, se poate proceda astfel:

1. Studiem semnul *diferenței* a doi termeni consecutivi:

- dacă $x_{n+1} - x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător;
- dacă $x_{n+1} - x_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.

2. Dacă termenii șirului sunt pozitivi, atunci comparăm cu unitatea *raportul* a doi termeni consecutivi:

- dacă $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, și $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător;
- dacă $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, și $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.

Înlocuind semnul „ \geq ” („ \leq ”) cu „ $>$ ” („ $<$ ”), se obțin criterii analoage pentru monotonia strictă.

Exercițiu rezolvat

Să se studieze monotonia sirului $(x_n)_{n \geq 1}$, dacă:

a) $x_n = \frac{n+1}{n+2};$ b) $x_n = \frac{1}{n(n+1)}.$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a) } x_{n+1} - x_n &= \frac{(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)(n+2) - (n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \\ &= \frac{n^2 + 4n + 4 - n^2 - 4n - 3}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Ceea ce înseamnă că $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică sirul este strict crescător.

b) Observăm că $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Atunci } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot n(n+1) = \frac{n}{n+2} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Prin urmare, sirul este strict descrescător.

Definiții. • Sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ se numește **mărginit superior (mărginit inferior)** dacă există un număr real a (respectiv b), astfel încât $x_n \leq a$ (respectiv $x_n \geq b$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ se numește **mărginit** dacă el este mărginit superior și inferior, adică există două numere $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \leq x_n \leq b$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este **nemărginit** dacă $\forall M > 0, \exists n_M \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|x_{n_M}| > M$.

Exerciții rezolvate

1. Să se stabilească dacă sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{2n+1}{2n+3}$, este mărginit.

Rezolvare:

$$x_n = \frac{2n+1}{2n+3} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ deci sirul este mărginit inferior.}$$

Să demonstrează că sirul este mărginit și superior.

$$\text{Într-adevăr, } x_n = \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2n+1+2-2}{2n+3} = \frac{(2n+3)-2}{2n+3} = 1 - \frac{2}{2n+3} < 1, \quad \forall n \geq 1.$$

Așadar, sirul, fiind mărginit inferior și superior, este mărginit:

$$0 < \frac{2n+1}{2n+3} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Să se studieze monotonia și mărginirea sirului $(x_n)_{n \geq 1}$, dacă $x_n = \frac{2^n}{n!}$.

Rezolvare:

Să cercetăm monotonia sirului.

$$\text{Avem } x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n \cdot 2}{n! \cdot n+1} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2}{n+1} \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Cum } \frac{2}{n+1} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ rezultă că } \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Deci, sirul este descrescător.

Evident că sirul este mărginit, deoarece $0 < \frac{2^n}{n!} \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Definiție. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un sir de numere reale și $(n_k)_{k \geq 1}$ un sir strict crescător de numere naturale. Sirul $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ se numește **subșir al sirului** $(x_n)_{n \geq 1}$.

Observație. Un sir $(a_n)_{n \geq 1}$ are o infinitate de subșiruri. Sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este un subșir al său. În acest caz, $n_k = k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

De exemplu, din sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = n$, putem extrage subșirurile $(x_{n_k})_{k \geq 1}$, $x_{n_k} = 2k + 1$ sau $x_{n_k} = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Exerciții propuse

A

1. Să se dea exemple de siruri finite, infinite.
2. Să se dea un exemplu de sir numeric cu termeni pozitivi, care strict descrescător „se apropie” de zero.
3. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{2n+1}{n+4}$.
 - a) Să se scrie primii cinci termeni ai sirului.
 - b) Să se studieze monotonia sirului.

B

4. Să se dea exemple de subșiruri ale unui sir.
5. Folosind cuantificatorii logici, să se scrie negația propoziției:
„Sirul numeric $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior”.
6. Să se scrie primii cinci termeni ai sirului $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n}$.
7. Să se dea un exemplu de sir numeric cu termeni negativi, care strict crescător „se apropie” de zero.
8. Să se dea exemple de siruri care nu sunt mărginite:
 - a) inferior;
 - b) superior.
9. Să se studieze monotonia și mărginirea sirului $(x_n)_{n \geq 1}$, dacă:

a) $x_n = \frac{3n+1}{4n+3}$;	b) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$;	c) $x_n = \frac{3n+1}{5n}$;	d) $x_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$;	e) $x_n = \frac{2n}{n^2+3}$.
--------------------------------	------------------------------	------------------------------	---------------------------------	-------------------------------
10. Pentru sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin formula termenului general $x_n = \left(\frac{11}{10}\right)^n$:
 - a) să se scrie primii cinci termeni;
 - b) să se studieze monotonia și mărginirea sirului.
11. Să se demonstreze că sirul numeric $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{3n-1}{3n+1}$, este strict crescător și mărginit.
12. Fie sirul recurrent $(x_n)_{n \geq 1}$ definit astfel: $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{3^n}$, $\forall n \geq 1$.
 - a) Să se determine formula termenului general al sirului.
 - b) Să se studieze monotonia sirului.
 - c) Să se stabilească dacă sirul este mărginit.

13. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 3$ și $x_{n+1} = 5x_n$, $\forall n \geq 1$.
- Să se determine formula termenului general al sirului.
 - Să se studieze monotonia sirului.
14. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit de $x_1 = -1$ și relația de recurență $x_{n+1} = x_n - 2$, $\forall n \geq 1$.
- Să se determine formula termenului de rang n al sirului.
 - Să se studieze monotonie și mărginirea sirului.
15. Să se scrie primii cinci termeni ai sirului $(x_n)_{n \geq 1}$ și să se definească acest sir prin formula termenului de rang n , dacă:
- $x_1 = -10$, $x_{n+1} = x_n + 5$ pentru $n \geq 1$; b) $x_1 = 4$, $x_{n+1} = 2x_n$ pentru $n \geq 1$.
Să se studieze monotonie și mărginirea acestor siruri.
16. Sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu $x_1 = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, este definit prin relația de recurență cu coeficienți constanți: $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$, $\forall n \geq 1$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Să se scrie formula termenului general al sirului, dacă:
- $\alpha = 1$; $\beta \neq 0$;
 - $\alpha \neq 0$; $\beta = 0$;
 - $\alpha \neq 0$; $\beta \neq 0$.
17. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit de condiția inițială $x_1 = 3$ și relația de recurență $x_{n+1} = x_n + 5$, $\forall n \geq 1$.
Să se determine formula termenului general al sirului.

§2 Progresii aritmetice. Progresii geometrice

Vom cerceta siruri numerice speciale care admit aplicații importante.

2.1. Progresii aritmetice

2.1.1. Noțiunea de progresie aritmetică

Fie sirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$, astfel încât $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = a_n + 3$ pentru orice $n \geq 1$. Deci, $a_1 = 2$, $a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$, $a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$, $a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$, ...

Observăm că fiecare termen al acestui sir, începînd cu al doilea, se obține prin adăugarea la termenul precedent a același număr, și anume 3.

Definiție. Se numește **progresie aritmetică** un sir de numere reale în care fiecare termen, începînd cu al doilea, se obține din termenul precedent prin adăugarea același număr.

Sirul de numere $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este o progresie aritmetică dacă pentru orice $k \geq 1$ avem $a_{k+1} = a_k + r$, unde r este un număr real. Numărul r se numește **rația progresiei aritmetice**, iar a_1 este **primul termen** al acesteia.

O progresie aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ este complet determinată, dacă se cunosc primul termen a_1 și rația r .

Dacă:

- $r > 0$, atunci progresia aritmetică este **strict crescătoare**;
- $r < 0$, atunci progresia aritmetică este **strict descrescătoare**;
- $r = 0$, atunci progresia aritmetică este **constantă**.

Exemplu

1. Pentru $a_1 = 1$, $r = 2$, obținem progresia aritmetică $1, 3, 5, 7, \dots$
2. Dacă $a_1 = 1$, $r = -3$, atunci avem progresia aritmetică $1, -2, -5, -8, \dots$
3. Pentru $a_1 = 7$, $r = 0$, obținem progresia aritmetică $7, 7, 7, \dots$

Definiție. Se spune că numerele a_1, a_2, \dots, a_n sunt **numere în progresie aritmetică** dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Progresia aritmetică posedă o proprietate importantă, care îi justifică denumirea.

Teorema 4. Orice termen al unei progresii aritmetice $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad \forall n \geq 2.$$

Exercițiu. Demonstrați teorema 4.

Este adevărată și

Reciproca teoremei 4. Dacă fiecare termen al unui sir de numere reale, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini, atunci acest sir este o progresie aritmetică.

Demonstrație

Să presupunem că pentru orice trei termeni consecutivi ai unui sir oarecare $(a_n)_{n \geq 1}$ are loc relația: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n \geq 2$.

Atunci $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, de unde obținem

$$a_n + a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \quad \text{sau} \quad a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Aceasta înseamnă că diferența dintre orice termen al sirului $(a_n)_{n \geq 1}$ și predecesorul său este un număr constant, deci sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică. ►

2.1.2. Formula termenului general al unei progresii aritmetice

Fie a_1 primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, iar r rația ei. Atunci, conform definiției progresiei aritmetice, avem:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r, \\ a_3 &= a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r, \\ a_4 &= a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r, \\ &\dots \end{aligned}$$

Teorema 5. Termenul general al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r. \quad (1)$$

Demonstrație

Vom demonstra formula (1) prin metoda inducției matematice.

Notăm prin $A(n)$ afirmația din egalitatea (1).

1. Pentru $n = 1$, afirmația $A(1)$ este adevărată.

2. Fie afirmația $A(k)$ adevărată pentru $k \geq 1$, adică, $a_k = a_1 + (k-1) \cdot r$.

Să demonstrăm că este adevărată și afirmația $A(k+1)$.

Într-adevăr, $a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k-1) \cdot r + r = a_1 + k \cdot r$.

3. Conform metodei inducției matematice, afirmația $A(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n . ►

Observație. Progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ de rație r poate fi definită prin relația de recurență $a_{n+1} = a_n + r$, $\forall n \geq 1$, sau prin relația de recurență $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $\forall n \geq 1$, și primul termen a_1 .

2.1.3. Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Teorema 6. Fie numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ în progresie aritmetică.

Atunci suma termenilor egal depărtați de termenii extremi este egală cu suma termenilor extremi: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$, pentru orice $k \geq 1$.

Demonstrație

Fie numerele a_1, a_2, \dots, a_n în progresie aritmetică. Dacă r este rația progresiei, atunci

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot r \quad \text{și} \quad a_{n-k+1} = a_1 + (n-k) \cdot r,$$

de unde $a_k + a_{n-k+1} = [a_1 + (k-1)r] + [a_1 + (n-k)r] = 2a_1 + (n-1)r$.

Dar $a_1 + a_n = a_1 + [a_1 + (n-1)r] = 2a_1 + (n-1)r$.

Astfel, obținem egalitatea $a_k + a_{n-k+1} = 2a_1 + (n-1)r = a_1 + a_n$. ►

Folosind teorema 6, se obține ușor formula generală pentru suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice.

Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ și o scriem de două ori astfel:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Adunând aceste două egalități membru cu membru, obținem:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Conform teoremei 6:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{n-2} + a_3 = a_{n-1} + a_1.$$

De aceea $2S_n = n(a_1 + a_n)$, de unde $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Rețineți: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ (2) – formula sumei primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$.

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$ (3) – formula de calcul al sumei primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, aplicabilă în cazul în care se cunosc primul termen a_1 și rația r .

Exercițiu. Demonstrați formula (3).

Exerciții rezolvate

1. Să se afle suma numerelor naturale de la 1 la 100.

Rezolvare:

Aceste 100 de numere sunt în progresie aritmetică. Primul termen al progresiei este 1, iar ultimul termen este 100.

$$\text{Deci, } S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050.$$

2. Să se afle primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_{10} = 131$, $r = 12$.

Rezolvare:

$$\text{Aplicind formula (1), obtinem: } 131 = a_1 + (10 - 1) \cdot 12 \Leftrightarrow 131 = a_1 + 108 \Leftrightarrow a_1 = 23.$$

3. Să se afle primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_5 = 27$, $a_{27} = 60$.

Rezolvare:

$$\text{Folosind formula (1), avem: } \begin{cases} a_1 + 4r = 27, \\ a_1 + 26r = 60. \end{cases}$$

$$\text{Rezolvăm sistemul și obținem } a_1 = 21, r = 1,5.$$

4. Să se calculeze suma primilor 100 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_1 = 10$, $a_{100} = 150$.

Rezolvare:

$$\text{Aplicind formula (2), obtinem: } S_{100} = \frac{10 + 150}{2} \cdot 100 = 80 \cdot 100 = 8000.$$

5. Să se demonstreze că dacă cotangentele unghiurilor triunghiului ABC sunt în progresie aritmetică, atunci pătratul lungimilor laturilor respective ale acestui triunghi de asemenea sunt în progresie aritmetică.

Rezolvare:

Fie R raza cercului circumscris triunghiului ABC . Din condiția problemei avem, de exemplu, $\operatorname{ctg}A - \operatorname{ctg}B = \operatorname{ctg}B - \operatorname{ctg}C \Leftrightarrow \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\cos B}{\sin B} - \frac{\cos C}{\sin C} \Leftrightarrow$

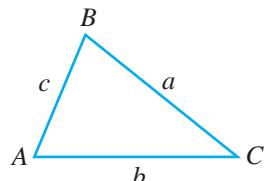
$$\Leftrightarrow \frac{\sin B \cos A - \sin A \cos B}{\sin A \sin B} = \frac{\sin C \cos B - \sin B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

$$\text{De aici obținem } \frac{\sin(B-A)}{\sin A} = \frac{\sin(C-B)}{\sin C}.$$

Deoarece $\sin C = \sin(B+A)$, $\sin A = \sin(B+C)$, obținem

$$\sin(B-A)\sin(B+A) = \sin(C-B)\sin(C+B) \Leftrightarrow \sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 C - \sin^2 B.$$

Dar $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$. Astfel, rezultă că $a^2 - b^2 = b^2 - c^2$. Prin urmare, pătratul lungimilor laturilor triunghiului, a^2, b^2, c^2 , sunt în progresie aritmetică.



2.2. Progresii geometrice

LEGENDA JOCULUI DE ȘAH

O legendă spune că jocul de șah a fost inventat în India de începutul Sessa, în secolul al IV-lea. Încîntat de joc, regele hindus a vrut să-l răsplătească pe inventator și a rămas uimit auzind că acesta cere să i se dea un bob de grâu pentru primul pătrat al tablei de șah, 2 boabe – pentru al doilea pătrat, 4 – pentru al treilea, 8 – pentru al patrulea ș.a.m.d. pînă la pătratul al 64-lea. Această doleanță i s-a părut regelui foarte modestă. Oare aşa să fie?



2.2.1. Noțiunea de progresie geometrică

Fie sirul de numere reale $(b_n)_{n \geq 1}$, astfel încât $b_1 = 3$ și $b_{n+1} = b_n \cdot 4$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci $b_1 = 3$, $b_2 = b_1 \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$, $b_3 = b_2 \cdot 4 = 12 \cdot 4 = 48$, $b_4 = b_3 \cdot 4 = 48 \cdot 4 = 192$, ...

Observăm că fiecare termen al acestui sir, începînd cu al doilea, se obține prin înmulțirea termenului precedent cu același număr, și anume 4.

Definiție. Se numește **progresie geometrică** un sir de numere reale al cărui prim termen este nenul, iar fiecare termen al său, începînd cu al doilea, se obține din termenul precedent prin înmulțirea cu același număr nenul.

Sirul de numere $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ ($b_1 \in \mathbb{R}^*$), este o progresie geometrică dacă pentru orice $k \geq 1$ avem $b_{k+1} = b_k \cdot q$, $q \in \mathbb{R}^*$.

Numărul q se numește **rația progresiei geometrice**, iar b_1 este **primul termen** al ei.

O progresie geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ este complet determinată dacă se cunosc primul termen b_1 și rația q .

Definiție. Se spune că numerele b_1, b_2, \dots, b_n sunt **numere în progresie geometrică** dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Exemple

- Pentru $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ obținem progresia geometrică $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$
- Pentru $b_1 = 2$, $q = -2$ obținem progresia geometrică $2, -4, 8, -16, 32, \dots$

Progresia geometrică cu termeni pozitivi posedă o proprietate importantă, care îi justifică denumirea.

Teorema 7. Orice termen al unei progresii geometrice cu termeni pozitivi $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \dots$, începînd cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, $\forall n \geq 2$.

Demonstrație

Conform definiției progresiei geometrice, pentru orice $n \geq 2$, $b_n = b_{n-1} \cdot q$ și $b_n = \frac{b_{n+1}}{q}$.

Atunci $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, de unde $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Deoarece $b_n > 0$, obținem $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

Observație. Relația $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ (sau $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$) este adevărată pentru oricare progresie geometrică.

Este adevărată și

Reciproca teoremei 7. Dacă fiecare termen al unui șir de numere reale pozitive, începînd cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini, atunci acest șir este o progresie geometrică.

Exercițiu. Demonstrați reciproca teoremei 7.

2.2.2. Formula termenului general al unei progresii geometrice

Fie b_1 primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ și q rația ei. Atunci, din definiția progresiei geometrice, avem:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 \cdot q, \\ b_3 &= b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2, \\ b_4 &= b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Teorema 8. Termenul general al unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ este dat de formula:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \quad (4)$$

Demonstratie

Vom aplica metoda inducției matematice.

Notăm cu $P(n)$ afirmația din egalitatea (4).

1. Pentru $n = 1$, afirmația $P(1)$ este evidentă.

2. Fie afirmația $P(k)$ adevărată pentru $k \geq 1$, adică $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$.

Să demonstrăm că este adevărată afirmația $P(k+1)$.

Într-adevăr, $b_{k+1} = b_k \cdot q = (b_1 \cdot q^{k-1}) \cdot q = b_1 \cdot q^k$.

3. Conform metodei inducției matematice, afirmația $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n . ►

Observație. Progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ de rație q poate fi definită prin relația de recurență $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $\forall n \geq 1$, și primul termen b_1 .

2.2.3. Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice

Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică cu primul termen b_1 și rația q .

Observație. Ca și pentru numere în progresie aritmetică, pentru numerele b_1, b_2, \dots, b_n , care sunt în progresie geometrică, are loc relația:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n,$$

adică produsul termenilor egal depărtați de extremi este egal cu produsul termenilor extremi.

Fie suma primilor n termeni ai acestei progresii:

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n. \quad (5)$$

Pentru a calcula S_n , examinăm două cazuri:

- 1) rația $q = 1$; atunci $S_n = b_1 \cdot n$.
- 2) rația $q \neq 1$. Atunci înmulțim ambii membri ai egalității (5) cu q și obținem:

$$qS_n = b_1 q + b_2 q + \dots + b_{n-1} q + b_n q.$$

Dar $b_1 q = b_2$, $b_2 q = b_3$, ..., $b_{n-1} q = b_n$, de aceea

$$qS_n = b_2 + b_3 + \dots + b_n + b_n q. \quad (6)$$

Scăzînd membru cu membru (5) din (6), obținem:

$$qS_n - S_n = b_n q - b_1 \Leftrightarrow S_n \cdot (q - 1) = b_n q - b_1.$$

Deoarece $q \neq 1$, $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}$.

Rețineți: $S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}$, $q \neq 1$ – formula sumei primilor n termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$.

$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$, $q \neq 1$ (7) – formula de calcul al sumei primilor n termeni ai progresiei geometrice, aplicabilă în cazul în care se cunosc primul termen b_1 și rația q .

Exercițiu. Demonstrați formula (7).

Să revenim la legenda jocului de săh.

Pentru a răspunde la întrebare, trebuie să aflăm numărul de boabe de grâu, adică să calculăm suma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$.

Avem: $b_1 = 1$, $q = 2$, $b_{64} = 2^{63}$.

$$\text{Obținem } S_{64} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615.$$

Am obținut un număr natural de 20 de cifre. Considerînd că 30 000 000 de boabe de grâu cîntăresc aproximativ o tonă, ne convingem că doleanța lui Sessa nu a putut fi îndeplinită. (Comparați: producția mondială de grâu în anul agricol 2012–2013 a constituit circa 700 000 000 t, iar înțeleptul a cerut aproximativ 614 miliarde de tone.)

Progresia geometrică: • cu $b_1 > 0$, $q > 1$ sau cu $b_1 < 0$, $0 < q < 1$ este **strict crescătoare**;

- cu $b_1 < 0$, $q > 1$ sau cu $b_1 > 0$, $0 < q < 1$ este **strict descrescătoare**;
- cu $q < 0$ nu este monotonă;
- cu $q = 1$ este **constantă**.

Exercițiu. Dați câte un exemplu pentru fiecare caz.

Progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ se numește **infinit descrescătoare** dacă rația q verifică relația $|q| < 1$. Pentru progresia geometrică infinit descrescătoare $(b_n)_{n \geq 1}$, obținem:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

Cînd n crește, q^n tinde la zero („se apropiie” de zero), deoarece $|q| < 1$, iar suma S_n tinde la valoarea expresiei $\frac{b_1}{1-q}$. (A se vedea și § 3, secvența 3.3.)

Exerciții rezolvate

1. Să se afle primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă $\begin{cases} b_2 - b_1 = -4, \\ b_3 - b_1 = 8. \end{cases}$

Rezolvare:

Folosind formula (4), scriem sistemul: $\begin{cases} b_1 q - b_1 = -4, \\ b_1 q^2 - b_1 = 8. \end{cases}$

Rezolvînd acest sistem, obținem $b_1 = 1$, $q = -3$.

2. Un turist, urcînd pe munte, în prima oră a parcurs o distanță de 800 m. În fiecare oră următoare el a parcurs o distanță cu 25 m mai mică decît în ora precedentă. În cîte ore turistul a parcurs distanța de 5 700 m?

Rezolvare:

Numerele 800, 775, 750, ... sunt în progresie aritmetică. Astfel, $a_1 = 800$, $r = -25$. Din condiția problemei rezultă sistemul: $\begin{cases} a_n = x = 800 - 25(n-1), \\ S_n = \frac{800 + x}{2} \cdot n = 5700. \end{cases}$

Rezolvăm acest sistem și obținem $x = 1625$ m, $n = 8$ ore.

Răspuns: 8 ore.

3. Să se determine numerele pozitive x, y, z care satisfac simultan condițiile:

- 1) x, y, z sunt în progresie geometrică;
- 2) $x, y+4, z$ sunt în progresie aritmetică;
- 3) $x, y+4, z+32$ sunt în progresie geometrică.

Rezolvare:

Obținem sistemul: $\begin{cases} xz = y^2 \\ x+z = 2(y+4) \\ x(z+32) = (y+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = y^2 \\ y = 4x-2 \\ z = 2y-x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 20x + 4 = 0, \\ y = 4x-2, \\ z = 7x+4. \end{cases}$

Rezolvînd ultimul sistem, obținem soluția $x = 2$, $y = 6$, $z = 18$.

Exerciții propuse

A

1. Să se scrie formula termenului general al sirului:
a) $3, -3, 3, -3, \dots$; b) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$; c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$; d) $1, 9, 25, 49, 81, \dots$
2. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă:
a) $a_1 = 7$, $r = 2$; b) $a_1 = -3$, $r = 5$; c) $a_1 = 1,3$, $r = 0,3$; d) $a_1 = \frac{2}{7}$, $a_2 = \frac{1}{5}$.
3. Să se afle termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă:
a) $a_{10} = 131$, $r = 12$; b) $a_{200} = 0$, $r = -3$.
4. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:
a) $b_1 = -10$, $q = \frac{1}{2}$; b) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \sqrt{3}$.

5. Pentru a construi o seră, se folosesc piloni instalați vertical. Cel mai scurt pilon are înălțimea de 5 dm, iar fiecare dintre pilonii următori este cu 3 dm mai înalt decât precedentul. Aflați înălțimea celui mai înalt pilon, al șaptelea.
6. Într-un amfiteatru săt 10 rânduri. În primul rînd săt 100 de locuri, iar în fiecare dintre rîndurile următoare – cu 20 de locuri mai mult decât în cel precedent. Cîte locuri săt în total în amfiteatru?
7. O bancă dă o dobîndă anuală de 9%. Ce sumă va primi peste 5 ani o persoană care a depus la bancă 2700 lei, dacă dobînda calculată în fiecare an se adaugă la suma existentă?
8. Vara, la munte, odată cu creșterea altitudinii cu cîte 100 m, temperatura aerului scade cu $0,7^{\circ}\text{C}$. La poalele muntelui săt 26°C . La ce altitudine se află un turist, dacă termometrul indică $14,8^{\circ}\text{C}$?
9. Fîntînarilor angajați la săparea unei fîntîni li s-a promis 150 lei pentru primul metru săpat, iar pentru fiecare metru săpat în continuare – cu 60 lei mai mult decât pentru cel precedent. Să se afle ce sumă de bani vor câștiga fîntînarii, dacă adîncimea fîntîni va fi de 12 metri.
10. În condiții favorabile, în fiecare oră, orice bacterie se divizează în altele două. Cîte bacterii se vor reproduce dintr-o bacterie timp de 10 ore?

B

11. Să se afle suma primilor cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă $\frac{b_1 + b_2}{b_2 + b_3} = \frac{1}{3}$ și $b_1 + b_2 + b_3 = 52$.
12. Să se determine formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ și S_n , dacă:
- a) $a_1 = -4$, $r = \frac{1}{3}$, $n = 14$; b) $a_1 = \frac{3}{5}$, $r = \frac{1}{7}$, $n = 25$.
13. Să se demonstreze că dacă numerele a , b , c săt în progresie aritmetică, atunci și numerele $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ săt în progresie aritmetică.
14. Să se scrie formula termenului de rang n al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:
- a) $b_1 = 9$, $b_{n+1} = 2b_n$; b) $b_1 = 10$, $b_{n+1} = \frac{1}{5}b_n$.
15. Să se afle primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:
- a) $b_4 = -12$, $b_7 = 23\frac{7}{16}$; b) $b_1 + b_4 = \frac{7}{16}$, $b_3 - b_2 + b_1 = \frac{7}{8}$.
16. Fie o progresie geometrică cu $S_3 = 40$, $S_6 = 60$. Să se afle S_9 .
17. Să se determine numerele x , y , $z \in \mathbb{R}$ care satisfac simultan condițiile:
- a) x , y , z săt în progresie geometrică;
- b) x , $y + a$, z săt în progresie aritmetică;
- c) x , $y + a$, $z + b$ săt în progresie geometrică.
18. Să se afle valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $2x - 1$, $2x + 1$, $x + 26$ săt în progresie geometrică.
19. Să se determine primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:
- a) $S_4 = 12$, $q = 3$; b) $S_6 = 1$, $q = -2$.
20. Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația: $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$.
21. Lungimile laturilor triunghiului ABC , considerate în ordine consecutivă, săt în progresie geometrică crescătoare. Rația acestei progresii este mai mică sau mai mare decât 2?
22. Să se reprezinte numărul 180 ca suma a patru numere reale pozitive, care săt în progresie geometrică cu rația $q \neq 1$, dacă se știe că termenul al treilea este cu 36 mai mare decât primul termen. Să se găsească două posibilități.

§3 Limita unui sir. Siruri convergente, siruri divergente

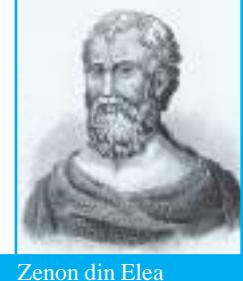
În Antichitate, matematicienii greci Arhimede, Zenon din Elea¹ și alții au utilizat sirurile numerice pentru a obține aproximări cît mai bune ale unor mărimi. Mult mai tîrziu, s-au introdus conceptele de sir convergent și limită.

3.1. Noțiunea de limită a unui sir

Se numește *vecinătate a unui punct* $a \in \mathbb{R}$ orice interval deschis de forma $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Vecinătatea punctului a se notează cu $U(a, \varepsilon)$ sau $V(a, \varepsilon)$.

Prin urmare, $U(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$.

Vom spune că un punct x_0 este *punct interior* al mulțimii X , $X \subseteq \mathbb{R}$, dacă există o vecinătate $U(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, a acestui punct, astfel încât $U(x_0, \varepsilon) \subset X$.



Zenon din Elea

Definiție (în limbajul vecinătăților). Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un sir de numere reale și a un număr real. Sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are **limită** a dacă în orice vecinătate a punctului a se conțin toți termenii sirului cu excepția, poate, a unui număr finit de termeni.

Faptul că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are limită a se scrie: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (se citește: „limita sirului x_n când n tinde la infinit este egală cu a ”) sau $x_n \rightarrow a$ când $n \rightarrow \infty$ (se citește: „ x_n tinde la a când n tinde la ∞ ”).

Observație. Se scrie $n \rightarrow \infty$, și nu $n \rightarrow +\infty$, deoarece n este număr natural și nu este pericol de confuzie.

Definiție (în limbajul ε). Numărul $a \in \mathbb{R}$ este **limită** sirului $(x_n)_{n \geq 1}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|x_n - a| < \varepsilon$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$.

Observații. 1. Dacă negăm în definiția cu „ ε ”, obținem: Numărul $a \in \mathbb{R}$ nu este limită sirului $(x_n)_{n \geq 1}$ dacă $\exists \varepsilon_0 > 0$, astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists n_0 > n$ cu proprietatea $|x_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$.

2. În definiția în limbajul ε se poate înlocui ε cu $\alpha\varepsilon$, unde numărul real $\alpha > 0$ este fixat. Atunci putem formula definiția în limbajul ε astfel: numărul $a \in \mathbb{R}$ este limită sirului $(x_n)_{n \geq 1}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|x_n - a| < \alpha\varepsilon$, $\forall n > n_\varepsilon$, unde $\alpha > 0$.

Exerciții rezolvate

1. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n}$. Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Demonstrație

Fie U o vecinătate arbitrară a punctului 0 , $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $n > \frac{1}{\varepsilon}$, adică $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Deci, $x_n = \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) = U$ dacă $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Așadar, termenii sirului $(x_n)_{n \geq 1}$,

¹ Zenon din Elea (cca 490–cca 430 î.H.) – filozof și matematician grec.

începînd cu rangul $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, se află în vecinătatea U a punctului 0.

Prin urmare, numărul 0 este limita sirului $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n}$.

Rețineți: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

4. Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$.

Demonstrație

Vom demonstra că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, se verifică inegalitatea $\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$. Evaluăm $\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$.

Pentru orice $\varepsilon > 0$ cerem ca $\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Dacă $\varepsilon > \frac{1}{2}$, atunci inegalitatea $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ este verificată de orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, atunci ea este verificată de orice $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, de aceea în acest caz considerăm $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1$, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$.

Așadar, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$, oricare ar fi n , $n > n_\varepsilon$. Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$.

5. Să se demonstreze că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = (-1)^n$ nu are limită.

Demonstrație

Presupunem contrariul, că există un număr $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = a$. Conform definiției limitei, pentru orice $\varepsilon > 0$, în particular pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $|x_n - a| < \frac{1}{2}$, $\forall n > n_\varepsilon$. Deoarece $x_n \in \{-1, 1\}$, rezultă că au loc simultan inegalitățile $|1 - a| < \frac{1}{2}$ și $|-1 - a| < \frac{1}{2}$. Obținem că $2 = |(1 - a) + (a + 1)| \leq |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, adică $2 < 1$. Absurd. Deci, sirul dat nu posedă limită.

6. Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstrație

Vom demonstra că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, are loc inegalitatea $\left| \frac{1}{n^\alpha} \right| < \varepsilon$, $\alpha > 0$.

Într-adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$, luînd în considerație că $\left| \frac{1}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$ și rezolvînd inecuația $\left| \frac{1}{n^\alpha} \right| < \varepsilon$ cu necunoscuta n , obținem $n > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}$. Observăm că $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}} \right\rceil$ este un număr

natural. Așadar, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \right\rceil \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| < \varepsilon$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$. Prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$.

Rețineți: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$.

Exercițiu. Folosind definiția în limbajul vecinătăților, demonstrați că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = (-1)^n$, nu are limită.

- Definiții.**
- Se spune că sirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ are **limită plus infinit** și se scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_n > \varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$.
 - Se spune că sirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ are **limită minus infinit** și se scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_n < -\varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$.
 - Se spune că sirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ are **limită infinită** și se scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $|x_n| > \varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$.

Observație. Evident, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Exemple

1. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = n^2$. Evident, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
2. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = -2^n$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.
3. Pentru sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = (-1)^n \cdot n$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Exercițiu rezolvat

Considerăm sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = q^n$, $q < -1$. Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

Rezolvare:

Conform definiției, vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $|q^n| > \varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$. Relația $|q^n| > \varepsilon$ este echivalentă cu $|q|^n > \varepsilon$. Logaritmând inegalitatea în baza $|q|$, $|q| > 1$, obținem:

$$\log_{|q|} |q|^n > \log_{|q|} \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{|q|} \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon = [\log_{|q|} \varepsilon] + 1$, astfel încât $|q^n| > \varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$. Conform definiției, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

La demonstrația teoremelor și la rezolvarea exemplelor cu limite infinite uneori vom utiliza următoarele mulțimi:

$$U(+\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \varepsilon, \varepsilon > 0\};$$

$$U(-\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\varepsilon, \varepsilon > 0\};$$

$$U(\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \varepsilon, \varepsilon > 0\},$$

care se mai numesc **vecinătăți**, respectiv, ale lui $+\infty$, $-\infty$ și ∞ .

În definițiile vecinătăților simbolurilor $+\infty$ și $-\infty$, condiția $\varepsilon > 0$ uneori poate fi omisă. Această condiție este introdusă doar pentru a uniformiza formulările noțiunilor. Deci, vecinătatea oricărui număr finit, a lui $+\infty$, $-\infty$ și ∞ se determină cu ajutorul unui număr pozitiv. Această convenție este comodă uneori la formularea rezultatelor în care nu este esențial dacă limita este finită sau infinită. Aplicând această terminologie, definiția limitei finite sau a oricarei limite infinite poate fi formulată astfel:

Definiții. • Se spune că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are limită a (unde a este număr finit, $+\infty$, $-\infty$ sau ∞) dacă pentru orice vecinătate $U(a, \varepsilon)$ a lui a există numărul natural n_u , astfel încât $x_n \in U$ oricare ar fi $n > n_u$.

• Sirul care are limită finită se numește **sir convergent**. Sirul care nu este convergent (adică sirul care nu are limită sau are limită infinită) se numește **sir divergent**.

Teorema 9. Dacă un sir de numere reale are limită, atunci această limită este unică.

Teorema 10 (Weierstrass¹). Orice sir numeric monoton și mărginit este convergent.

Demonstrație

Să considerăm cazul sirului $(x_n)_{n \geq 1}$ crescător și mărginit superior. Atunci $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Conform ipotezei, mulțimea $\{x_n \mid n \geq 1\}$ este nevidă și mărginită. Fie $x_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (x_n)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.



Karl Weierstrass

Conform teoremei de caracterizare a marginii superioare, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un rang n_ε , astfel încât $x_{n_\varepsilon} > x_0 - \varepsilon$. Sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător, deci $x_n > x_{n_\varepsilon} > x_0 - \varepsilon$ pentru orice $n > n_\varepsilon$. Pe de altă parte, din condiția că x_0 este marginea superioară, $x_n \leq x_0 < x_0 + \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Așadar, pentru orice $n > n_\varepsilon$ avem $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$ sau $|x_n - x_0| < \varepsilon$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, și, cum $x_0 \in \mathbb{R}$, sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. Analog se demonstrează cazul sirului descrescător și mărginit inferior. ►

Exercițiu rezolvat

↳ Să se arate că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit de $x_1 = \sqrt{2}$ și relația de recurență $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $\forall n \geq 1$, este convergent.

Rezolvare:

Să demonstrăm că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător. Considerăm diferența $x_{n+1}^2 - x_n^2$. Obținem: $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + x_n - x_n^2 = (1 + x_n)(2 - x_n) > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Din ultima relație avem $x_{n+1}^2 > x_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, obținem $x_{n+1} > x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel, sirul este crescător.

Folosind metoda inducției matematice, să demonstrăm că sirul este mărginit superior.

Avem $x_1 = \sqrt{2} < 2$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

Presupunem că $x_n < 2$. Atunci $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

¹ Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) – matematician german.

Prin urmare, conform metodei inducției matematice, $x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Conform teoremei lui Weierstrass, sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, fiind monoton crescător și mărginit superior, este convergent.

Observație 1. În demonstrația teoremei 10 am obținut că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (x_n)$, dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător. Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător, atunci analog se obține $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} (x_n)$.

2. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci se mai spune că **sirul** $(x_n)_{n \geq 1}$ **converge** la numărul a .

Teorema 11. Un sir $(x_n)_{n \geq 1}$ converge la x_0 dacă și numai dacă orice subșir $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ converge la x_0 . Adică $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$, pentru orice $(x_{n_k})_{k \geq 1}$.

Observație. Din teorema 11 rezultă că pentru ca un sir numeric să nu aibă limită, este suficient ca el să conțină două subșiruri cu limite diferite.

3.2. Proprietăți ale sirurilor convergente

Fie sirurile de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$. Sirurile $(\lambda \cdot x_n)_{n \geq 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; $(x_n + y_n)_{n \geq 1}$; $(x_n \cdot y_n)_{n \geq 1}$; $\left(\frac{x_n}{y_n} \right)_{n \geq 1}$, $y_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $(x_n^{y_n})_{n \geq 1}$, $\forall x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, se numesc respectiv **produsul unui sir cu o constantă**, **sir-sumă**, **sir-produs**, **sir-cît**, **sirul puterilor**.

Apare în mod firesc întrebarea: ce se poate spune despre limita sirurilor definite mai sus, în cazul în care sirurile inițiale au limită, și, dacă au limită, cum se calculează limita lor.

Teorema 12

1. Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este un sir convergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ și $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci sirul $(\lambda \cdot x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot a = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, adică **factorul constant poate fi extras de sub semnul limitei**.

2. Dacă sirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, atunci sirul $(x_n + y_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, adică **limita sumei a două siruri convergente este egală cu suma limitelor acestor siruri**.

3. Dacă sirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, atunci sirul $(x_n \cdot y_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, adică **limita produsului a două siruri convergente este egală cu produsul limitelor acestor siruri**.

4. Dacă sirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ ($y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$) și $b \neq 0$, atunci sirul-cît $\left(\frac{x_n}{y_n} \right)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$, adică **limita cîtului a două siruri convergente este egală cu cîtul limitelor acestor siruri**.

3.3. Suma unei progresii geometrice infinit descrescătoare

Teorema 13. Fie sirul $(S_n)_{n \geq 1}$, $S_n = b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^{n-1}$, unde $0 < |q| < 1$ și $b_1 \neq 0$.

$$\text{Atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}.$$

Demonstratie

Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice infinit descrescătoare $b_1, b_1 q, b_1 q^2, \dots$ poate fi scrisă sub forma $S_n = \sum_{i=1}^n b_1 q^{i-1}$, $|q| < 1$.

Știind că $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $|q| < 1$, obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^n) = \frac{b_1}{1-q}, \text{ deoarece } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0. \quad \blacktriangleright$$

3.4. Numărul e

Teorema 14. Sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, este convergent.

Demonstratie

Vom aplica teorema 10 (Weierstrass) din secvența 3.1 și *inegalitatea mediilor*:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+.$$

Vom arăta că sirul $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$, este monoton și mărginit.

Studiem monotonia sirului $(x_n)_{n \geq 1}$.

Considerăm numerele $\underbrace{1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{1}{n}}_{n \text{ ori}}, 1$.

Conform inegalității mediilor, pentru aceste $n+1$ numere pozitive avem:

$$\begin{aligned} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{n+1} &> \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Prin urmare, $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, de unde rezultă că sirul dat este strict crescător.

Să demonstrăm că sirul este mărginit superior. Considerăm următoarele $n+2$ numere pozitive $\underbrace{1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{1}{n}}_{n \text{ ori}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Din inegalitatea mediilor, aplicată acestor $n+2$ numere, rezultă

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2} > \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+2} > \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4}} \Leftrightarrow 1 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4, \quad \forall n \geq 1.$$

Deci, şirul este mărginit superior.

Conform teoremei lui Weierstrass, şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, fiind monoton crescător și mărginit superior, este convergent. ►

Limita şirului $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, se notează cu e , după inițiala numelui lui L. Euler¹, și reprezintă un număr irațional care



Daniel Bernoulli

apartine intervalului $(2, 3)$. Iraționalitatea numărului e a fost demonstrată în 1815 de J. Fourier². În 1728, D. Bernoulli³ a stabilit că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818284590\dots$$

Rețineți: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (8)$



Leonard Euler



Jean-Baptiste Joseph Fourier

Observație. Numărul e este o constantă fundamentală în analiza matematică. Logaritmul în baza e are aplicații în matematică, fizică și în multe alte domenii, se numește **logaritm natural** și se notează $\ln x (= \log_e x)$.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+8}{3n+7}\right)^{6n+1}$.

Rezolvare:

Aplicând teorema 11 și relația (8), obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+8}{3n+7}\right)^{6n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n+7}\right)^{6n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n+7}\right)^{\frac{3n+7-1}{3n+7} \cdot (6n+1)} =$$

¹ Leonard Euler (1707–1783) – matematician, fizician și astronom elvețian.

² Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) – matematician francez.

³ Daniel Bernoulli (1700–1782) – matematician și fizician elvețian.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{3n+7} \right)^{\frac{3n+7}{1}} \right\}^{\frac{1(6n+1)}{3n+7}} = e^2.$$

2. Să se calculeze limita sirului $(x_n)_{n \geq 1}$, dacă:

a) $x_n = \sqrt{n^2 + 2n - 3} - n$; b) $x_n = \frac{n+2}{3n+1}$;

c) $x_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$;

d) $x_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}}$.

Rezolvare:

a) Amplificăm cu conjugatul expresiei:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n - 3} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2n - 3) - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n - 3} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3}{\sqrt{n^2 + 2n - 3} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 - \frac{3}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}} + 1 \right)} = 1. \end{aligned}$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)}{n \left(3 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}.$

c) Amplificăm cu conjugatul expresiei de la numărător:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0.$$

d) Folosim formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}}{\frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}} = \frac{4}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Exerciții propuse

B

- Să se aducă exemple de siruri numerice convergente, divergente.
- Folosind noțiunea de subșir, să se demonstreze că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = (-1)^n$, este divergent.
- Aplicând definiția limitei sirului numeric, să se arate că:
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n} = 4$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2} = 2$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{4n+5} = \frac{1}{2}$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{n+1} = 5$.
- Folosind definiția limitei sirului, să se arate că: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} \neq \frac{1}{2}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{5n+1} \neq 1$.
- Aplicând teorema lui Weierstrass, să se demonstreze convergența sirului $(x_n)_{n \geq 1}$, dacă:
 - $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$;
 - $x_n = 1 + \frac{1}{3^n}$;
 - $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
- Să se calculeze:
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2+n}$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3^n}$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+1}$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{C_n^2}{2^n}\right)$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5 \cdot 2^n}{4^n + 5^{n+1}}$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n)$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n}}$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{n}$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1} + \frac{\sqrt{n}+2}{n+3}\right)$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$.

Exerciții și probleme recapitulative

A

- Să se scrie primii cinci termeni ai sirului $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general:
 - $x_n = \frac{3n-2}{2+n}$;
 - $x_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot n\right)$;
 - $x_n = (-1)^n \cdot 7 + \frac{1}{n}$.
- Să se determine formula termenului de rang n pentru sirul:
 - $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots$;
 - $2, 4, 6, 8, 10, \dots$;
 - $3, -3, 3, -3, \dots$;
 - $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$
- Să se dea exemple de siruri numerice: a) finite; b) infinite; c) monotone.
- Să se decidă dacă sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, este monoton.
- Să se scrie formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă:
 - $a_1 = -2$ și $r = -4$;
 - $a_1 = 1$ și $r = 2$;
 - $a_1 = -10$ și $r = 5$;
 - $a_1 = 3$ și $r = 7$.
- Să se afle suma primilor 100 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă:
 - $a_1 = 2$, $r = -5$;
 - $a_1 = -1$, $r = 1$.
- Să se afle $x \in \mathbb{R}$, astfel încât numerele să fie în progresie aritmetică:
 - $1 + x^2$, $(a+x)^2$, $(a^2+x)^2$;
 - a^2+x , $ab+x$, b^2+x .

8. Să se scrie formula termenului general al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:
- $b_1 = 2, q = 6$;
 - $b_1 = -10, q = \frac{1}{2}$;
 - $b_1 = 3, q = 2$.
9. Să se decidă dacă este progresie aritmetică sau progresie geometrică sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, dacă:
- $x_1 = 2, x_{n+1} = 3x_n$;
 - $x_1 = 4, x_{n+1} = 2 + x_n$;
 - $x_1 = -4, x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n$;
 - $x_1 = -1, x_{n+1} = 5 + x_n$.
- În caz afirmativ, să se indice formula termenului general al progresiei și rația.
10. Fie numerele a_1, a_2, \dots, a_n în progresie aritmetică.
- Să se determine n și S_n , dacă $a_n = 5, a_1 = 23, r = -2$;
 - Să se determine a_1 și n , dacă $a_n = 18, r = 2, S_n = 88$.
11. Fie numerele b_1, b_2, \dots, b_n în progresie geometrică. Să se determine q și S_n , dacă:
- $b_n = 1280, b_1 = 5, n = 9$;
 - $b_n = 384, q = 2, n = 8$.
12. Un ciclist a parcurs în prima oră o distanță de 8 km. În fiecare oră următoare, el a parcurs o distanță cu 2 km mai mare decât în ora precedentă. În câte ore ciclistul a parcurs distanța de 60 km?
13. În cădere liberă într-o mină, o piatră parcurge în prima secundă 4,9 m și viteza ei crește cu 9,8 m/s. Să se afle adâncimea minei, dacă piatra a ajuns la fund peste 8 s.
14. Să se determine valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $2x - 2, x^2 + 1, 3x^2 - 1$ sunt în progresie aritmetică.

15. Să se extragă subșiruri din sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, dacă:

- $x_n = 1 + (-1)^n$;
- $x_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$;
- $x_n = n \cdot \sin \frac{n\pi}{2}$;
- $x_n = \cos n\pi$;
- $x_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n}$.

B

16. Lungimile laturilor unui triunghi sunt în progresie aritmetică cu rația 2. Cosinusul celui mai mic unghi al acestui triunghi este egal cu $\frac{4}{5}$. Să se afle perimetrul triunghiului.
17. Folosind definiția limitei sirului, să se arate că: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2+1} = 0$.
18. Aplicând definiția limitei sirului, să se arate că: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+1}{3n} \neq \frac{9}{4}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} \neq 1$.
19. Dintr-un vas plin ce conținea 729 l de acid s-au luat a litri, apoi vasul a fost umplut cu apă. După obținerea unei soluții omogene, iarăși s-au luat a litri și vasul a fost umplut din nou cu apă. Această operație a fost repetată de 6 ori și în final soluția din vas conținea 64 l de acid. Să se determine a .
20. Să se afle suma tuturor numerelor naturale de două cifre care, fiind împărțite la 4, dau restul 1.
21. Să se demonstreze că numerele $(a+x)^2, a^2 + x^2, (a-x)^2, a, x \in \mathbb{R}$, sunt în progresie aritmetică. Să se afle suma primilor n termeni ai progresiei, știind că $(a+x)^2$ este primul termen.
22. Să se calculeze: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 1}{2^n + 1}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - n^2 + 1)$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3n - n^5)$;
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2-3n}$; e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{2n}{3n+1} \right)$; f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$;
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$; h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$; i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$.

Probă de evaluare

A

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

- Scriți primii 5 termeni ai sirului $(x_n)_{n \geq 1}$:
 a) $x_n = \frac{3n-2}{n+2}$; b) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{3}$. (2)
- Studiați monotonia sirului $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin formula $x_n = \frac{2n-1}{2n+1}$. (2)
- Aflați primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă:
 $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 a_5 = 28$. (2)
- Determinați primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:
 $b_2 - b_1 = -4$, $b_3 - b_1 = 8$. (2)
- Pentru a ridica un pian la etajul 2, s-au plătit 3 u.m., iar pentru a-l ridica la fiecare etaj următor – de 2 ori mai mult decât pentru etajul precedent. Determinați la ce etaj a fost ridicat pianul, dacă pentru ultimul etaj s-au plătit 48 u.m. (2)

B

Timp efectiv de lucru:
90 de minute

- Scriți primii cinci termeni ai sirului $(x_n)_{n \geq 1}$:

$$x_n = (-1)^{n-1} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} \right).$$
 (1)
- Aflați termenul general al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă $b_1 = 4$, $b_{n+1} = (-3) \cdot b_n$. (1)
- Studiați monotonia sirului $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin formula termenului general:

$$x_n = 1 + \frac{n}{n^2 + 1}.$$
 (1)
- Folosind teorema lui Weierstrass, demonstrați convergența sirului $(x_n)_{n \geq 1}$,

$$x_n = \frac{10 \cdot 11 \cdots (n+9)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}.$$
 (2)
- Aflați primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_1 + a_5 = \frac{5}{3}$, $a_3 \cdot a_4 = \frac{65}{72}$. (1)
- Determinați primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:
 $b_4 - b_2 = -\frac{45}{32}$, $b_6 - b_4 = -\frac{405}{512}.$ (2)
- Pentru confectionarea și instalarea inelului de jos al unei fintini s-au plătit 26 u.m., iar pentru fiecare inel următor – cu 2 u.m. mai puțin decât pentru cel precedent. Suplimentar, s-au mai plătit 40 u.m. Prețul mediu pentru confectionarea și instalarea unui inel este de $22\frac{4}{9}$ u.m. Aflați câte inele au fost instalate. (2)

Moduri de definire a sirului

- 1) analitic;
- 2) prin descrierea termenilor sirului;
- 3) printr-o relatie de recurenta.

superior:
 $\exists M \in \mathbb{R}: x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$
 inferior:
 $\exists m \in \mathbb{R}: x_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Siruri egale

$(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}$ sunt egale
 $\Leftrightarrow x_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Siruri de numere reale**Sir numeric**

$$f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

Notam: $(x_n)_{n \geq 1}$

$$\begin{aligned} \text{Sir-sumă} \\ (x_n + y_n)_{n \geq 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sir-mărginit} \\ \text{superior: } \exists M \in \mathbb{R}: x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{inferior: } \exists m \in \mathbb{R}: x_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Sir monoton

$$\begin{aligned} \text{crescător: } x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \text{descrescător: } x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Sir-cit

$$\left(\frac{x_n}{y_n} \right)_{n \geq 1}$$

Sirul puterilor

$$\left((x_n)^{y_n} \right)_{n \geq 1}$$

Teorema de caracterizare a marginii superioare a unei multimi

Fie $X \subset \mathbb{R}$ o multime nevidă mărginită superior. Numărul M^* este marginea superioară a multimii X dacă și numai dacă:

- 1) $x \leq M^*$, pentru orice $x \in X$;
- 2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$, astfel încât $x_\varepsilon > M^* - \varepsilon$.

Teorema de caracterizare a marginii inferioare a unei multimi

Fie $X \subset \mathbb{R}$ o multime nevidă mărginită inferior. Numărul m^* este marginea inferioară a multimii X dacă și numai dacă:

- 1) $x \geq m^*$, pentru orice $x \in X$;
- 2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$, astfel încât $x_\varepsilon < m^* + \varepsilon$.

Teorema lui Weierstrass

Orice sir numeric monoton și mărginit este convergent.

Sir aritmetică**Progresie aritmetică**

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + r(n-1), n \in \mathbb{N}^* \\ S_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, n \in \mathbb{N}^* \\ a_k &= \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Progresie geometrică

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 q^{n-1}, n \in \mathbb{N}^* \\ S_n &= \frac{b_1 (1 - q^n)}{1 - q}, n \in \mathbb{N}^* \\ b_k^2 &= b_{k-1} \cdot b_{k+1}, k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Inegalitatea medilor

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, n \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$$

Numărul e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Obiective

- ⇒ *determinarea punctelor de acumulare și a punctelor izolate ale unei mulțimi;
- ⇒ aplicarea în diverse contexte a definițiilor limitei unei funcții într-un punct, *aplicarea în rezolvări de probleme a noțiunii de limite laterale, *identificarea funcțiilor care au limită și care nu au limită în punct;
- ⇒ *calculul limitelor de funcții elementare și a limitelor de funcții compuse, *utilizarea în diverse contexte a criteriilor de existență a limitelor de funcții, *utilizarea în rezolvări de probleme a operațiilor algebrice cu limite de funcții;
- ⇒ *aplicarea limitelor remarcabile la calculul limitelor de funcții, *recunoașterea în diverse contexte a formelor exceptate și aplicarea metodelor de înlăturare a acestora.

§1 Limita unei funcții într-un punct**1.1. Puncte de acumulare ale unei mulțimi**

Fie $E \subseteq \mathbb{R}$ o submulțime de numere reale și $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. În acest modul vom studia comportarea funcției f în vecinătatea unui punct x_0 , care, în caz general, nu aparține în mod necesar mulțimii E . Mai precis, vom studia ce se întâmplă cu valorile $f(x)$ ale funcției f dacă valorile argumentului x , $x \neq x_0$, săt din ce în ce mai aproape de x_0 . Pentru ca argumentul $x \in E$ să se poată apropiă suficient de mult de x_0 , este necesar ca în orice vecinătate a lui x_0 să existe puncte din mulțimea E , adică x_0 să fie punct de acumulare pentru E .

Definiție. Fie $E \subseteq \mathbb{R}$. Punctul $x_0 \in \mathbb{R}$ se numește **punct de acumulare** pentru mulțimea E dacă în orice vecinătate a lui x_0 există cel puțin un punct din mulțimea $E \setminus \{x_0\}$.

Deci, $x_0 \in \mathbb{R}$ este un **punct de acumulare** pentru mulțimea E dacă pentru orice vecinătate V a punctului x_0 are loc relația $V \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Prin urmare, $x_0 \in \mathbb{R}$ nu este **punct de acumulare** pentru mulțimea E dacă există o vecinătate V' a lui x_0 care nu conține nici un punct din mulțimea $E \setminus \{x_0\}$, adică $V' \cap (E \setminus \{x_0\}) = \emptyset$. Punctul $x_0 \in E$, care nu este punct de acumulare pentru E , se numește **punct izolat** al mulțimii E . Mulțimea $E \subseteq \mathbb{R}$ se numește **mulțime închisă** dacă ea își conține toate punctele de acumulare. Mulțimea mărginită și închisă se numește **mulțime compactă**.

Teorema 1. Punctul $x_0 \in \mathbb{R}$ este punct de acumulare pentru mulțimea $E \subseteq \mathbb{R}$ dacă și numai dacă există un sir $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in E \setminus \{x_0\}$, astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Demonstrație

Necesitatea. Să admitem că x_0 este punct de acumulare pentru mulțimea E și să considerăm vecinătățile $V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ale punctului x_0 . Atunci în fiecare vecinătate V_n se află cel puțin un punct $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, adică $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$, de unde rezultă că $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ pentru orice $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Suficiența. Dacă mulțimea E conține un sir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termeni x_n , $x_n \neq x_0$, astfel încât $x_n \rightarrow x_0$ cînd $n \rightarrow \infty$, atunci din definiția limitei sirului numeric rezultă că pentru orice vecinătate V a lui x_0 toți termenii x_n ai acestui sir aparțin vecinătății V începînd cu un rang N . Prin urmare, $V \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, adică x_0 este punct de acumulare pentru E . ►

Observație. Definiția punctului de acumulare și teorema 1 rămîn adevărate și pentru cazul în care x_0 este $+\infty$, $-\infty$ sau ∞ . În aceste cazuri, în demonstrația teoremei 1 se vor considera, respectiv, vecinătățile $V_n = (n, +\infty)$, $V_n = (-\infty, -n)$ sau $V_n = (-\infty, -n) \cup (n, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Exemple

1. Pentru $E = (a, b)$ sau $E = [a, b]$ orice punct $x_0 \in [a, b]$ este punct de acumulare.

2. Mulțimea \mathbb{N} are punctul de acumulare $+\infty$. Toate punctele mulțimii \mathbb{N} sunt pentru ea puncte izolate.

3. Mulțimea $E = [-2, 1] \cup \{3\}$ are în calitate de puncte de acumulare orice punct $x_0 \in [-2, 1]$, iar punctul $x_0 = 3$ este pentru ea un punct izolat.

4. Punctele 0 și 1 sunt puncte de acumulare pentru mulțimea

$E = \left\{-1, 2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$, fiindcă această mulțime conține sirurile $(x'_n)_{n \geq 1}$, $x'_n = -\frac{1}{n}$, și $(x''_n)_{n \geq 1}$, $x''_n = 1 + \frac{1}{n}$, pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = 1$, iar $x'_n \neq 0$, $x''_n \neq 1$, $\forall n \geq 1$. Toate punctele $x_0 \in E$ sunt pentru această mulțime puncte izolate.

1.2. Limita unei funcții într-un punct

Fie $E \subseteq \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea E și $l \in \mathbb{R}$. În cele ce urmează vom da un sens riguros afirmației: *Dacă valorile argumentului x se apropie de x_0 , atunci valorile $f(x)$ ale funcției f se apropie de l .*

Pentru început, să examinăm cîteva

Exemple

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2}$, și punctul $x_0 = 2$ (fig. 2.1).

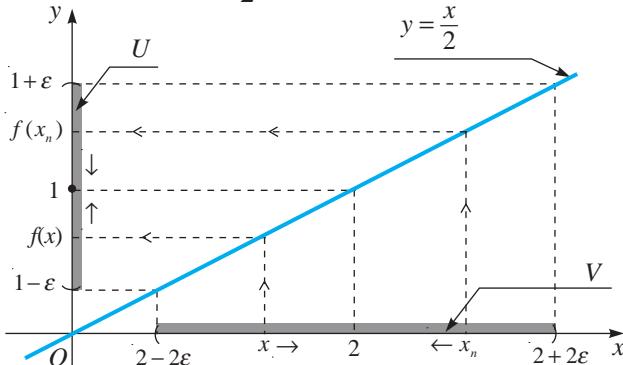


Fig. 2.1

În figura 2.1 observăm că dacă valorile argumentului x se apropiu suficient de mult de $x_0 = 2$, atunci valorile $f(x)$ ale funcției f se apropiu oricăr de mult de $l = 1$.

Această situație poate fi redată în mai multe moduri.

De exemplu, dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este un sir arbitrar și convergent la $x_0 = 2$, atunci sirul $(f(x_n))_{n \geq 1}$, unde $f(x_n) = \frac{x_n}{2}$, converge la $l = 1$ (fig. 2.1).

Sau în alt mod: pentru orice vecinătate $U = (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, centrată în punctul $l = 1$ al axei Oy , există o vecinătate $V = (2 - 2\epsilon, 2 + 2\epsilon)$, $\epsilon > 0$, cu centrul în punctul $x_0 = 2$ al axei Ox , astfel încât pentru orice $x \in V$ rezultă că $f(x) \in U$ (fig. 2.1).

2. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$,

care nu este definită în punctul 1. Pentru orice sir $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \neq 1$, cu $x_n \rightarrow 1$ cînd $n \rightarrow \infty$, obținem că

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = x_n + 1 \rightarrow 2 \text{ cînd } n \rightarrow \infty \text{ (fig. 2.2).}$$

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ x + 1, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$

și punctul $x_0 = 1$ (fig. 2.3). Din reprezentarea grafică a funcției f constatăm: dacă argumentul x ia valori tot mai aproape de $x_0 = 1$, dar mai mari decît 1, atunci valorile funcției f se apropiu de $l = 2$; dacă însă argumentul x ia valori tot mai aproape de $x_0 = 1$, dar mai mici decît 1, atunci valorile funcției f se apropiu de $l = 0$. Prin urmare, nu există un număr $l \in \mathbb{R}$ de care valorile funcției f se apropiu atunci cînd valorile argumentului x sunt aproape de $x_0 = 1$.

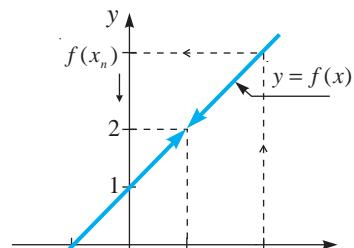


Fig. 2.2

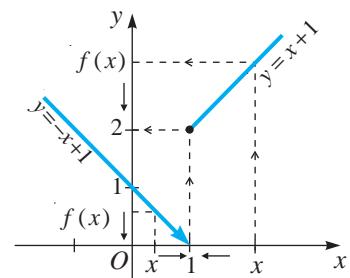


Fig. 2.3

Așadar, în cazul exemplului 1 (exemplului 2) se spune că numărul $l = 1$ (respectiv numărul $l = 2$) este limita funcției f în punctul $x_0 = 2$ (respectiv în punctul $x_0 = 1$), iar în cazul exemplului 3 se spune că funcția f nu are limită în punctul $x_0 = 1$.

Situatiile examineate în aceste exemple conduc la următoarele trei definiții ale limitei unei funcții într-un punct.

Fie $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) o funcție și $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea E .

Definiție (în limbajul vecinătăților). Se spune că **funcția f are limita $l \in \mathbb{R}$ în punctul x_0** dacă pentru orice vecinătate U a punctului l există o vecinătate V a punctului x_0 , astfel încât oricare ar fi $x \in V \cap (E \setminus \{x_0\})$ rezultă că $f(x) \in U$.

Limita funcției f în punctul x_0 se notează $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ sau $f(x) \rightarrow l$ cind $x \rightarrow x_0$ și se citește: *Limita funcției f cind x tinde la x_0 este egală cu l sau $f(x)$ tinde la l cind x tinde la x_0* .

În definiția limitei unei funcții într-un punct, vecinătățile punctului l pot fi considerate de forma $U = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - l| < \varepsilon\} = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, iar vecinătățile punctului x_0 – de forma $V = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, și este evident că, în caz general, V depinde de U . Deci, δ depinde de ε , adică $\delta = \delta(\varepsilon)$. Prin urmare, definiția limitei unei funcții într-un punct poate fi formulată, în mod echivalent, cu ajutorul inegalităților numerice.

Definiție (Cauchy¹, sau în limbajul $\varepsilon-\delta$). Se spune că **funcția f are limita $l \in \mathbb{R}$ în punctul x_0** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi $x \in E \setminus \{x_0\}$, inegalitatea $|x - x_0| < \delta$ implică $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Limita unei funcții într-un punct poate fi definită și cu ajutorul limitelor de siruri numerice.



Augustin Louis Cauchy



Heinrich Eduard Heine

Definiție (Heine², sau în limbajul șirurilor). Se spune că **funcția f are limita $l \in \mathbb{R}$ în punctul x_0** dacă pentru orice sir $(x_n)_{n \geq 1}$ din mulțimea $E \setminus \{x_0\}$, ce are limita x_0 , șirul respectiv $(f(x_n))_{n \geq 1}$ al valorilor funcției f are limita l .

Noțiunea de limită $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a unei funcții f într-un punct x_0 se extinde și pentru cazul în care una sau ambele valori x_0, l nu sunt finite. Prezentăm unele dintre aceste definiții.

¹ Augustin Louis Cauchy (1789–1857) – matematician francez.

² Heinrich Eduard Heine (1821–1881) – matematician german.

Definiții (Cauchy)

1. Se spune că limita funcției f în punctul x_0 este $+\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi $x \in E \setminus \{x_0\}$, inegalitatea $|x - x_0| < \delta$ implică $f(x) > \varepsilon$. Se notează: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

Cu ajutorul cuantificatorilor \exists, \forall , definiția 1 se scrie concis astfel:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a. i. (astfel încât) $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

2. Se spune că limita funcției f în punctul x_0 este ∞ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi $x \in E \setminus \{x_0\}$, inegalitatea $|x - x_0| < \delta$ implică $|f(x)| > \varepsilon$. Se notează: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Concis, definiția 2 se scrie astfel: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) dacă $\forall \varepsilon > 0,$

$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a. i. $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a. i. $\forall x \in E$, $x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a. i. $\forall x \in E$, $|x| > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$.

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a. i. $\forall x \in E$, $x > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

Observații. **1.** Pentru $x_0, l \in \mathbb{R}$, definițiile limitei unei funcții într-un punct (în limbajele vecinătăților și $\varepsilon-\delta$) au următoarea interpretare geometrică: pentru valori ale argumentului x suficient de apropiate de x_0 , valorile respective $f(x)$ ale funcției f sunt oricără mult apropiate de l (fig. 2.4).

2. Pentru funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, definițiile 3 și 5 (Cauchy) ale limitei unei funcții într-un punct reprezintă definiția limitei unui sir numeric cu limită finită sau infinită.

3. Din definiția Heine a limitei unei funcții într-un punct rezultă că dacă există două siruri $(x'_n)_{n \geq 1}$ și $(x''_n)_{n \geq 1}$ din multimea $E \setminus \{x_0\}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x_0$, astfel încât sirurile respective $(f(x'_n))_{n \geq 1}$ și $(f(x''_n))_{n \geq 1}$ au limite diferite sau nu au limită, atunci funcția f nu are limită în punctul x_0 .

Observația 3 este deseori aplicată pentru a demonstra că o funcție f nu are limită în x_0 .

4. Se poate demonstra că dacă există limita unei funcții într-un punct, atunci această limită este unică.

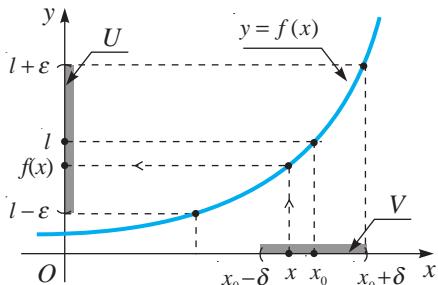


Fig. 2.4

Fiecare dintre exercițiile următoare a fost rezolvat cu ajutorul definiției limitei unei funcții într-un punct, adecvate enunțului respectiv.

Exerciții rezolvate

1. Să se arate, aplicând definiția în limbajul vecinătăților a limitei unei funcții într-un punct, că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{dacă } x < 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 1 \\ 2x + 1, & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$ are limită în punctul $x_0 = 1$ și $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

Rezolvare:

Fie $U = (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, o vecinătate arbitrară a punctului $l = 3$.

Dacă $x < 1$, atunci

$$f(x) = 3x \in U \Leftrightarrow 3 - \varepsilon < 3x < 3 + \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow x \in \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1\right).$$

Dacă însă $x > 1$, atunci

$$f(x) = 2x + 1 \in U \Leftrightarrow 3 - \varepsilon < 2x + 1 < 3 + \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x \in \left(1, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Fie $V = \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$ vecinătatea punctului $x_0 = 1$, $V \subset \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Din $x \in V$, $x \neq 1$, rezultă că $x \in \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1\right)$ sau $x \in \left(1, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, de unde obținem că $f(x) \in U$.

Așadar, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

2. Se consideră funcția $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Folosind definiția Cauchy a limitei unei funcții într-un punct, să se arate că $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

Rezolvare:

$\forall \varepsilon > 0$ și $\forall x \in [-1, 3]$ avem $|x| \leq 3$ și $|f(x) - 5| = |3x^2 - 4x - 4| = |(x-2)(3x+2)| \leq |x-2|(3|x|+2) \leq 11|x-2| < \varepsilon$, dacă $|x-2| < \frac{\varepsilon}{11}$. Așadar, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $\left(\delta = \frac{\varepsilon}{11}\right)$,

astfel încât $\forall x \in [-1, 3] \setminus \{2\}$ cu $|x-2| < \delta$, avem $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

Prin urmare, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$. Să se demonstreze că $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$.

Rezolvare:

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Considerând orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, obținem $|f(x)| > \varepsilon \Leftrightarrow |x+1|^3 < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x+1| < \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$. Deci, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $\left(\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right)$, astfel încât $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ cu $|x+1| < \delta$,

avem $|f(x)| > \varepsilon$ și, în baza definiției Cauchy, rezultă că $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$.

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2}$. Să se arate că $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$.

Rezolvare:

Pentru orice sir $(x_n)_{n \geq 1}$ din $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -2$, sirul respectiv $(f(x_n))_{n \geq 1}$ al valorilor funcției f are limita $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n^2 + 5x_n + 2}{x_n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2x_n + 1)(x_n + 2)}{x_n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n + 1) = 1 + 2\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -3$. În baza definiției Heine, rezultă că $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$.

5. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos \frac{1}{x}$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$. Să se arate, folosind observația 3, că nu există limitele $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Rezolvare:

Funcția f nu are limită în punctul $x_0 = 0$, deoarece există cel puțin două siruri $(x'_n)_{n \geq 1}$, $x'_n = \frac{1}{2n\pi}$, și $(x''_n)_{n \geq 1}$, $x''_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi}$, care au limita zero cînd $n \rightarrow \infty$, însă sirurile respective $(f(x'_n))_{n \geq 1}$, $f(x'_n) = 1$, și $(f(x''_n))_{n \geq 1}$, $f(x''_n) = -1$, au limite diferite: 1 și respectiv -1. Similar, funcția g nu are limită la plus infinit, fiindcă sirurile $(x'_n)_{n \geq 1}$, $x'_n = n\pi$, și $(x''_n)_{n \geq 1}$, $x''_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, au limita plus infinit (a se consulta observația 2), dar $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x'_n) = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x''_n) = 1$.

1.3. Limite laterale

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) și $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea E . Să admitem că x_0 este punct de acumulare și pentru mulțimea $E_- = E \cap (-\infty, x_0)$ sau pentru mulțimea $E_+ = E \cap (x_0, +\infty)$. În acest caz se spune că x_0 este punct de acumulare la stînga sau punct de acumulare la dreapta pentru mulțimea E .

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare la stînga (la dreapta) pentru mulțimea E . Dacă valorile lui x se apropi de x_0 din stînga (respectiv din dreapta) cu valori $x < x_0$ (respectiv $x > x_0$), se scrie $x \rightarrow x_0 - 0$ (respectiv $x \rightarrow x_0 + 0$). Pentru $x_0 = 0$, în aceste cazuri se scrie $x \rightarrow -0$ (respectiv $x \rightarrow +0$).

Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ x + 1, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$ considerată în secvența 1.2, am observat că nu există un număr $l \in \mathbb{R}$ de care valorile $f(x)$ să se apropii în timp ce valorile argumentului x sătăcătoare de aproape de 1. Dacă însă valorile argumentului x se apropii de 1 din stînga (prin valori $x < 1$), atunci valorile $f(x) = -x + 1$ se apropii de 0, iar dacă valorile argumentului x se apropii de 1 din dreapta (prin valori $x > 1$), atunci valorile $f(x) = x + 1$ se apropii de 2. Deci, funcția f nu are limită în punctul 1, însă se spune că ea are limite laterale în acest punct.

În definițiile care urmează, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) este o funcție, iar $x_0 \in \mathbb{R}$ – un punct de acumulare la stînga (la dreapta) pentru mulțimea E .

Definiție. Se spune că numărul $l_s = l_s(x_0) \in \mathbb{R}$ este **limita la stînga a funcției f în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$** dacă pentru orice vecinătate U a lui l_s există o vecinătate V a lui x_0 , astfel încât oricare ar fi $x \in V \cap E_-$ rezultă că $f(x) \in U$.

Definiție. Se spune că numărul $l_d = l_d(x_0) \in \mathbb{R}$ este **limita la dreapta a funcției f în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$** dacă pentru orice vecinătate U a lui l_d există o vecinătate V a lui x_0 , astfel încât oricare ar fi $x \in V \cap E_+$ rezultă că $f(x) \in U$.

Numerele $l_s(x_0)$ și $l_d(x_0)$ se numesc **limite laterale ale funcției f în punctul x_0** și se folosesc notațiile

$$l_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x), \quad l_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

sau

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

(fig. 2.5).

Pentru $x_0 = 0$, în aceste cazuri se scrie:

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(-0), \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(+0).$$

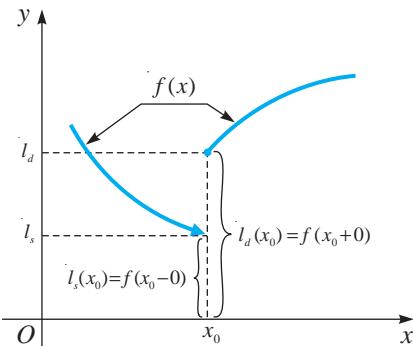


Fig. 2.5

Mentionăm că definițiile limitelor laterale pot fi formulate și în limbajele Heine sau Cauchy. Vom prezenta doar enunțul uneia dintre aceste definiții, celelalte fiind propuse ca exerciții.

Definiție (Cauchy). Se spune că numărul $l_d \in \mathbb{R}$ este **limita la dreapta a funcției f în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi $x \in E$, inegalitatea dublă $x_0 < x < x_0 + \delta$ implică $|f(x) - l_d| < \varepsilon$.

Observație. Ca și în cazul limitelor de funcții, limitele laterale l_s și l_d pot fi infinite ($+\infty$, $-\infty$ sau ∞). Definițiile acestor concepte pot fi formulate în cele trei limbi echivalente. Prezentăm doar una dintre aceste definiții.

Definiție (Cauchy). Se spune că $-\infty$ este **limita la dreapta a funcției f în punctul x_0** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi $x \in E$, inegalitatea dublă $x_0 < x < x_0 + \delta$ implică $f(x) < -\varepsilon$.

Se notează: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = -\infty$.

Un criteriu util de existență a limitei unei funcții într-un punct este formulat în

Teorema 2 (criteriul în limbajul limitelor laterale). Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) și $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimile E_- și E_+ . Funcția f are limită în punctul x_0 dacă și numai dacă funcția f are în x_0 limite laterale egale: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$. În acest caz, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Demonstrație

Necesitatea. Dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, atunci, în baza definiției, există și limitele laterale $f(x_0 - 0) = l$ și $f(x_0 + 0) = l$.

Suficiența. Să presupunem că există limitele laterale $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ și $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = l$, $l \in \mathbb{R}$. Din definiția Cauchy a limitelor laterale ale unei funcții într-un punct rezultă: $(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \exists \delta_2 > 0, \text{ astfel încât } \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \text{ dacă } x_0 - \delta_1 < x < x_0 \text{ sau } x_0 < x < x_0 + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.

Fie $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Evident, $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$ cu $|x - x_0| < \delta \Rightarrow (x_0 - \delta_1 < x < x_0 \text{ sau } x_0 < x < x_0 + \delta_2) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Prin urmare, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Similar se demonstrează și cazul în care limita l este infinită. ►

Exerciții rezolvate

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{dacă } x \leq 2 \\ 2x + 3, & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$ Să se determine limitele laterale ale funcției f în punctul $x_0 = 2$. Are limită funcția f în punctul $x_0 = 2$?

Rezolvare:

Dacă $x < 2$, atunci $f(x) = x^2 + x$, și pentru orice sir de numere $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in (-\infty, 2)$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n) = 6$.

Dacă $x > 2$, atunci $f(x) = 2x + 3$, și pentru orice sir de numere $(t_n)_{n \geq 1}$, $t_n \in (2, +\infty)$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 2$ obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2t_n + 3) = 7$.

Conform definiției Heine, limitele laterale sunt $f(2 - 0) = 6$, $f(2 + 0) = 7$ și, cum $f(2 - 0) \neq f(2 + 0)$, în baza teoremei 2, funcția f nu are limită în punctul $x_0 = 2$.

2. Să se determine valorile parametrului real a pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + a^2, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \\ 3ax + 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \end{cases}$ are limită cel puțin în unul dintre punctele -1 și 1 . Care este valoarea acestei limite?

Rezolvare:

Pentru orice $x_n \in (-1, 1)$ avem $f(x_n) = x_n^2 + a^2$ și dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 + a^2$, iar dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 + a^2$. Deci, $l_s(1) = l_d(-1) = 1 + a^2$. În mod similar, pentru orice $x_n \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ obținem că $f(x_n) = 3ax_n + 1$ și dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 - 3a$, iar dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 + 3a$. Prin urmare, $l_s(-1) = 1 - 3a$, $l_d(1) = 1 + 3a$.

Astfel, funcția f are limită în punctul $x_0 = -1$ dacă: $l_s(-1) = l_d(-1) \Leftrightarrow 1 + a^2 = 1 - 3a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \in \{-3, 0\}$. Dacă $a = 0$, atunci $l_s(-1) = l_d(-1) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$, iar dacă $a = -3$, atunci $l_s(-1) = l_d(-1) = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 10$.

Similar, funcția f are limită în punctul $x_0 = 1$ dacă: $l_s(1) = l_d(1) \Leftrightarrow 1 + a^2 = 1 + 3a \Leftrightarrow a \in \{0, 3\}$. Pentru $a = 0$ avem $l_s(1) = l_d(1) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, iar pentru $a = 3$ obținem că $l_s(1) = l_d(1) = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 10$.

Așadar, pentru $a = 0$ funcția f are limită în ambele puncte, -1 și 1 , iar pentru $a \in \{-3, 3\}$ ea are limită numai în unul dintre aceste puncte.

Exerciții propuse

B

1. Să se arate că punctul $x_0 = 2$ este punct de acumulare pentru mulțimea $E \subseteq \mathbb{R}$:

$$\text{a) } E = \left\{ \frac{2n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}; \quad \text{b) } E = \left\{ 2 + \frac{(-1)^n}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}; \quad \text{c) } E = \left\{ \frac{4n+3}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

2. Să se determine punctele de acumulare pentru mulțimea:

$$\text{a) } E = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}; \quad \text{b) } E = \left\{ \frac{n}{n+3} (3 + (-1)^n) \mid n \in \mathbb{N} \right\}; \quad \text{c) } E = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{n\pi}{3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3. Să se indice cel puțin un sir numeric din E care are ca limită punctul de acumulare x_0 pentru mulțimea E :

$$\text{a) } E = \mathbb{R} \setminus [0, 4), \quad x_0 = 4; \quad \text{b) } E = \left\{ \frac{(-1)^n \cdot n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad x_0 \in \{-1, 1\}.$$

4. Aplicând definiția în limbajul vecinătăților a limitei unei funcții într-un punct, să se arate că:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2}x - 3 \right) = -2; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{2}; \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} (1 - 2x) = 3; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = -1; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1. \end{array}$$

5. Folosind definiția Heine a limitei unei funcții într-un punct, să se calculeze limita:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x + 5}{x^2 + 1}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{3x^2 + 5x - 2}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5}.$$

6. Să se demonstreze, folosind definiția Cauchy a limitei unei funcții într-un punct, că:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 5x + 3) = 1; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 7}{x + 3} = 1; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 1} = 2.$$

7. Să se arate că nu există limită:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{1}{x-1}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sin^2 \pi x; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{x}.$$

8. Să se calculeze în punctul specificat x_0 limitele laterale ale funcției $f: D^1 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{dacă } x \leq 2 \\ x^2 + x, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2; \quad \text{b) } f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 - 1}, \quad x_0 \in \{-1, 1\}.$$

¹ Aici și în continuare mulțimea D se consideră domeniul maxim de definiție al funcției.

9. Să se decidă dacă funcția f are limită în punctul specificat x_0 și să se calculeze $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, știind că $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x^3 - 2x, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad x_0 \in \{0, 1\};$
 - $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2 - x}, \quad x_0 \in \{0, 2\}.$
10. Să se cerceteze, în punctele specificate x_k , $k \in \mathbb{Z}$, existența limitei funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$, $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
 - $f(x) = [x]$, $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$.
11. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = x - [x];$
 - $f(x) = [\cos x];$
 - $f(x) = \sigma(\sin x)$, unde $\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases}$ este funcția Heaviside (treapta unitate).
- Să se schițeze graficul funcției f și să se determine punctele $x_0 \in \mathbb{R}$ în care există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = \begin{cases} (ax+1)^2, & \text{dacă } x \leq 1 \\ ax+3, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$
 - $f(x) = \begin{cases} a^2 - x^2, & \text{dacă } x < 2 \\ x-a, & \text{dacă } x \geq 2, \end{cases} \quad x_0 = 2.$
- Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât să existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ și să se calculeze această limită.
13. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a^2 x - x^2, & \text{dacă } x < -2 \\ -6, & \text{dacă } x = -2 \\ 3ax, & \text{dacă } x > -2. \end{cases}$
- Pentru care valori ale parametrului $a \in \mathbb{R}$ există $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$?

§2 | Operații cu limite de funcții. Limitele unor funcții elementare

2.1. Operații cu limite de funcții

Să determinăm operațiile ce pot fi efectuate cu limite de funcții. Vom prezenta demonstrațiile doar pentru unele dintre aceste operații, celelalte demonstrații fiind propuse ca exerciții.

Fie E o submulțime nevidă a lui \mathbb{R} , x_0 un punct de acumulare finit sau infinit pentru mulțimea E și $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ funcții pentru care există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, unde limitele a și b sunt finite. Sunt adevărate **propozițiile**:

① Dacă funcția f are limită în punctul x_0 și $c \in \mathbb{R}$, atunci și funcția $c \cdot f$ are limită în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Prin urmare, *factorul constant poate fi extras de sub semnul limitei*.

Observație. Dacă în propoziția ① se consideră că $f(x) = 1$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$. Deci, limita în orice punct x_0 a unei constante este însăși constantă.

② Dacă funcțiile f, g au limită în punctul x_0 , atunci și funcția $f \pm g$ are limită în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ – limita sumei (diferenței) de funcții este egală cu suma (diferența) limitelor acestor funcții.

Demonstrație

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un sir arbitrar din mulțimea $E \setminus \{x_0\}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Deoarece funcțiile f și g au limită în punctul x_0 , în baza definiției Heine, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = b$.

Aplicînd proprietățile operațiilor cu siruri numerice convergente, obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n) \pm g(x_n)] = a \pm b$.

Prin urmare, conform definiției Heine, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$. ►

③ Dacă funcțiile f, g au limită în punctul x_0 , atunci și funcția $f \cdot g$ are limită în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ – limita produsului de funcții este egală cu produsul limitelor acestor funcții.

Propozițiile ② și ③ sunt adevărate și pentru un număr finit f_1, f_2, \dots, f_n de funcții care au limită în punctul x_0 . În particular, din propoziția ③, pentru $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f$, se obține $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

④ Dacă funcțiile f și g au limită în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \neq 0$, atunci cîntul $\frac{f(x)}{g(x)}$ este definit pe o vecinătate a punctului x_0 din mulțimea $E \setminus \{x_0\}$, funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ – limita cîntului a două funcții este egală cu cîntul limitelor acestor funcții.

⑤ Dacă funcțiile f și g au limită în punctul x_0 și $f(x) > 0$ pentru orice $x \in E$, atunci și funcția $f^g: E \rightarrow \mathbb{R}$, $(f^g)(x) = [f(x)]^{g(x)}$ are limită în punctul x_0 (cu excepția cazului 0^0) și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = a^b = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Condițiile de existență a limitei pentru funcții compuse sunt formulate în propoziția ⑥.

⑥ Fie E și F submulțimi nevide din \mathbb{R} , x_0 un punct de acumulare pentru E , funcțiile $u: E \rightarrow F$, $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ și funcția compusă $f \circ u: E \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ u)(x) = f(u(x))$, $\forall x \in E$.

Dacă 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$,

2) $u(x) \neq u_0$ pentru orice x dintr-o vecinătate din E a lui x_0 și $x \neq x_0$,

3) $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l$,

atunci funcția compusă $f \circ u$ are limită în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l$.

Observații. 1. Egalitatea $\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$, stabilită în propoziția ⑥, argumentează un procedeu general numit **metoda substituției** sau **metoda schimbării de variabilă** la calculul limitelor de funcții. Într-adevăr, membrul din dreapta al egalității se obține din membrul din stânga dacă se efectuează notația $u = u(x)$, numită **substituție** sau **schimbare de variabilă**, și se ține cont de ipotezele 1) și 2) ale propoziției ⑥ că $u \rightarrow u_0$ și $u \neq u_0$.

2. Operațiile cu limite de funcții sunt valabile și pentru limite laterale.

Propozițiile ① – ⑤ sunt adevărate și în unele cazuri în care una sau ambele funcții f și g au limită infinită în punctul x_0 sau cînd pentru cîtul $\frac{f}{g}$ avem $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

De exemplu, să presupunem că $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ și să demonstreăm că în acest caz funcția $f + g$ are limită în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

Conform definiției Cauchy a limitei unei funcții într-un punct, avem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\varepsilon) > 0, \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \\ |x - x_0| < \delta_1 &\Rightarrow a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta_2(M) > 0, \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \\ |x - x_0| < \delta_2 &\Rightarrow g(x) > M - (a - \varepsilon). \end{aligned} \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că pentru orice $M > 0$, $\exists \delta = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(M)) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in E \setminus \{x_0\}$ inegalitatea $|x - x_0| < \delta$ implică $|x - x_0| < \delta_1$ și $|x - x_0| < \delta_2$, care, la rîndul lor, implică

$$f(x) + g(x) > (a - \varepsilon) + M - (a - \varepsilon) = M.$$

În baza definiției Cauchy a limitei funcției în punct, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

Simbolic, acest rezultat se notează $a + (+\infty) = +\infty$ și se numește **formă neexceptată**, **formă determinată** sau, simplu, **determinare**.

În mod similar pot fi demonstreate și forme de neexceptate:

$$\begin{aligned} a + (-\infty) &= -\infty; \quad a + \infty = \infty; \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty; \quad a \cdot (+\infty) = +\infty \quad (a > 0); \\ a \cdot (-\infty) &= +\infty \quad (a < 0); \quad \frac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

În cazul în care $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, despre existența limitei funcției $f + g$ sau a funcției $\frac{f}{g}$ în punctul x_0 nu ne putem pronunța.

Simbolic, acest rezultat se notează $+\infty - \infty$ sau $\frac{-\infty}{\infty}$ și se numește **formă exceptată**, **formă nedeterminată** sau, simplu, **nedeterminare** (o expunere mai detaliată a acestor cazuri se va efectua în § 4).

Așadar, operațiile cu limite de funcții pot avea, sau nu avea sens. Aceste operații conduce la apariția așa-numitelor **forme neexceptate (determinări)** și **forme exceptate (nedeterminări)**.

Tabelul formelor neexceptate

Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci:

- | | |
|---|---|
| 1. $\infty + a = \infty$ | 15. $\frac{a}{\infty} = 0$ |
| 2. $(+\infty) + a = +\infty$ | 16. $\frac{\infty}{a} = \infty$ |
| 3. $(-\infty) + a = -\infty$ | 17. $\frac{a}{0} = \infty \ (a \neq 0)$ |
| 4. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ | 18. $a^{+\infty} = +\infty \ (a > 1)$ |
| 5. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ | 19. $a^{-\infty} = 0 \ (a > 1)$ |
| 6. $a \cdot \infty = \infty \ (a \neq 0)$ | 20. $a^{+\infty} = 0 \ (0 < a < 1)$ |
| 7. $a \cdot (+\infty) = +\infty \ (a > 0)$ | 21. $a^{-\infty} = +\infty \ (0 < a < 1)$ |
| 8. $a \cdot (-\infty) = -\infty \ (a > 0)$ | 22. $(+\infty)^a = +\infty \ (a > 0)$ |
| 9. $a \cdot (+\infty) = -\infty \ (a < 0)$ | 23. $(+\infty)^a = 0 \ (a < 0)$ |
| 10. $a \cdot (-\infty) = +\infty \ (a < 0)$ | 24. $0^{+\infty} = 0$ |
| 11. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ | 25. $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$ |
| 12. $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$ | 26. $(+\infty)^{-\infty} = 0.$ |
| 13. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$ | |
| 14. $\infty \cdot \infty = \infty$ | |

Tabelul formelor exceptate

- | | | | | | | |
|----------------------------|------------------|---------------------|----------------------|---------------|----------|---------------|
| 1. $\frac{\infty}{\infty}$ | 2. $\frac{0}{0}$ | 3. $0 \cdot \infty$ | 4. $\infty - \infty$ | 5. 1^∞ | 6. 0^0 | 7. ∞^0 |
|----------------------------|------------------|---------------------|----------------------|---------------|----------|---------------|

Exemple

Din definiția limitei unei funcții într-un punct rezultă că $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, unde $x_0 \in \mathbb{R}$.

Prin urmare, în baza propozițiilor ① – ⑥ obținem:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2) = 3(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 2 = 2;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} [(x+3) \cdot (3x^2 - 4x - 2)] = \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2) = 5 \cdot 2 = 10;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 2}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x+3)} = \frac{2}{5};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2)^{(x+3)} = [\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2)]^{\lim_{x \rightarrow 2} (x+3)} = 2^5 = 32;$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -1} [3(x+3)^2 - 4(x+3) - 2] = \lim_{u \rightarrow 2} (3u^2 - 4u - 2) = 2 \quad (u = x+3 \rightarrow 2 \text{ cind } x \rightarrow -1).$$

2.2. Limitele funcțiilor elementare

În cele ce urmează vom studia limitele unor funcții elementare, funcții care se folosesc la descrierea în limbaj matematic al diverselor procese din natură. Vom prezenta, fără demonstrație, relațiile de calcul al limitelor de funcții respective. Aceste rezultate pot fi deduse direct utilizând definiția Heine sau Cauchy a limitei unei funcții într-un punct.

I. Funcția putere cu exponent natural $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ (fig. 2.6)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \infty, & \text{dacă } n \text{ este impar;} \end{cases}$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\infty, & \text{dacă } n \text{ este impar;} \end{cases}$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.

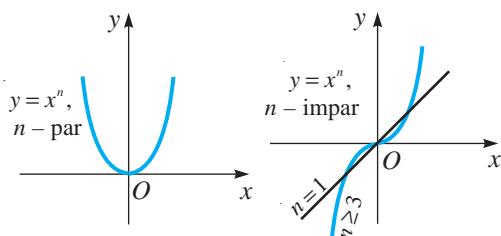


Fig. 2.6

II. Funcția putere cu exponent întreg negativ

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ (fig. 2.7)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n}$, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \infty, & \text{dacă } n \text{ este impar;} \end{cases}$
- dashed line separator
- d) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^n} = +\infty$;
- e) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\infty, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$

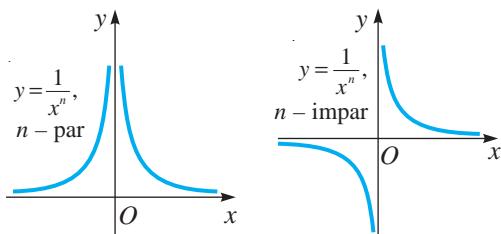


Fig. 2.7

III. Funcția polinomială

$P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n}$, $a_0 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$; | b) $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_0 x^n$; |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_0 x^n$; | d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_0 x^n$. |

Exemple

1. $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 - 4x + 2) = 3 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 2 = 3$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2 + 5x - 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2) = -\infty$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + 100x^4 - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5) = +\infty$.

IV. Funcția rațională

Fie P și Q două funcții polinomiale cu coeficienți reali definite, respectiv, prin:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \text{ și } Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m, \quad a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0, \quad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Funcția $\frac{P}{Q}: E \rightarrow \mathbb{R}$, unde $E = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$, se numește **funcție rațională**.

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \forall x_0 \in E;$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } n = m \\ 0, & \text{dacă } n < m. \end{cases}$

Dacă $x \rightarrow +\infty$ sau $x \rightarrow -\infty$, atunci în b) se mai specifică și semnul expresiei $\frac{a_0}{b_0} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m}$. Cazul $Q(x_0) = 0$ se va examina în § 4.

Exemple

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x^2 + 3}{-x^2 + 6x - 2} = \frac{2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 3}{-2^2 + 6 \cdot 2 - 2} = \frac{1}{2}.$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5 + 3x + 1}{4x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} x^3 \right) = +\infty.$

V. Funcția radicală

1 f: $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, n – par (fig. 2.8)

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad x_0 \in [0, +\infty);$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad n$ – par.

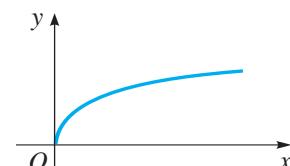


Fig. 2.8

2 f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, n – impar (fig. 2.9)

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad x_0 \in \mathbb{R};$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty, \quad n$ – impar;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad n$ – impar;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty, \quad n$ – impar.

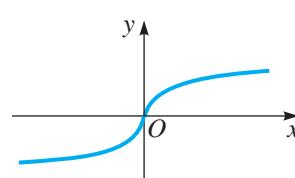


Fig. 2.9

VI. Funcția exponentială

$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (fig. 2.10)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}$;
- b) dacă $a > 1$, atunci: $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$;
- c) dacă $0 < a < 1$, atunci: $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$;
- d) nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$.

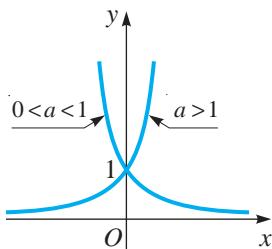


Fig. 2.10

VII. Funcția logarithmică

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (fig. 2.11)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$, $x_0 > 0$;
- b) dacă $a > 1$, atunci: $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$;
- c) dacă $0 < a < 1$, atunci: $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$.

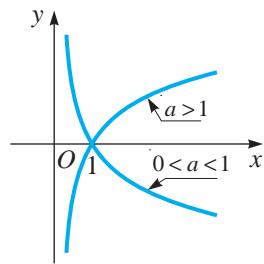


Fig. 2.11

VIII. Funcția putere cu exponent real

$f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (fig. 2.12)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$, $x_0 > 0$;
- b) $\alpha > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$;
- c) $\alpha < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha = +\infty$.

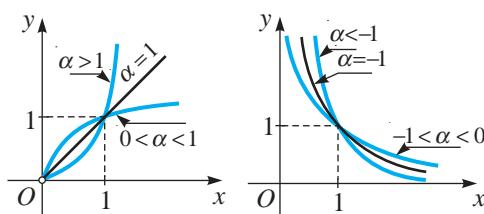


Fig. 2.12

IX. Funcții trigonometrice

1 Funcția sinus $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ (fig. 2.13)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$;
- b) nu există: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$.

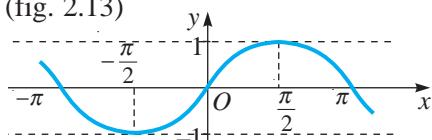


Fig. 2.13

2 Funcția cosinus $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ (fig. 2.14)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$;
- b) nu există: $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$.

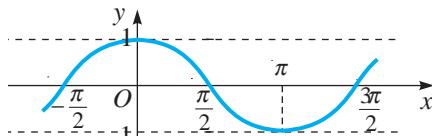


Fig. 2.14

3 Funcția tangentă

$f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ (fig. 2.15)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$, $x_0 \neq \alpha_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \alpha_k^-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \alpha_k^+} \operatorname{tg} x = -\infty$, $k \in \mathbb{Z}$.

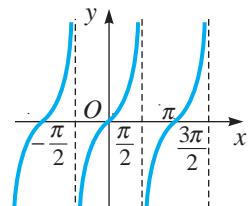


Fig. 2.15

4 Funcția cotangentă

$f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ (fig. 2.16)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0$, $x_0 \neq \beta_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \beta_k^-} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \beta_k^+} \operatorname{ctg} x = +\infty$, $k \in \mathbb{Z}$.

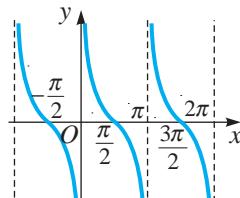


Fig. 2.16

X. Funcții trigonometrice inverse**1 Funcția arcsinus**

$f: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, $f(x) = \arcsin x$ (fig. 2.17)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad x_0 \in [-1, 1].$$

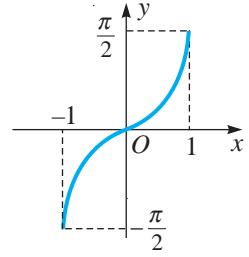


Fig. 2.17

2 Funcția arccosinus

$f: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$ (fig. 2.18)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad x_0 \in [-1, 1].$$

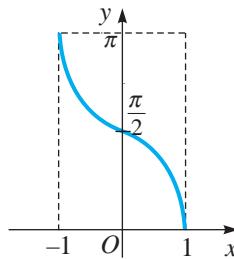


Fig. 2.18

3 Funcția arctangentă

$f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ (fig. 2.19)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$;
- c) nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x$.

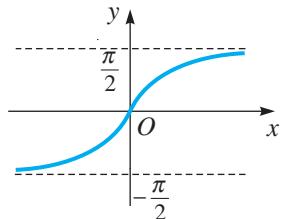


Fig. 2.19

4 Funcția arccotangentă

$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, $f(x) = \text{arcctg } x$ (fig. 2.20)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \text{arcctg } x = \text{arcctg } x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arcctg } x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arcctg } x = \pi$;
- c) nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{arcctg } x$.

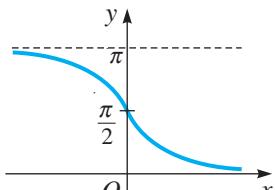


Fig. 2.20

XI. Funcția modul (valoarea absolută)

$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = |x|$ (fig. 2.21)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$, $x_0 \in \mathbb{R}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = +\infty$.

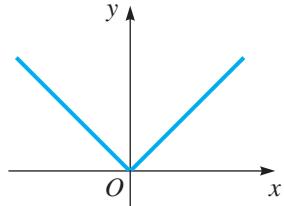


Fig. 2.21

Cea mai simplă clasă de funcții care se studiază în analiza matematică este mulțimea funcțiilor elementare I–XI. Funcțiile care se obțin din acestea prin aplicarea succesivă a unui număr finit de operații aritmetice și de compunere de asemenea se numesc **funcții elementare**. Constatăm că pentru funcțiile elementare $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției) este verificată relația $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in D$, adică *limita funcției într-un punct este egală cu valoarea funcției în acest punct*.

Exemple

1. a) Funcția determinată prin formula $f(x) = \sqrt{x} + 2^x - 3 \log_2 x$ este elementară, deci $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + 2^x - 3 \log_2 x) = f(4) = \sqrt{4} + 2^4 - 3 \log_2 4 = 12$.

b) În mod similar,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\ln(\sin x) + 3 \ln \left(\frac{5}{4} + \cos^2 x \right) \right) = \ln \left(\sin \frac{\pi}{6} \right) + 3 \ln \left(\frac{5}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{6} \right) = \ln \frac{1}{2} + 3 \ln 2 = 2 \ln 2.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x = +\infty$ etc.

Exerciții propuse

B

1. Să se calculeze:

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(-\frac{1}{8} x^3 + \sqrt{x} + 5 \right);$ | b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^4 + \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x^2} \right);$ | c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{x} - \frac{2}{x^2} + x^3 \right);$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x} \right);$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x^2} - 3x^2 \right);$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + 3 + x^3 + \sqrt[3]{x} \right).$ |

2. Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + x - 10);$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 5x^2 + 3);$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 + 3x^3 + 1);$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 + 100x^2);$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 - 10x^2 + 1}{x^2 + 3x + 1};$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 3}{x^2 - 5x^3};$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^3}{2x^4 + 3};$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 4}{1 + x - x^2};$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - x^2 + 3x}{5x^4 - x^3 - x}.$

3. Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (2^x + \log_{0,25} x - (\sqrt{3})^x);$

b) $\lim_{x \rightarrow +0} (\pi^x + \log_3 x);$

c) $\lim_{x \rightarrow +0} (\log_{0,5} x - 2^x);$

d) $\lim_{x \rightarrow \log_2 e} (2^x - 2 \cdot 4^x + 8^x);$

e) $\lim_{x \rightarrow 2^e} (\log_2 x + \log_4 x - e);$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \lg x).$

4. Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt[4]{x^4 + 1});$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^3 + 1)(1 - x^2);$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^6 - x^3)(x^3 - x + 1);$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{|x-1|};$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{|x+1|};$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1|}{3x-1}.$

5. Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sin x + \sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x);$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + 2 \operatorname{ctg} x - \cos x);$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi} (\sin x + 2 \cos x - 3 \operatorname{ctg} x), n \in \mathbb{Z};$

d) $\lim_{x \rightarrow n\pi} (2 \sin x - 3 \cos x + \operatorname{tg} x), n \in \mathbb{Z}.$

6. Să se completeze spațiile punctate, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(2^x) = \lim_{y \rightarrow ...} \sin y = 0,$ unde $y = 2^x;$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg}(\pi^x + \ln x) = \lim_{y \rightarrow ...} \operatorname{tg} y = ...,$ unde $y = ...$

7. Să se afle valoarea de adevăr a propoziției:

a) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(1 - 2x);$

b) $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x^2;$

c) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - \cos x),$

unde simbolul \exists semnifică „nu există”.

8. Să se calculeze în punctul indicat x_0 limitele laterale ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}, x_0 \in \{-1, 0, 1\};$ b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2-1}}, x_0 \in \{-1, 1\};$ c) $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x+1}}}, x_0 = 1.$

9. Pentru care valori ale parametrului $m \in \mathbb{R}$ funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x^2 + m^2} - 2, & \text{dacă } x < 0 \\ m + 2, & \text{dacă } x = 0 \\ (m^2 e^x) : \left(1 + 2^{-\frac{1}{x}}\right), & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

are în punctul $x_0 = 0$ limita egală cu $f(0)?$

10. Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{m^2 x^2 - 6mx + 9 \cdot 2^{1-x}}, & \text{dacă } x < 1 \\ 4 - \sqrt{m^2 x^2 + 2mx + 3^{x-1}}, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$$

are limită în punctul $x_0 = 1.$

11. Aplicînd noțiunea de limită laterală și teorema despre limita funcției compuse, să se calculeze:

- a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos(1 - 2 \sin x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\sin^2 x)$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2 - x^4}}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{3^x - \ln x^2 + x^3}$;
- e) $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{x}{2}\right)$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}^3(\pi \cos x)$; g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x}}{\ln(\cos x)}$; h) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$.

§3 Calculul limitelor de funcții

3.1. Proprietăți ale limitelor de funcții

Fie $E \subseteq \mathbb{R}$, funcțiile $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea E . Afirmațiile care urmează exprimă *proprietăți ale limitelor de funcții* sau *condiții suficiente de existență a limitei unei funcții într-un punct* și pot fi deduse folosind definiția limitei unei funcții într-un punct.

1° Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, atunci există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 , astfel încât funcția f este mărginită pe mulțimea $V(x_0) \cap E$.

2° Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, și $a < b$ ($a > b$), atunci există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 , astfel încât $f(x) < g(x)$ (respectiv $f(x) > g(x)$) pentru orice $x \in V(x_0) \cap E \setminus \{x_0\}$.

Consecință. În condițiile proprietății 2°, dacă $g(x) = \lambda$ ($\forall x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$), atunci există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 , astfel încât $f(x) < \lambda$ (respectiv $f(x) > \lambda$) pentru orice $x \in V(x_0) \cap E \setminus \{x_0\}$.

În cazul $\lambda = 0$ se obține $f(x) < 0$ (respectiv $f(x) > 0$) pentru orice $x \in V(x_0) \cap E \setminus \{x_0\}$.

3° Trecerea la limită în inegalități. Dacă

- a) există limitele $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$,
- b) $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in E$ sau pe o vecinătate a lui x_0 din E ,
- atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Consecință. În condițiile proprietății 3°, dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, iar dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

4° Criteriul „cleștelui”. Fie funcțiile $f, g, h: E \rightarrow \mathbb{R}$ verifică condițiile:

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$,
- b) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in E$ sau pe o vecinătate a lui x_0 din E .

Atunci, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$.

Exerciții rezolvate

4 Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sin x);$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x^2 - e^{-x}).$

Rezolvare:

a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea dublă: $-1 \leq -\sin x \leq 1.$

Atunci $x - \sin x \geq x - 1$ (1). Cum $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$, din consecința proprietății 3° și din inegalitatea (1) rezultă că $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sin x) = +\infty.$

b) Deoarece $\sin x^2 - e^{-x} \leq 1 - e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, și $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$, din consecința proprietății 3° rezultă că $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x^2 - e^{-x}) = -\infty.$

3.2. Limite remarcabile

Limitele

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	2 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
--	--

sînt utile la calculul limitelor de funcții și se numesc *limite remarcabile*.

Lemă. Este adevărată inegalitatea dublă $|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$, dacă $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Demonstrație

Fie $0 < x < \frac{\pi}{2}$, un cerc de rază 1 și unghiul la centru AOC avînd măsura în radiani egală cu x (fig. 2.22). Notăm cu B punctul de intersecție a tangentei la cerc în punctul A cu semidreapta OC , iar cu D – piciorul perpendicularării duse din punctul C pe dreapta OA . Evident, aria triunghiului AOC este mai mică decît aria sectorului AOC , care, la rîndul său, este mai mică decît aria triunghiului AOB , adică

$$\frac{1}{2} AO \cdot DC \leq \frac{1}{2} AO^2 \cdot x \leq \frac{1}{2} AO \cdot AB. \quad (2)$$

Cum $AO = 1$, $DC = \sin x$, $AB = \operatorname{tg} x$, inegalitatea dublă (2) devine

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x, \text{ unde } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Dacă $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, atunci $0 < -x < \frac{\pi}{2}$. Deci, (3) implică $\sin(-x) \leq -x \leq \operatorname{tg}(-x)$, adică

$$-\sin x \leq -x \leq -\operatorname{tg} x, \text{ unde } -\frac{\pi}{2} < x < 0. \quad (4)$$

Inegalitățile (3) și (4), în baza definiției valorii absolute, sînt echivalente cu inegalitatea dublă indicată în lemă. ►

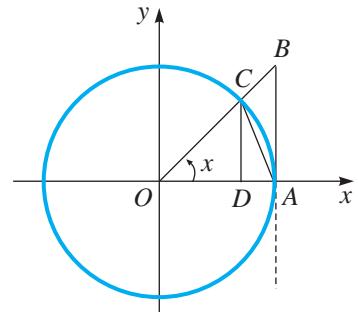


Fig. 2.22

Să demonstrăm limitele remarcabile ① și ②.

1. Dacă $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$, atunci $\sin x \neq 0$ și, cum $x \neq 0$, din inegalitatea dublă stabilită în lemă, prin împărțire la $|\sin x|$, obținem: $1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \left|\frac{1}{\cos x}\right| \Leftrightarrow |\cos x| < \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$. Însă $|\cos x| = \cos x$, iar x și $\sin x$ au același semn pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Prin urmare, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, dacă $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$. Cum $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$, din ultima inegalitate dublă, conform criteriului „cleștelui”, rezultă că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. Pentru limita remarcabilă ② demonstrația este doar schițată. a) Folosind relația $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (a se vedea modulul 1, § 3, secvența 3.3), se poate demonstra că pentru orice sir $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ are loc relația $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. În acest caz, în baza definiției Heine a limitei unei funcții într-un punct, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Cazul b) rezultă din cazul a) și din propoziția ⑥ despre limita funcției compuse, dacă se efectuează în a) substituția $u = \frac{1}{x}$ și $u \rightarrow 0$ cînd $x \rightarrow \infty$.

Exerciții rezolvate

1. Să se arate că:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$;	c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;	e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;	f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$;
g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.		

Rezolvare:

Vom rezolva aceste exerciții aplicînd relațiile respective pentru limite de funcții elementare, limitele remarcabile ①, ② și propoziția ⑥ despre limita funcției compuse.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.

b) Efectuăm schimbarea de variabilă $u = a^x - 1$. Atunci $x = \log_a(1+u)$ și $u \rightarrow 0$ cînd $x \rightarrow 0$. Prin urmare, similar cu limita a), obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\log_a(1+u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \alpha \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \right] =$
 $= \alpha \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha \ln e \cdot 1 = \alpha$, unde $u = \alpha \ln(1+x)$ și $u \rightarrow 0$ cînd $x \rightarrow 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1$.

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \right)^2 = \frac{1}{2}$, unde $u = \frac{x}{2} \rightarrow 0$
cînd $x \rightarrow 0$.

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^{-1} = 1$, unde $u = \arcsin x$ și $u \rightarrow 0$ cînd $x \rightarrow 0$.

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\tg u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\tg u}{u} \right)^{-1} = 1$, unde $u = \arctg x$ și $u \rightarrow 0$ cînd $x \rightarrow 0$.

Observație. Limitele remarcabile ① și ②, precum și toate limitele din exercițiul rezolvat 1, în baza propoziției ⑥ despre limita funcției compuse, rămîn adevărate și în cazul în care se va face schimbarea de variabilă $x = u(t)$, unde $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = 0$ (cu excepția limitei remarcabile ② a), unde $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = \infty$).

2. Să se calculeze limita:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \tg 5x}{\sin 4x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3 \sin^2 2x} - 1}{x^2}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x^2} - 3^{2x^2}}{\cos x - \cos 2x}$.

Rezolvare:

Folosind limita remarcabilă ①, rezultatele exercițiului rezolvat 1 și observația de mai sus, obținem:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \tg 5x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\sin 3x}{3x} - 5 \frac{\tg 5x}{5x}}{4 \frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{3 \cdot 1 - 5 \cdot 1}{4 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3 \sin^2 2x} - 1}{x^2} = 12 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{3 \sin^2 2x} - 1}{3 \sin^2 2x} \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \right] = 12 \ln e \cdot 1^2 = 12$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x^2} - 3^{2x^2}}{\cos x - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^{3x^2} - 1) - (3^{2x^2} - 1)}{(1 - \cos 2x) - (1 - \cos x)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{2^{3x^2} - 1}{3x^2} - 2 \cdot \frac{3^{2x^2} - 1}{2x^2}}{4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} - \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{3 \ln 2 - 2 \ln 3}{4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \ln \frac{8}{9}$$

3. Să se calculeze limita:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{2x^2 + x^3};$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{5+3x} - 2}{x^2 + 2x - 3}.$

Rezolvare:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{2x^2 + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (\cos 3x - 1))}{2x^2 + x^3} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1 + (\cos 3x - 1))}{\cos 3x - 1} \cdot \frac{\cos 3x - 1}{(3x)^2} \cdot \frac{9}{2+x} \right] = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{9}{2+0} = -\frac{9}{4};$$

b) Efectuăm schimbarea de variabilă: $u = x - 1$. Atunci $u \rightarrow 0$ cînd $x \rightarrow 1$ și

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{5+3x} - 2}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{5+3(1+u)} - 2}{(1+u)^2 + 2(1+u) - 3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3u} - 2}{u^2 + 4u} =$$

$$= 2 \lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{\left(1 + \frac{3}{8}u \right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{3}{8}u} \cdot \frac{\frac{3}{8}}{u+4} \right] = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{3}{8}}{4} = \frac{1}{16}.$$

4. Să se calculeze limita:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$

Rezolvare:

Vom aplica limitele remarcabile ② a) și ② b).

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x-1}{2x+3} - 1 \right)^{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+3} \right)^{1-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x+3}{-4}} \right)^{\frac{2x+3}{-4}} \right]^{\frac{-4}{2x+3}(1-x)} = \left[\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^u \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x-1)}{2x+3}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\left(1-\frac{1}{x}\right)}{2+\frac{3}{x}}} = e^2, \end{aligned}$$

unde $u = \frac{2x+3}{-4}$ și $u \rightarrow \infty$ cînd $x \rightarrow \infty$;

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \sin \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{x}{2}}} \right]^{\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}} = \left[\lim_{u \rightarrow 0} \left(1 + u \right)^{\frac{1}{u}} \right]^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = e^{\frac{1}{2} \cdot 1} = \sqrt{e}, \text{ unde} \\ &\text{ } u = \sin \frac{x}{2} \text{ și } u \rightarrow 0 \text{ cînd } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Exerciții propuse

B

1. Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)(2x+1)-3}{(x-3)(x+2)+x^2};$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)(1+3x)-1}{10x+x^2};$

g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)^3-8}{(x-3)^3-1};$

j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x-10}{2x^2-x-6};$

m) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{1+4x}-3};$

p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x};$

s) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{2x};$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+2x)(1+3x)}{(1+x)(1-2x)};$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)(1-3x)-1}{(1-5x)(1+7x)-1};$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3-1-3x}{6x^2+x^4};$

k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1};$

n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[x^3]{x}-1}{\sqrt[x]{x}-1};$

q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 3x}{\sin 4x};$

t) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}};$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9x^2+1}{16x^2+1}};$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2+x)^2-9}{(3+x)^2-16};$

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(x+1)}{(x^3-8)(x^2-4)};$

l) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^3+1};$

o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1-x}-1};$

r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x;$

u) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}.$

2. Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt[3]{1+2x+x^3}-1};$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 2(x-2)}{x-2};$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi+3x)}{\sin(2\pi-6x)};$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 4x)}{\ln(1+\tg 2x)};$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin(3x+\sin x)};$

p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 3x}}{\tg x - \sin 4x};$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(e^{x^2} + \sin^2 x)};$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+4x}-3}{\sqrt[3]{2+3x}-2};$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x+x^2)}{x};$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{3x} + e^{4x} - 3}{\tg x + \sin 2x};$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{\sin^2 x};$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2 x}{\cos 2x - e^{x^2}};$

q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\arctg x^2};$

t) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x \cos 2x}{e^{\sin x^2} - \cos 2x};$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+7x}}{1 + \sqrt[5]{1-2x}};$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2\sin x}{x + 3\sin x};$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{e^{5x} - e^{3x}};$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{e^{6x^2} - 1};$

o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin 3x}}{\sin(\sin(\sin x))};$

r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\arcsin x)}{\sqrt[5]{1-\sin 2x}-1};$

u) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(1-\sin^3 x)}{\cos^4 x}.$

3. Să se aplice proprietățile limitelor de funcții și să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \cos x^2);$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin 2x - \cos 3x);$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - 2^x);$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \sin x)e^x.$

4. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$, dacă:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} + mx+n \right) = 3;$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(mx+n)}{x-1} = 2$, unde $m+n=\pi$.

§4 Cazuri exceptate la operații cu limite de funcții

În § 2 s-a afirmat că anumite operații cu limite de funcții nu au sens. Vom examina mai detaliat doar una dintre aceste operații.

Fie x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ funcții pentru care există limitele finite sau infinite $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ și $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. De exemplu, din definițiile respective ale limitei unei funcții într-un punct se poate stabili că: dacă $a = \infty, b \in \mathbb{R}$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$; dacă $a = +\infty, b = +\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$ etc. Simbolic, aceste propoziții se scriu astfel: $\infty + b = \infty$ ($b \in \mathbb{R}$), $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ și se numesc *forme* sau *cazuri neexceptate (determinate)* ori, simplu, *determinări*, iar despre suma $a + b$ în acest caz se spune că are sens. Tabelul complet al *formelor neexceptate*, care apar la operații cu limite de funcții, este prezentat în secvența 2.1.

Dacă însă $a = +\infty, b = -\infty$ sau $a = -\infty, b = +\infty$, atunci despre limita funcției $f + g$ în punctul x_0 nu se poate afirma nimic concret. Într-adevăr, dacă $x \rightarrow +\infty$, atunci:

- a) $f(x) = x^2 \rightarrow +\infty, g(x) = -x \rightarrow -\infty$ și $f(x) + g(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \rightarrow +\infty$;
- b) $f(x) = x + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty, g(x) = -x \rightarrow -\infty$ și $f(x) + g(x) = \frac{1}{x} \rightarrow 0$;
- c) $f(x) = x + l \rightarrow +\infty, g(x) = -x \rightarrow -\infty$ și $f(x) + g(x) = l \rightarrow l, l \in \mathbb{R}$;
- d) $f(x) = x + \sin x \rightarrow +\infty, g(x) = -x \rightarrow -\infty$ și $f(x) + g(x) = \sin x$ nu are limită.

Așadar, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ depinde de însăși natura funcțiilor f și g și poate fi infinită, zero, orice număr real sau poate chiar să nu existe. În acest caz se spune că limita respectivă reprezintă o *formă* sau *un caz exceptat (nedeterminat)* ori, simplu, *o nedeterminare* de tipul $\infty - \infty$, iar despre suma $a + b$ se spune că este lipsită de sens.

În general, operațiile $a + b, a \cdot b, \frac{a}{b}$ și a^b cu limite de funcții $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ conduc la următoarele şapte forme sau cazuri exceptate:

$$\boxed{\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0}.$$

Nu există o regulă strictă care ar permite eliminarea cazurilor exceptate. Există doar unele recomandări pentru excluderea acestor forme.

I. Cazul exceptat $\frac{0}{0}$. Fie limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, unde $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Se recomandă, dacă este posibil, să se descompună în factori expresiile $f(x)$ și $g(x)$ sau să se amplifice raportul $\frac{f(x)}{g(x)}$ cu expresii conjugate, simplificând apoi cu $x - x_0$, sau să se aplique limita remarcabilă 1 ori limitele din exercițiul rezolvat 1, secvența 3.2.

Exemple

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{3x^2 - 2x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(3x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{3x+1} = \frac{3}{4}.$$

(Simplificarea cu $x-1$ a fost posibilă, deoarece $x \rightarrow 1$, și $x \neq 1$.)

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(2x + x^6))}{4x - x^2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(2x + x^6))}{\sin(2x + x^6)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + x^6)}{4x - x^2} = \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + x^6)}{4x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + x^6)}{2x + x^6} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^6}{4x - x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + x^5)}{x(4 - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + x^5}{4 - x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Similar cu exemplul 1 se calculează limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$, unde P și Q sunt polinoame.

Fie $P, Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinoame nenule.

a) Dacă $P(x_0) = Q(x_0) = 0$, atunci există polinoamele $P_1, Q_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

și $i, j \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $P_1(x_0) \neq 0$, $Q_1(x_0) \neq 0$, $P(x) = (x - x_0)^i P_1(x)$,

$$Q(x) = (x - x_0)^j Q_1(x) \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{j-i}}.$$

b) Dacă $P(x_0) \neq 0$, iar $Q(x_0) = 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^j} = \infty$.

II. Cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$ apare la calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, unde $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$.

Se recomandă, dacă este posibil, să se depisteze la numitorul și numărătorul raportului $\frac{f(x)}{g(x)}$ funcțiile (termenii) care cresc cel mai repede la infinit, numite **funcții dominante**; să se extragă forțat ca factori comuni aceste funcții și să se transforme în mod echivalent expresiile obținute, aplicând, dacă este necesar, limitele remarcabile sau limitele din exercițiul rezolvat 1, secvența 3.2.

Exemplu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{4^{x+1} + 2^{x+2}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left[\left(\frac{2}{3} \right)^x + 3 \right]}{4^{x+1} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^x \right]} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^x + 3}{1 + \left(\frac{1}{2} \right)^x} = \frac{1}{4} \cdot 0 \cdot \frac{0+3}{1+0} = 0,$$

unde funcțiile dominante sunt 3^x și 4^{x+1} .

III. Cazul exceptat $0 \cdot \infty$ apare la calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$, unde $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$.

Se recomandă să se efectueze transformarea echivalentă $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{(f(x))^{-1}}$, $f(x) \neq 0$, sau $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{(g(x))^{-1}}$, $g(x) \neq 0$, pentru a obține unul dintre cazurile exceptate $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$.

Exemplu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{2}{x} \right) &= (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y \cdot \sin 2y}{y^2} = \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \cdot \frac{\sin 2y}{2y} \right) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2, \text{ unde } y = \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ cînd } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

IV. Cazul exceptat $\infty - \infty$ apare la calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$, unde $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ și $a = +\infty$, $b = +\infty$ sau $a = -\infty$, $b = -\infty$.

Se recomandă să se efectueze transformarea echivalentă a expresiei $f(x) - g(x)$ prin aducere la numitor comun sau prin raționalizare cu expresii conjugate, sau prin aplicarea identității $f(x) - g(x) = \frac{(g(x))^{-1} - (f(x))^{-1}}{(f(x) \cdot g(x))^{-1}}$, $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, etc. pentru a obține unul dintre cazurile exceptate $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{2x+1} - \frac{x^2-1}{2x-1} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 4x}{4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{4x^2} = -\frac{1}{2}. \\ 2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}} = 2. \end{aligned}$$

V. Cazurile exceptate 1^∞ , 0^0 , ∞^0 apar la calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$.

Se recomandă:

- în cazul exceptat 1^∞ să se aplice limitele remarcabile privind numărul e ;
- în cazurile exceptate 1^∞ , 0^0 , ∞^0 să se utilizeze identitatea logaritmică fundamentală $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$, $f(x) > 0$, și relația $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)}$ (propoziția ⑤ din § 2), care plasează exponentul $g(x) \cdot \ln f(x)$ în cazul exceptat $0 \cdot \infty$.

Exemple

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^{2x+1} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x+1}{x+3} - 1 \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{-2}} \right]^{\frac{-2(2x+1)}{x+3}} =$
 $= \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2(2x+1)}{x+3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{3}{x}}} = e^{-4}, \text{ unde } y = -\frac{2}{x+3} \rightarrow 0 \text{ cind } x \rightarrow +\infty.$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}} = e^{2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}} = e^{2+0} = e^2.$

În modulul 4 vor fi formulate regulile lui l'Hospital pentru calculul limitelor de funcții în cazurile exceptate $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$. Consecințe ale acestor reguli sunt următoarele limite:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0, a > 0, a \neq 1)$
 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad (\alpha > 0, a > 1)$

Aceste limite sunt utile în cazurile exceptate $\frac{\infty}{\infty}$ și $0 \cdot \infty$.

Observație. Dacă $x \rightarrow +\infty$ și $\alpha > 0, a > 1$, atunci funcțiile logaritmice $\log_a x$, putere x^α și exponentială a^x tind la plus infinit. Din limitele 1 și 2 rezultă că cea mai „lentă” este funcția $\log_a x$, mai „rapidă” este funcția x^α , iar cea mai „rapidă” este funcția a^x .

Această observație se aplică la determinarea funcțiilor dominante în cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$.

Exerciții propuse

B

1. Să se calculeze:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 - x - 2)}{(x^2 + x - 6)^2};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^5 (3x+1)^5}{(2x+6)^{10}};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x} + 3 \sqrt{x}};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 5x + 2}{\sqrt[3]{x+1}};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 4^x}{2^x - 4^x};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 4^x}{2^x - 4^x};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 4^x}{2^x - 4^x};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + x^6)}{\ln(x^4 + x^{10})};$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + x^6)}{\ln(x^4 + x^{10})};$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{\ln(1-x^3+x^6)};$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^{5x})}{\ln(x^{10} + e^{4x})};$
- 12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + e^{5x})}{\ln(x^{10} + e^{4x})};$
- 13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x);$
- 14) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x);$
- 15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x);$
- 16) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right);$
- 17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+2} - \frac{x^2+3}{x-1} \right);$
- 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{4x+3} \right)^x;$

19) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+3} \right)^{5-2x};$

20) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+4x}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}};$

21) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}};$

22) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 5)^{\frac{1}{x-2}};$

23) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2};$

24) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x + 1} - \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} \right);$

25) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}{[(4x)^n + 1]^{\frac{n+1}{2}}}, \quad n \geq 1;$

26) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}, \quad n \geq 1;$

27) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}; \quad 28) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3^{-x} + 2^{3x})}{\ln(e^{-x} + e^{2x})};$

29) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})];$

30) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{6\sin^2 x + \sin x - 2}{4\sin^2 x - 8\sin x + 3}; \quad 31) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \operatorname{tg} x}{2 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 2x}};$

32) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2x}{\cos 5x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}};$

33) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln(x^2 + x^3)}};$

34) $\lim_{x \rightarrow +0} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{\frac{1}{\ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}}; \quad 35) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{\frac{1}{\ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}}.$

2. Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$, dacă $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{4x^2 - x^3} + ax + b) = \frac{1}{3}$.

3. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a\sqrt{x^2 + x} + b\sqrt{4x^2 + x})$ și să se discute după valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x + 1}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ din condițiile

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = 3, \quad \text{apoi să se calculeze } \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} f(x).$$

5. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, & \text{dacă } x < 2 \\ b + \ln(x-1), & \text{dacă } x \geq 2. \end{cases}$ Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să existe limitele $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, iar $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Exerciții și probleme recapitulative

B

1. Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 6x + x^2}{2 + 3x - 2x^2};$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{(1-2x)(3x+4)};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)(1+3x)-2}{9-(3-2x)^2};$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}{(3-2x)^3};$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x}{x+1} - \frac{2x^2 + 5x}{x-2} \right);$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x^3}}{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2}};$

g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{6-10x} - 4}{2x^2 - 3x - 5};$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{5-\sqrt{10x+5}};$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x} - 2}{x-1};$

j) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{5+x}}{\sqrt[3]{1+2x+1}};$

k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7-6x} - \sqrt[5]{16-15x}}{\sqrt[6]{9-8x}-1};$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2x^2 - x + 1});$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2});$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1}).$

2. Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x + \sin 4x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x + 2 \sin x}{3 \sin 2x - \operatorname{tg} x};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \arcsin 6x}{\operatorname{tg}^2(3x)};$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 5x - 3 \operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{arctg} 6x};$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{2^{3x} + 3^{2x} - 2};$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\operatorname{tg} 6x};$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2(2x)};$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos 2x - \cos 3x};$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \sin 3x)}{e^{5x} - e^{3x}};$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 6x)}{\ln(\cos 3x)};$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{x+4};$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \sin 2x} \right)^{\frac{1}{x}};$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2x}{\cos x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x \cdot 3^x}{1+x \cdot 5^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

3. Să se calculeze limitele laterale:

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x}{(x+1)(x-2)};$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{|1-x|}{\sqrt{x^2 - 1}};$

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{2 - 2^{\frac{x}{2-x}}};$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{1 - 2^x};$

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x-2}{\ln(1+x)};$

f) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1}{3 - 3^{\frac{1+|x|}{1-x^2}}}.$

4. Să se determine valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$, astfel încât să existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$:

a) $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + a, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \sqrt{5x+4} + 2a^2, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$

b) $f(x) = \begin{cases} a^2 + 3x + 2, & \text{dacă } x < 0 \\ 5\sqrt{a^2 + x^2} - 2, & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sqrt{3a+1} + ax + a, & \text{dacă } x \leq -1 \\ x^2 - x\sqrt{a+4}, & \text{dacă } x > -1, \end{cases} \quad x_0 = -1;$

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2 x^2 + 1}, & \text{dacă } x < 1 \\ 1 + 2ax, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$

5. Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 + ax + b)}{2x^2 - 3x + 1} = 3$, dacă $a + b = -1$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x + 3}{x - 2} + ax + b \right) = 6$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{ax} - ae^{bx}}{x} = -4$.

6. Secțiunea verticală a reliefului unei localități de munte este dată de funcția $f: \left[-6, \frac{11}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 6x - x^2, & \text{dacă } x \in [-6, -1], \\ 0,1x + 2,1, & \text{dacă } x \in [-1, 1], \\ -0,45x^2 + 2,7x - 0,05, & \text{dacă } x \in \left(1, \frac{11}{2}\right], \end{cases}$$

la scara 1 : 100 m pe fiecare axă de coordinate.

Pe platoul dintre cei doi munți ce corespunde valorilor abscisei $x \in [-1, 1]$ este situat un cătun.

- a) Să se traseze graficul funcției f și să se stabilească abscisele vîrfurilor munților.
- b) Să se determine diferența dintre înălțimile celor două vîrfuri.
- c) Să se afle înălțimea peretelui vertical al muntelui, ce corespunde abscisei $x = -1$.
- d) Să se calculeze unghiul de înclinație a platoului pe care este situat cătunul.
- e) Care este adâncimea minimă a fișinilor din cătun, dacă axa Ox reprezintă nivelul pînzei apelor freatică?

7. Graficul funcției $f: [-10,2; 52] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{200}x^2 - \frac{1}{50}, & \text{dacă } x \in [-10,2; 2] \\ \frac{1}{5000}(x-2)^2 + \frac{1}{1000}, & \text{dacă } x \in (2; 52], \end{cases}$

rezintă relieful subacvatic al unei mări la scara $1 : 10000$ m, astfel încît suprafața mării corespunde liniei orizontale $y = 0,5$.

- a) Să se traseze graficul funcției f și să se determine adâncimea maximă a mării.
- b) Care este lățimea mării, dacă ea corespunde liniei orizontale $y = 0,5$?
- c) Să se determine înălțimea rupturii plăcilor tectonice în punctul de abscisă $x = 2$.

Probă de evaluare

B

*Timp efectiv de lucru:
45 de minute*

În itemii 1 și 2 indicați litera corespunzătoare variantei corecte.

1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} m^2 - \sqrt{4-2x}, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \frac{\sin mx}{x}, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$ $m \in \mathbb{R}$, are limită în $x_0 = 0$, dacă

- A** $m = 2$. **B** $m \in \{-1, 3\}$. **C** $m \in \{-1, 2\}$. **D** $m = -1$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b - \sqrt{ax^2 + bx + 1}) = 4$, $a, b \in \mathbb{R}$, dacă

- A** $a = 0, b = 4$. **B** $a = 1, b \in \mathbb{R}$. **C** $a = 1, b = 8$. **D** $a \in \{0, 1\}, b \in \mathbb{R}$.

3. Fie $l_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{(x^2 - 1)^2}$, $l_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} \right)^2$, $l_3 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)^2}{(x^2 - 3x + 2)^2}$.

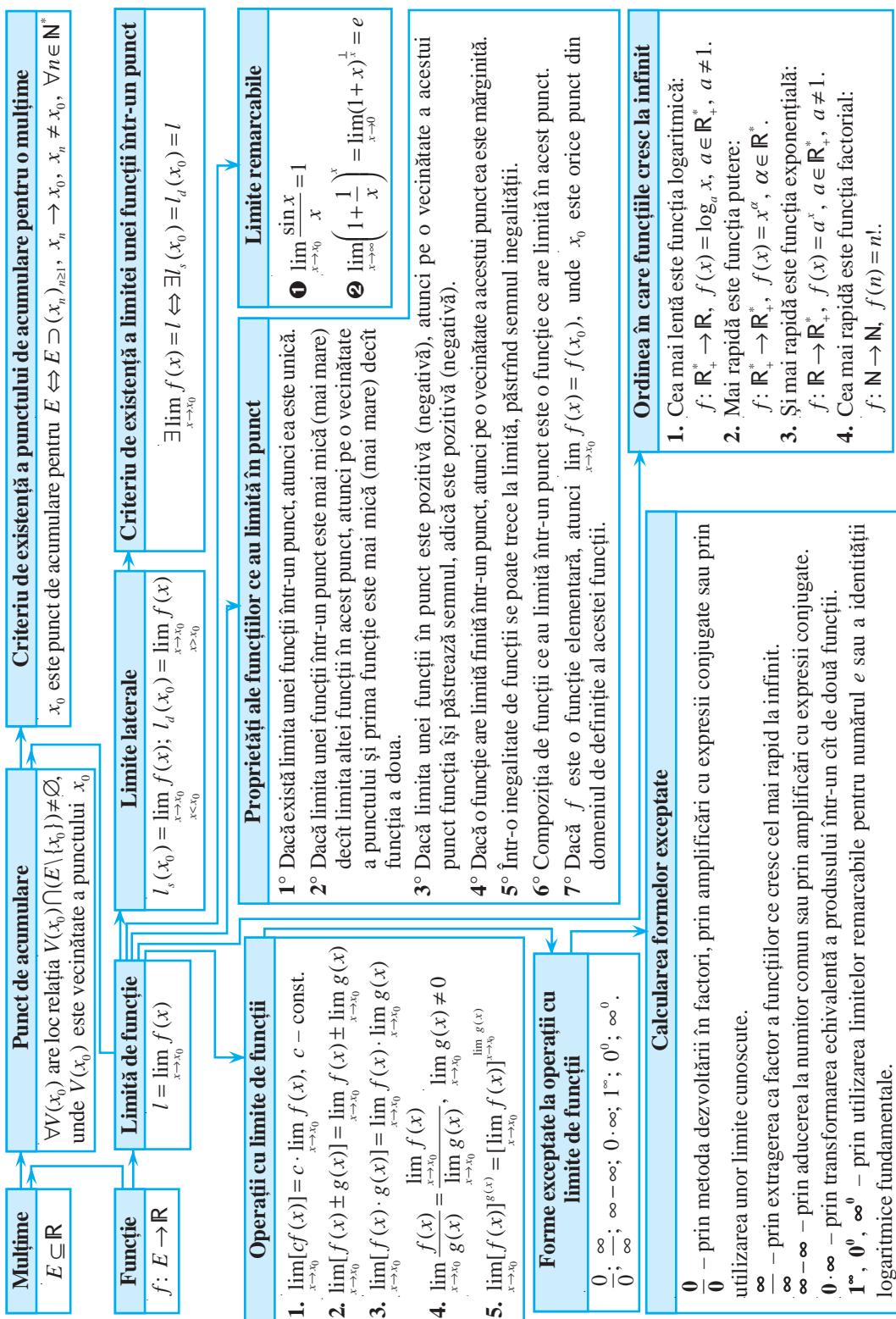
- a) Calculați l_1 și l_3 .
- b) Fără a calcula limita l_2 , stabiliți valoarea $l = l_1 l_2 l_3$.
- c) Utilizând rezultatul punctului b), determinați valoarea limitei l_2 .
- d) Rezolvați inecuația $\log_{l_2}(x - l_1) + \log_{l_2}(l_3 - x) \geq \log_{l_2} 9 - \log_{l_2} l$.

4. Calculați:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{10-3x} - \sqrt{2+x}}{\sqrt[4]{9-4x}-1}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\sin 5x - 3\sin \frac{x}{2}}{\sin 2x - 4\sin \frac{3x}{2} + \sin 6x}$.

Limite de funcții



Modulul

3

Functii continue

Obiective

- ⇒ *studierea continuității, identificarea punctelor de discontinuitate în baza formulei analitice sau pe graficele funcțiilor date;
- ⇒ *aplicarea în diverse contexte a noțiunilor *funcție continuă*, *funcție continuă lateral*, *funcție discontinuă într-un punct* sau *pe o mulțime* la rezolvări de probleme;
- ⇒ *aplicarea operațiilor aritmetice cu funcții continue într-un punct sau pe un interval în diverse contexte;
- ⇒ *utilizarea proprietăților funcțiilor continue pe un interval în diverse contexte.

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$). În modulul 2 am studiat comportarea funcției f în vecinătatea unui punct de acumulare x_0 al mulțimii E . Punctul x_0 nu aparținea în mod necesar mulțimii E , iar în cazul în care x_0 aparținea lui E , valoarea funcției f în x_0 nu era luată în considerație.

În acest modul vom studia comportarea funcției f nu numai în vecinătatea punctului x_0 , dar și în însuși x_0 , și anume: vom compara valoarea funcției f în x_0 cu valorile sale în punctele vecine cu x_0 . Pentru aceasta este necesar ca funcția f să fie definită în punctul x_0 , adică x_0 să aparțină mulțimii E .

§1 Funcții continue într-un punct. Funcții continue pe o mulțime

De noțiunea *limita funcției* este strîns legată o altă noțiune importantă a analizei matematice – *continuitatea funcției*. Această noțiune a fost definită într-o formă riguroasă de către matematicienii B. Bolzano¹ și A. L. Cauchy.

1.1. Noțiunea de continuitate



Bernhard Bolzano

În mod intuitiv, afirmațiile *o curbă este continuă și o curbă nu are întreruperi*, adică poate fi trasată fără a ridica creionul de pe hârtie, sunt echivalente.

Noțiunile *funcție continuă*, *funcție discontinuă* (într-un punct sau pe o mulțime) pot fi înțelese cu ușurință observând graficele unor funcții. Să examinăm cîteva exemple.

¹ Bernhard Bolzano (1781–1848) – filozof, logician și matematician ceh de origine italiană.

Exemple

1. Presupunem că pe axa numerelor se mișcă uniform un mobil care în momentul $t = 0$ se află în origine. Dacă viteza presupusă constantă a mobilului este v , atunci, notînd cu $s(t)$ distanța parcursă de mobil în timpul t , obținem ecuația $s(t) = vt$, $t \geq 0$. Graficul funcției $s: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $s(t) = vt$, este reprezentat în figura 3.1.

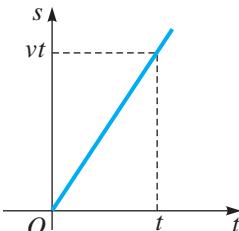


Fig. 3.1

2. Considerăm funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 1, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x < 1 \\ 2, & \text{dacă } x = 1 \\ 1+x, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 1+x, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Graficele acestor funcții sunt reprezentate în figura 3.2.

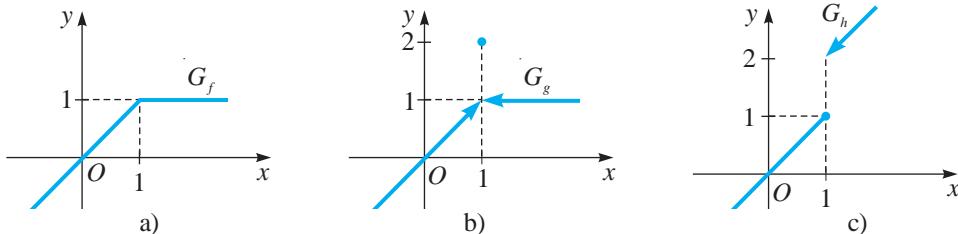


Fig. 3.2

Graficele funcțiilor s (fig. 3.1) și f (fig. 3.2 a)) pot fi trasate printr-o mișcare continuă a creionului, iar graficele funcțiilor g și h (fig. 3.2 b), c)) sunt întrerupte în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

Pentru a pune în evidență deosebirile dintre comportarea funcțiilor f, g și h în punctul $x_0 = 1$, vom compara limitele lor laterale în $x_0 = 1$ cu valorile lor respective în acest punct:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1, \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 1 = 1, \quad f(1) = 1;$$

$$g(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1, \quad g(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 1 = 1, \quad g(1) = 2;$$

$$h(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1, \quad h(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (1+x) = 2, \quad h(1) = 1.$$

Funcțiile f și g în punctul $x_0 = 1$ au limită 1, adică $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ și $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$. Constatăm că $f(1) = 1$, $g(1) = 2$. Graficul funcției g se întrerupe în punctul de abscisă $x_0 = 1$, deoarece $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$, iar $g(1) = 2$. Graficul funcției h de asemenea se întrerupe în punctul de abscisă $x_0 = 1$, deoarece limitele ei laterale în acest punct sunt diferite (funcția h nu are limită în punctul $x_0 = 1$). Astfel deducem că graficul funcției f nu se întrerupe în punctul de abscisă $x_0 = 1$ din două motive:

- 1) există $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$;
- 2) această limită este egală cu valoarea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

În baza acestor considerații, putem formula următoarea

Definiție. Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ și un punct $x_0 \in E$ de acumulare pentru E . Spunem că funcția f este **continuă în punctul** x_0 dacă ea are limită în acest punct și această limită este egală cu valoarea funcției în x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Observație. Dacă x_0 nu este punct de acumulare, adică este punct izolat, considerăm, prin definiție, că funcția este **continuă** într-un astfel de punct.

Tinând seama de această observație, în continuare vom pune problema continuității unei funcții *numai* în punctele de acumulare ale domeniului ei de definiție.

Definiția continuității unei funcții f într-un punct x_0 se bazează pe noțiunea de limită a funcției f în acest punct x_0 . De aceea unele proprietăți ale limitelor de funcții se vor regăsi și în cazul funcțiilor continue.

Utilizând definițiile limitei unei funcții într-un punct, obținem caracterizări ale continuității.

Teorema 1. Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in E$.

1. Funcția f este continuă în punctul $x_0 \Leftrightarrow$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in E$ din $|x - x_0| < \delta$ rezultă că $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. f este continuă în $x_0 \Leftrightarrow$ pentru orice sir $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in E$, din faptul că $x_n \rightarrow x_0$ cînd $n \rightarrow \infty$ rezultă că sirul respectiv $(f(x_n))_{n \geq 1}$ converge la $f(x_0)$, adică $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ cînd $n \rightarrow \infty$.

3. f este continuă în $x_0 \Leftrightarrow$ există limitele laterale (x_0 un punct interior mulțimii E):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) \text{ și } f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Propozițiile 1–3 semnifică existența limitei funcției f în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Dacă funcția f este continuă în punctul $x_0 \in E$, atunci x_0 se numește **punct de continuitate** al funcției f . În cazul cînd funcția f nu este continuă în punctul $x_0 \in E$, ea se numește **discontinuuă în punctul x_0** , iar x_0 se numește **punct de discontinuitate** al funcției f .

Funcția f continuă în orice punct al unei mulțimi $A \subseteq E$ se numește **continuă pe mulțimea A** .

În cazul în care $A = E$, în loc să spunem că f este continuă pe tot domeniul său de definiție, putem spune, mai simplu, că f este o **funcție continuă** (fără a mai menționa pe care mulțime).

Observație. S-a demonstrat că limita funcțiilor elementare în orice punct x_0 din domeniul lor de definiție se calculează înlocuind x cu x_0 direct în funcție, adică $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Astfel, funcțiile elementare (polinomiale, raționale, exponențiale etc.) sunt continue pe orice interval pe care sănătate.

Concluzie. Funcțiile elementare sunt continue în orice punct din domeniul lor de definiție.

Exemple

1. Funcția f (fig. 3.2 a)) este continuă în punctul $x_0 = 1$, iar funcțiile g, h (fig. 3.2 b), c)) sunt discontinue în acest punct.

2. Funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 2x^3 - 1$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = 3^x$, fiind elementare, sunt continue pe \mathbb{R} , iar funcția $\varphi: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sqrt{1 - 3^x}$, este continuă pe $(-\infty, 0]$ din aceleași considerente.

Exercițiu rezolvat

- ↳ Să se studieze continuitatea funcției $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ \frac{x+1}{2}, & \text{dacă } x \in (1, +\infty). \end{cases}$

Rezolvare:

Cînd se cere să studiem continuitatea unei funcții fără a fi precizat un anume punct, subînțelegem că trebuie să studiem problema pe întreg domeniul de definiție.

Funcția f , fiind definită pe $(0, 1]$ prin $f(x) = x^2$ și pe $(1, +\infty)$ prin $f(x) = \frac{x+1}{2}$, este continuă pe aceste intervale (fig. 3.3). Urmează să studiem continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

$$\text{Avem: } f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x+1}{2} = 1 \text{ și } f(1) = 1.$$

Deci, $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$. Conform teoremei 1 (propoziția 3), funcția f este continuă și în punctul $x_0 = 1$.

Răspuns: Funcția f este continuă pe $(0, +\infty)$.

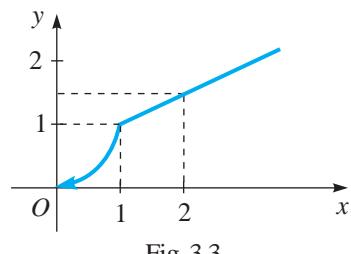


Fig. 3.3

1.2. Puncte de discontinuitate

Punctele de discontinuitate ale unei funcții pot fi de două spețe (categorii).

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) și punctul $x_0 \in E$ (x_0 punct interior multimii E).

Definiție. Punctul de discontinuitate x_0 se numește **punct de discontinuitate de speță întîi** pentru funcția f dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există și sunt finite, însă $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ sau $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.

Exerciții rezolvate

- ↳ 1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ 2, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.

Rezolvare:

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad f(+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2.$$

Cum $f(-0) \neq f(+0)$, rezultă că $x_0 = 0$ este un punct de discontinuitate de speță întîi pentru funcția f .

- ↳ 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \\ 2, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției f pe \mathbb{R} .

Rezolvare:

Funcția f este continuă pe multimea $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, iar în punctul $x_0 = 1$ avem $f(1-0) = f(1+0) = 2$ și $f(1) = 1$ (fig. 3.4).

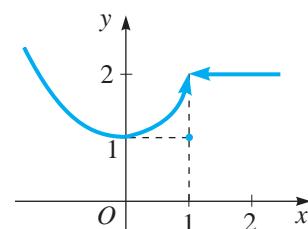


Fig. 3.4

Prin urmare, funcția f nu este continuă în punctul $x_0 = 1$, având în acest punct o discontinuitate de speță întâi.

Definiție. Punctul de discontinuitate x_0 se numește **punct de discontinuitate de speță a doua** pentru funcția f dacă el nu este punct de discontinuitate de speță întâi.

Din definiție rezultă că într-un punct de discontinuitate de speță a doua fie cel puțin o limită laterală este infinită (adică egală cu ∞), fie cel puțin o limită laterală nu există.

Exerciții rezolvate

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției f (fig. 3.5) în punctul $x_0 = 0$.

Rezolvare:

$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$. Prin urmare, $x_0 = 0$ este un punct de discontinuitate de speță a doua pentru funcția f .

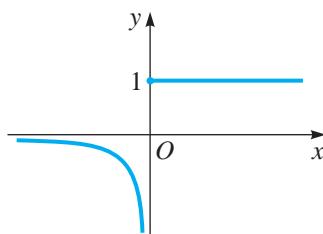


Fig. 3.5

5. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Să se arate că funcția f este continuă în punctul $x_0 = 0$ și orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ este punct de discontinuitate de speță a doua pentru această funcție.

Rezolvare:

Fie $x_0 = 0$ și un sir arbitrar $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \rightarrow 0$ cînd $n \rightarrow \infty$. Atunci $f(x_n) = \begin{cases} x_n, & x_n \in \mathbb{Q} \\ 0, & x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ și, evident, $f(x_n) \rightarrow 0 = f(0)$ cînd $n \rightarrow \infty$. Deci, funcția f este continuă în punctul $x_0 = 0$.

Fie acum un oarecare $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vom arăta că nu există limită la stînga a funcției f în punctul x_0 . Considerăm două siruri, $(x'_n)_{n \geq 1}$, $x'_n \in \mathbb{Q}$, și $(x''_n)_{n \geq 1}$, $x''_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, astfel încît $x'_n \rightarrow x_0 - 0$ și $x''_n \rightarrow x_0 - 0$ cînd $n \rightarrow \infty$. Atunci, conform definiției funcției f , rezultă că $f(x'_n) = x'_n \rightarrow x_0$, iar $f(x''_n) = 0 \rightarrow 0$ cînd $n \rightarrow \infty$. Însă $x_0 \neq 0$. Astfel, am arătat că există două siruri, $(x'_n)_{n \geq 1}$ și $(x''_n)_{n \geq 1}$, care converg la stînga la x_0 , însă sirurile respective, $(f(x'_n))_{n \geq 1}$ și $(f(x''_n))_{n \geq 1}$, converg la limite diferite. Aceasta înseamnă că nu există $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$. Deci, x_0 este un punct de discontinuitate de speță a doua pentru funcția f .

Definiție. Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0 un punct interior mulțimii E . Dacă există limitele laterale finite $f(x_0 - 0)$ și $f(x_0 + 0)$, atunci diferența $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ se numește **saltul funcției** f în punctul x_0 .

De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$, are în punctul $x_0 = 0$ un salt egal cu 2 (fig. 3.6 a)).

Observații. 1. Evident, saltul unei funcții f într-un punct de continuitate x_0 este egal cu zero, deoarece în acest caz $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

2. Saltul unei funcții f poate fi egal cu zero și într-un punct de discontinuitate x_0 , dacă $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.

De exemplu, fie funcția $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [-\pi, 0) \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ \sin x, & \text{dacă } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Aveți $f(-0) = f(+0) = 0$, iar $f(0) = 1$. Prin urmare, funcția f este discontinuă în punctul $x_0 = 0$ și saltul ei este egal cu zero (fig. 3.6 b)).

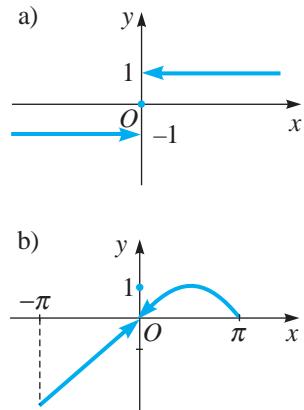


Fig. 3.6

1.3. Continuitatea laterală

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) și $x_0 \in E$ un punct de acumulare pentru mulțimea $E_- = E \cap (-\infty, x_0) = \{x | x \in E, x < x_0\}$.

Definiție. Funcția f se numește **continuă la stînga** în punctul x_0 dacă în x_0 există limita la stînga $f(x_0 - 0)$ și $f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in E$ un punct de acumulare pentru mulțimea $E_+ = E \cap (x_0, +\infty) = \{x | x \in E, x > x_0\}$.

Definiție. Funcția f se numește **continuă la dreapta** în punctul x_0 dacă în x_0 există limita la dreapta $f(x_0 + 0)$ și $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Exemple

1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ -1, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$ este continuă la stînga în punctul $x_0 = 0$, însă nu este continuă la dreapta în acest punct, deoarece $f(+0) = -1$, iar $f(0) = 1$, adică $f(+0) \neq f(0)$.

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x < 0 \\ -1, & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases}$ este continuă la dreapta în punctul $x_0 = 0$, însă nu este continuă la stînga în acest punct, deoarece $f(-0) = 1$, iar $f(0) = -1$, adică $f(-0) \neq f(0)$.

Observații. 1. Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) este continuă în punctul $x_0 \in E$ (x_0 – punct interior mulțimii E) dacă și numai dacă ea este continuă și la stînga, și la dreapta în x_0 (a se compara cu teorema 1, propoziția 3).

2. Dacă $E = [a, b]$, atunci problema continuuității la stînga în punctul a și respectiv la dreapta în punctul b nu are sens. În plus, funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în a (respectiv în b) dacă și numai dacă f este continuă la dreapta în a (respectiv la stînga în b).

Exerciții rezolvate

- 1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x + a \cos x, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ x^2 + b, & \text{dacă } x > 0, \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$.

Să se determine valorile parametrilor reali a și b pentru care funcția f este:

- a) continuă la stînga în punctul $x_0 = 0$;
- b) continuă la dreapta în punctul $x_0 = 0$;
- c) continuă pe \mathbb{R} .

Rezolvare:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + a \cos x) = 1 + a$. În baza definiției, funcția f este continuă la stînga în punctul $x_0 = 0$ dacă și numai dacă $f(-0) = f(0) \Leftrightarrow 1 + a = 1 \Leftrightarrow a = 0$ și $b \in \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + b) = b$. Conform definiției, funcția f este continuă la dreapta în punctul $x_0 = 0$ dacă și numai dacă $f(+0) = f(0) \Leftrightarrow b = 1$ și $a \in \mathbb{R}$.

c) Funcția f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$ pentru orice valori ale parametrilor a și b . În punctul $x_0 = 0$ funcția f este continuă dacă și numai dacă $f(-0) = f(+0) = f(0) \Leftrightarrow a = 0$ și $b = 1$.

Răspuns: a) $a = 0, b \in \mathbb{R}$; b) $a \in \mathbb{R}, b = 1$; c) $a = 0, b = 1$.

- 2.** Să se studieze continuitatea la stînga și la dreapta a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x^2 + 1, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Rezolvare:

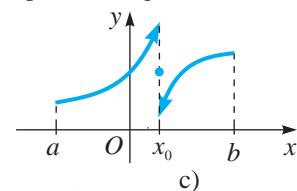
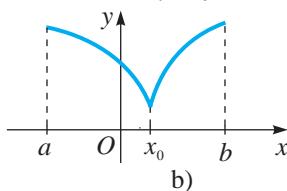
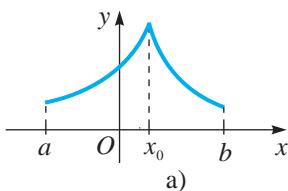
Pentru $x < 1$ și $x > 1$ funcția f , fiind elementară, este continuă. Studiem continuitatea ei în punctul $x = 1$. Calculăm limitele laterale: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 2) = 1 = f(1)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 2 \neq f(1)$. Prin urmare, f este continuă la stînga în punctul $x = 1$ și nu este continuă la dreapta în acest punct.

Exerciții propuse

B

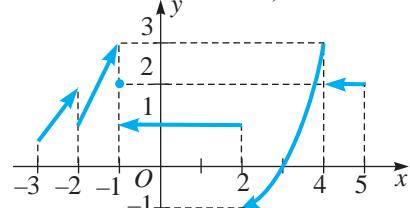
1. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 1$, este continuă în punctele $x_0 = 0$ și $x_1 = 2$.
2. Să se studieze continuitatea funcției f pe domeniul ei de definiție:
 - a) $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + x + \frac{x}{x+3}$;
 - b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2 + 1}$;
 - c) $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+3} + \ln(x+4)$.

3. Să se afle intervalele de continuitate ale funcției $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ reprezentate grafic:



4. Funcția $f: [-3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ este reprezentată grafic în figura alăturată.

- a) Să se indice intervalele pe care funcția f este continuă.
b) Să se calculeze: $f(-1) \cdot f(0)$, $f(2) \cdot f(4)$,
 $f(0) \cdot f(-1)$, $f(0) \cdot f(4,5)$.



5. Aplicând inegalitatea $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, să se demonstreze continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = \sin x$; b) $g(x) = \cos x$; c) $f(x) = \sin 2x$; d) $f(x) = \cos 2x$.

6. Fie funcția $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$. Să se arate că există $\delta > 0$, astfel încât pentru orice x cu $|x-2| < \delta$ are loc $|f(x)-6| < \frac{1}{10}$. Rezultă de aici că funcția f este continuă în punctul $x_0 = 2$?

7. Să se stabilească dacă este continuă pe \mathbb{R} funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = |x+1|$; b) $f(x) = x + |x-1|$;
c) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x > 0 \\ 2,7, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$

8. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x^3 + a^3, & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}$.

Să se determine valorile parametrului a pentru care funcția f este continuă pe \mathbb{R} .

9. Să se afle punctele de discontinuitate și să se calculeze în aceste puncte saltul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \sin(x-1), & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x+1), & \text{dacă } x \leq 0 \\ 2, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

10. Să se studieze continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ x+1, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ 2, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{\sin 2x}{2}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

11. Să se studieze continuitatea și să se traseze graficul funcției:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n}$, dacă $x \in \mathbb{Q}$
0, dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- b) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{2n} + x^{2n+2})$.

12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + be^x, & \text{dacă } x < 1 \\ 2, & \text{dacă } x = 1 \\ 1-ax, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f este continuă:

- a) la stînga în punctul $x_0 = 1$; b) la dreapta în punctul $x_0 = 1$.

§2 Operații cu funcții continue

Vom arăta că operațiile aritmetice asupra funcțiilor continue, precum și compunerea acestora conservă continuitatea.

2.1. Suma, produsul și cîtul de funcții continue

Teorema 2. Dacă $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) sănt funcții continue într-un punct $x_0 \in E$, atunci funcțiile αf ($\alpha \in \mathbb{R}$), $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ sănt continue în x_0 . Dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, atunci și $\frac{f}{g}$ este o funcție continuă în x_0 .

Demonstrație

Vom demonstra continuitatea funcțiilor αf și $f + g$.

Conform ipotezei, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$. Atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha f(x_0) \text{ și}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0), \text{ adică}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f)(x) = (\alpha f)(x_0) \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = (f + g)(x_0).$$

Prin urmare, funcțiile αf și $f + g$ sănt continue în punctul x_0 . ►

Exercițiu. Demonstrați continuitatea funcțiilor $f - g$, $f \cdot g$ și $\frac{f}{g}$.

Această teoremă, stabilită local (într-un singur punct x_0), se poate extinde la nivelul unei mulțimi, în particular, pe tot domeniul de definiție E .

Exemple

1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + \sin x + x$, este continuă pe \mathbb{R} ca sumă a trei funcții elementare continue pe \mathbb{R} .

2. Funcția definită prin $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ este continuă pe mulțimea $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, fiind cîtul a două funcții continue pe această mulțime și avînd numitorul nenul pe E .

3. Funcția definită prin $f(x) = \operatorname{tg} x$ este continuă pe mulțimea $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$, deoarece $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ ($\cos x \neq 0$, $x \in E$) și sinus, cosinus sănt funcții continue pe E .

2.2. Compunerea funcțiilor continue

Teorema 3. Fie funcțiile $g: E_1 \rightarrow E_2$, $f: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$) și compusa lor $h = f \circ g: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă funcția g este continuă în punctul $x_0 \in E_1$ și funcția f este continuă în punctul $y_0 = g(x_0) \in E_2$, atunci funcția h este continuă în x_0 .

Demonstrație

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un sir arbitrar, $x_n \in E_1$ și $x_n \rightarrow x_0$ cind $n \rightarrow \infty$. Vom arăta că $h(x_n) \rightarrow h(x_0)$ cind $n \rightarrow \infty$. Notăm $y_n = g(x_n) \in E_2$. Deoarece funcția g este continuă în punctul x_0 , rezultă că $y_n = g(x_n) \rightarrow g(x_0) = y_0$ cind $n \rightarrow \infty$. Cum funcția f este continuă în punctul y_0 , obținem $f(y_n) \rightarrow f(y_0)$, adică $f(g(x_n)) \rightarrow f(g(x_0))$, sau $h(x_n) \rightarrow h(x_0)$ cind $n \rightarrow \infty$. Astfel, funcția $h = f \circ g$ este continuă în punctul x_0 . ►

Observație. În condițiile teoremei 3 și din definiția continuității rezultă următoarea egalitate: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$, care înseamnă că *limita „comută” cu toate funcțiile continue*.

Exemplu

1. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x} = e^0 = 1$ în baza continuității funcțiilor $f(x) = e^x$ și $g(x) = \sin x$;
2. $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{tg}(2^{\sqrt{x}}) = \operatorname{tg}(\lim_{x \rightarrow \pi} 2^{\sqrt{x}}) = \operatorname{tg}(2^{\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{x}}) = \operatorname{tg} 2^{\sqrt{\pi}}$ în baza continuității funcțiilor a^x , $\operatorname{tg} x$ și x^α în punctele respective.

Corolar. Dacă funcția $g: E_1 \rightarrow E_2$ este continuă pe mulțimea E_1 și funcția $f: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe mulțimea E_2 ($E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$), atunci funcția $h = f \circ g: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe E_1 .

Așadar, prin compunerea a două funcții continue se obține o funcție continuă, iar teoremele 2 și 3 se extind la sume, produse, compunerile ale unui număr finit de funcții continue.

Exercițiu rezolvat

¶ Fie $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue în punctul $x_0 \in E$ (pe mulțimea E). Să se demonstreze că și funcțiile $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sunt continue în x_0 (respectiv continue pe E).

Rezolvare:

Funcția $|f|$, adică $|f|(x) = |f(x)|$, poate fi reprezentată ca o compusă a două funcții continue: $|f| = \varphi \circ f$, unde $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x|$, este funcția modul, care este continuă pe mulțimea E . În baza teoremei 3, funcția $|f|$ este continuă în punctul x_0 (respectiv continuă pe mulțimea E).

Continuitatea celorlalte două funcții rezultă din teorema 2 și din relațiile:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}((f+g)+|f-g|), \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}((f+g)-|f-g|).$$

Exerciții propuse

B

1. Să se studieze continuitatea funcției f și să se traseze graficul ei:

$$\text{a) } f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{dacă } -1 \leq x < 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \\ x-1, & \text{dacă } 1 < x \leq 4; \end{cases} \quad \text{b) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \frac{2}{x-1}, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$$

c) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{dacă } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4} \\ 1, & \text{dacă } x = \frac{\pi}{4} \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, & \text{dacă } \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x]$.

2. Fie f o funcție definită într-o vecinătate a punctului x_0 . Folosind cuantificatorii \exists, \forall , să se formuleze afirmația că funcția f nu este continuă în punctul x_0 .

3. Fie funcția $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

Să se demonstreze că funcția f este continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Să se stabilească dacă există valori ale parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ să fie continuă pe tot domeniul de definiție \mathbb{R} :

a) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{dacă } x \leq 0 \\ ax+b, & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & \text{dacă } x \geq 1; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ a, & \text{dacă } x = -1 \\ b, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$

5. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x^2$; b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = x^3 - x$;
c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = \sin x$; d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x-1)$, $g(x) = \operatorname{sgn}(x+1)$.

1) Să se studieze continuitatea fiecăreia dintre funcțiile $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ și $\frac{f}{g}$ pe domeniul său maxim de definiție.

2) Să se studieze continuitatea funcțiilor compuse $f \circ g$ și $g \circ f$.

6. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x+1$; b) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x-1, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$ $g(x) = x-1$;
c) $f(x) = [x]$, $g(x) = e^x$; d) $f(x) = [x]$, $g(x) = \sin x$;
e) $f(x) = [x]$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$ f) $f(x) = [x]$, $g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Să se determine punctele de discontinuitate ale funcțiilor compuse $f \circ g$ și $g \circ f$.

7. Să se afle parametrul $a \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția f să fie continuă pe domeniul său de definiție:

a) $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ 2ax+1, & \text{dacă } x \in (1, 3); \end{cases}$
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ a+x^2, & \text{dacă } x \in [0, +\infty); \end{cases}$
c) $f: [2, +\infty)$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}, & \text{dacă } x \in [2, 3) \\ ax+\frac{1}{3}, & \text{dacă } x \in [3, +\infty); \end{cases}$

d) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin a(x-1)}{x-1}, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 3x-a, & \text{dacă } x \in [1, 2]; \end{cases}$

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ ax^2 + x + \sin x, & \text{dacă } x \in [0, +\infty). \end{cases}$

8. Există funcții discontinue în orice punct $x \in \mathbb{R}$, astfel încât suma și respectiv produsul lor să fie funcții continue pe \mathbb{R} ? Să se exemplifice.
9. Să se dea exemplu de o funcție discontinuă pe un interval I și de o funcție continuă neidentic nulă pe acest interval, astfel încât produsul lor să fie o funcție continuă pe I .

§3 Proprietăți ale funcțiilor continue

Definiție. O funcție $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) se numește:

- mărginită superior** dacă imaginea sa $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$ este o mulțime mărginită superior, adică există $\bar{M} \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) \leq \bar{M}$, $\forall x \in E$.
- mărginită inferior** dacă imaginea sa $f(E)$ este o mulțime mărginită inferior, adică există $\underline{m} \in \mathbb{R}$, astfel încât $\underline{m} \leq f(x)$, $\forall x \in E$.
- mărginită** dacă imaginea sa $f(E)$ este o mulțime mărginită, adică există \underline{m} , $\bar{M} \in \mathbb{R}$, astfel încât $\underline{m} \leq f(x) \leq \bar{M}$, $\forall x \in E$.

Numerele $M = \sup_{x \in E} f(x)$ și $m = \inf_{x \in E} f(x)$ se numesc respectiv **marginea superioară** și **marginea inferioară** ale funcției f .

3.1. Proprietăți de mărginire

În general, o funcție continuă nu este mărginită. De exemplu, funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, nu este mărginită superior, fiind definită pe un interval nemărginit (fig. 3.7 a)). Dar nici funcția continuă $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{tg} x$, nu este mărginită superior, deși este definită pe un interval mărginit (fig. 3.7 b)).

Este adevărat următorul rezultat fundamental din care rezultă că este esențială condiția ca mulțimea E să fie compactă.

Teorema 4 (Weierstrass de mărginire).

Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci:

- f este mărginită;
- f își atinge marginile, adică există $x_1, x_2 \in [a, b]$, astfel încât $f(x_1) = m$ și $f(x_2) = M$, unde m și M sunt respectiv marginea inferioară și cea superioară ale funcției f :

$$m = \inf_{x \in E} f(x), \quad M = \sup_{x \in E} f(x).$$

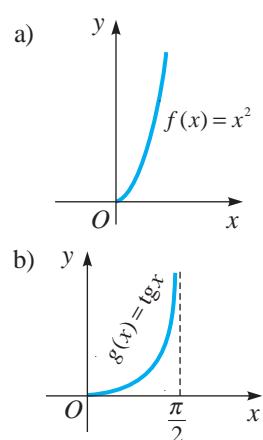


Fig. 3.7

Numerele m și M se numesc **cea mai mică valoare** și respectiv **cea mai mare valoare** ale funcției f pe $[a, b]$.

Exemple

1. Funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, este continuă pe $[0, 1]$.

Evident, $m = 1 = f(0)$ și $M = 2 = f(1)$.

Astfel am verificat direct dacă funcția f își atinge marginile.

Restricția funcției f la intervalul deschis $(0, 1)$ nu își atinge marginile pe acest interval (fig. 3.8 a)).

2. Fie $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Atunci $f([1, +\infty)) = (0, 1]$ și funcția f nu își atinge marginea inferioară $m = 0$ pe intervalul $[1, +\infty)$ (fig. 3.8 b)).

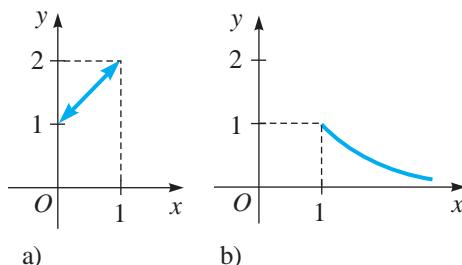


Fig. 3.8

Observații. 1. Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție crescătoare pe intervalul $[a, b]$, atunci $m = f(a)$ și $M = f(b)$, adică marginile ei sănătățe la capetele intervalului $[a, b]$; dacă funcția f este descrescătoare pe intervalul $[a, b]$, atunci $m = f(b)$ și $M = f(a)$ (fără a mai fi nevoie de ipoteza de continuitate a funcției f).

2. Dacă $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție crescătoare pe (a, b) , atunci $m = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $M = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$; dacă f este o funcție descrescătoare pe (a, b) , atunci $m = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$, $M = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

3. În general sănătățe posibile cazurile: $m = \inf_{x \in E} f = -\infty$, $M = \sup_{x \in E} f = +\infty$.

3.2. Proprietatea lui Darboux

Funcțiile continue definite pe un interval au proprietatea că nu pot trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare. Altfel spus, dacă o funcție continuă f ia două valori distincte, atunci f ia toate valorile cuprinse între aceste două valori.

Definiție. Fie I un interval. Se spune că o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ are **proprietatea lui Darboux**¹ pe intervalul I dacă pentru orice puncte α, β din I , $\alpha < \beta$, și orice număr λ cuprins între $f(\alpha)$ și $f(\beta)$, $f(\alpha) \neq f(\beta)$, există cel puțin un punct $c_\lambda \in (\alpha, \beta)$, astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.



Jean Gaston Darboux

¹ Jean Gaston Darboux (1842–1917) – matematician francez.

Geometric, aceasta înseamnă că orice valoare „intermediară” λ între $f(\alpha)$ și $f(\beta)$ de pe axa Oy este valoare a funcției în cel puțin un punct „intermediar” c între α și β de pe axa Ox . În figura 3.9 aceasta se realizează în trei puncte: c_1 , c_2 și c_3 .

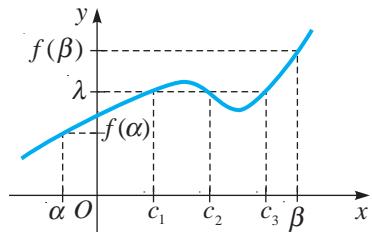


Fig. 3.9

Teorema 5 (teorema I Bolzano–Cauchy despre anularea funcției). Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ și la extremitățile acestui interval funcția f ia valori de semne opuse: $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = 0$.

Demonstratie

Pentru a fixa ideile, să presupunem că $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$ (fig. 3.10). Divizăm $[a, b]$ în două intervale de lungimi egale prin punctul $\frac{a+b}{2}$. Dacă $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, atunci teorema este demonstrată și se poate considera $c = \frac{a+b}{2}$. Dacă $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, atunci la capetele unuia dintre intervalele $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ funcția ia valori de semne opuse. Notând acest interval cu $[a_1, b_1]$, obținem $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$.

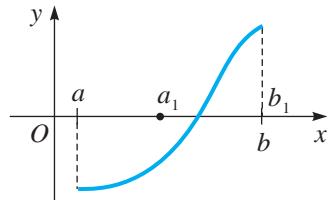


Fig. 3.10

Divizăm $[a_1, b_1]$ în două intervalele de lungimi egale și omitem cazul în care funcția f se anulează în mijlocul acestuia, fiindcă atunci teorema este demonstrată.

Notăm cu $[a_2, b_2]$ acea jumătate a intervalului $[a_1, b_1]$ pentru care $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$.

Repetăm înjumătătirea intervalului și raționamentele anterioare. Dacă după un număr finit de pași găsim un punct în care funcția f se anulează, atunci teorema este demonstrată. Fie nu găsim un astfel de punct la nici un pas. În acest caz obținem un sir descrescător de intervale incluse $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ care verifică relațiile:

$$f(a_n) < 0, f(b_n) > 0 \text{ și } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Sirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt monotone și mărginite

(deoarece $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$, $b \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$) și $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Aplicînd teorema lui Weierstrass (modulul 1, secvența 3.1), obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$, $c \in [a, b]$. Trecînd la limită în inegalitățile $f(a_n) < 0$ și $f(b_n) > 0$ și ținînd cont de continuitatea funcției f în punctul c , obținem că $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$ și $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$. În concluzie, $f(c) = 0$. ►

Teorema 5 poate fi reformulată astfel:

Teorema 5' (teorema I Bolzano–Cauchy despre anularea funcției). Dacă o funcție f este continuă pe un interval I și ia valori de semne opuse în punctele $a, b \in I$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul (a, b) .

Teorema 6 (teorema II Bolzano–Cauchy despre valorile intermediiare). Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acest interval.

Demonstrație

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$, λ – un număr cuprins între valorile $f(\alpha)$ și $f(\beta)$, $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Considerăm funcția $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - \lambda$. Funcția φ este continuă pe I și $\varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) = (f(\alpha) - \lambda)(f(\beta) - \lambda) < 0$. În baza teoremei 5', există cel puțin un punct $c_\lambda \in (\alpha, \beta) \subset I$, astfel încât $\varphi(c_\lambda) = 0$, adică $f(c_\lambda) = \lambda$. ►

Corolar. Fie $I \subset \mathbb{R}$, unde I este un interval, și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe I . Mulțimea $J = f(I)$ este de asemenea un interval.

Observații. 1. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Dacă funcția f își atinge marginile $m = \inf_{x \in I} f(x)$ și $M = \sup_{x \in I} f(x)$, atunci $f(I) = [m, M]$, iar dacă nici una dintre marginile funcției f nu este atinsă, atunci $f(I) = (m, M)$ (aici nu sînt excluse cazurile $m = -\infty$, $M = +\infty$).

De exemplu, pentru funcția $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{1}{1-x}$, obținem $m = -\infty$ și $M = +\infty$. Deci, $f((0, 1)) = (-\infty, +\infty)$.

2. Dacă $I = (a, b)$ este un interval deschis și funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci despre tipul intervalului $J = f(I)$ nu se poate afirma nimic concret. Acest interval J poate fi închis, deschis, semideschis, mărginit sau chiar nemărginit.

De exemplu, pentru funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$, avem $f((0, +\infty)) = (0, 1)$, iar pentru funcția $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$, obținem $f((0, 1)) = \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

3.3. Aplicații ale proprietăților funcțiilor continue la rezolvarea unor ecuații și inecuații

Conform teoremei 5', dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $[a, b] \subset I$ și $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție $c \in (a, b)$. Dacă, în plus, funcția f este strict monotonă pe $[a, b]$, atunci soluția c este unică pe $[a, b]$.

Exemplu

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + 3x$. Să se demonstreze că pe intervalul $[-1, 0]$ ecuația $f(x) = 0$ are exact o soluție.

Rezolvare:

Funcția f este continuă și strict crescătoare pe intervalul $[-1, 0]$ ca sumă de două funcții crescătoare. În plus, $f(-1) \cdot f(0) = \left(\frac{1}{e^2} - 3\right) \cdot 1 < 0$. Prin urmare, există un unic $c \in (-1, 0)$, încât $f(x) = 0$.

Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) este o funcție continuă pe intervalul I și dacă f nu se anulează în nici un punct $x \in I$ (adică ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții în I), atunci funcția f are în mod necesar un semn constant pe I , adică $f(x) > 0$ sau $f(x) < 0$ pe acest interval.

Într-adevăr, în caz contrar ar exista puncte x_1, x_2 din I , $x_1 < x_2$, astfel încât $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, și atunci funcția f s-ar anula într-un punct $c \in (x_1, x_2)$ care aparține intervalului I , ceea ce este în contradicție cu ipoteza.

În general, a stabili semnul unei funcții f pe un interval înseamnă a rezolva inecuația de tipul $f(x) > 0$ (sau $f(x) < 0$) și a indica mulțimile pe care funcția f ia valori pozitive (sau negative).

Semnul unor funcții elementare poate fi stabilit aplicând *metoda intervalelor*. Să presupunem că $x_1 < x_2 < \dots < x_n \dots$ sunt *toate* zerourile unei funcții continue $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, adică $f(x_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ (ele pot fi un număr infinit). Atunci pe fiecare dintre intervalele $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n), \dots$ funcția f are semn constant. Pentru a determina acest semn, este suficient ca pe fiecare dintre aceste intervale să alegem câte un punct și să determinăm semnul funcției f în acest punct.

Exerciții rezolvate

4. Să se arate că orice funcție polinomială de grad impar are cel puțin un zerou pe \mathbb{R} .

Rezolvare:

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \dots + a_{2n+1}$, și presupunem că $a_0 > 0$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, rezultă că există x_1 , astfel încât $f(x_1) < 0$.

Cum $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, rezultă că există $x_2, x_2 > x_1$, astfel încât $f(x_2) > 0$. Așadar, funcția f se anulează între punctele x_1 și x_2 , deci există cel puțin un punct $c \in (x_1, x_2)$, astfel încât $f(c) = 0$.

5. Să se arate că funcția definită prin $f(x) = x^5 + 7x^3 + 7$ are un zerou unic pe $[-1, 0]$.

Rezolvare:

Funcția f este continuă și strict crescătoare pe $[-1, 0]$ ca sumă a două funcții strict crescătoare (definite prin expresiile x^5 și $7x^3 + 7$) pe $[-1, 0]$. Cum $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$, rezultă că $f(-1) \cdot f(0) < 0$. Prin urmare, în intervalul $[-1, 0]$ ecuația $f(x) = 0$ are o soluție și aceasta este unică, deoarece funcția dată este strict crescătoare.

6. Să se arate că ecuația $\ln x + x = 0$ are o soluție unică $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

Rezolvare:

Fie funcția $f: \left[\frac{1}{e}, 1\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + x$. Funcția f , fiind continuă pe $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, are proprietatea lui Darboux pe acest interval și, cum $f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = -1 + \frac{1}{e} < 0$ și

$f(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0$, rezultă că există $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, astfel încât $f(x_0) = 0$. Soluția x_0 este unică, deoarece funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x + x$, este strict crescătoare, ca sumă a două funcții strict crescătoare.

4. Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $(x^2 - 9)\ln x > 0$.

Rezolvare:

Zerourile funcției $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 9)\ln x$, sunt 1 și 3. Funcția f , fiind continuă pe $(0, +\infty)$, are semn constant pe fiecare dintre intervalele $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$. Alegem $\xi_1 = \frac{1}{2} \in (0, 1)$, $\xi_2 = 2 \in (1, 3)$, $\xi_3 = 4 \in (3, +\infty)$ și obținem:

$$f(\xi_1) = \left(\frac{1}{4} - 9\right) \ln \frac{1}{2} > 0, \quad f(\xi_2) = (4 - 9) \ln 2 < 0, \quad f(\xi_3) = (16 - 9) \ln 4 > 0.$$

Răspuns: $S = (0, 1) \cup (3, +\infty)$.

Exerciții propuse

B

1. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe intervalul I . Să se demonstreze că funcțiile

$$f_+: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) > 0 \\ 0, & \text{dacă } f(x) \leq 0, \end{cases} \quad \text{și} \quad f_-: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) < 0 \\ 0, & \text{dacă } f(x) \geq 0, \end{cases}$$

sunt continue pe I . Să se traseze graficele funcțiilor f_+ și f_- , știind că $I = \mathbb{R}$ și:

- a) $f(x) = x$; b) $f(x) = \sin x$; c) $f(x) = 1 + x^2$; d) $f(x) = -e^x$.

2. Să se arate că dacă $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ((a, b) – interval finit sau infinit) este o funcție continuă și există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \beta$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci funcția f este mărginită pe (a, b) .

3. Să se arate că funcția continuă $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - x^2$, este mărginită pe $(0, 2)$, însă nu își atinge marginile pe $(0, 2)$, iar funcția discontinuă $g: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = [x]$, își atinge marginile pe acest interval. Să se traseze graficele acestor funcții.

4. Să se construiască o funcție $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și nemărginită pe (a, b) .

5. Fie funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2}, & \text{dacă } \frac{1}{2} < x \leq 1; \end{cases} \quad 2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{3}, & \text{dacă } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

a) Să se arate că funcția f este discontinuă în punctul $x = \frac{1}{2}$.

b) Să se traseze graficul funcției f .

c) Să se arate că funcția f își atinge marginile și că mulțimea valorilor ei este un interval închis.

6. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ \pi, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0; \end{cases} \quad b) \quad f(x) = \begin{cases} 2, & \text{dacă } x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

este discontinuă și la dreapta, și la stânga în punctul $x = 0$. Să se traseze graficul funcției f .

7. Să se dea exemplu de o funcție $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pentru care mulțimea valorilor ei este:
 a) un interval închis; b) un interval deschis; c) un interval semideschis.
8. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux:
 a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x < 0 \\ 1+x, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$; b) $f(x) = [x] - x$; c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.
9. Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația:
 a) $(|x| - 3)(\ln x + 4) < 0$; b) $(x^2 + 3x - 4)(2^x - 2) < 0$; c) $(x^3 + 2x^2 - 4x + 1)(\lg x - 10) > 0$.
10. Să se studieze semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
 a) $f(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$, unde a, b, c sunt constante și $0 < a < b < c$;
 b) $f(x) = (x-1)(x^2 + 3x - 4)(e^{x+4} - 1)$.
11. Funcția $f: [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x}$, este continuă și are proprietatea că $f(-1) \cdot f(1) < 0$ și totuși ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții. Cum se explică?

Exerciții și probleme recapitulative

B

1. Să se determine valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2}, & \text{dacă } x \geq 1 \\ \alpha x + 3, & \text{dacă } x < 1 \end{cases}$ să fie continuă în punctul $x_0 = 1$.
2. Să se afle punctele de discontinuitate și tipul lor pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
 a) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x-1, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 1; \end{cases}$
 c) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} + x^3}{x^{2n} + 1};$ d) $f(x) = \begin{cases} e^{x^2}, & \text{dacă } x \geq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$
3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ae^x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{b}}{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, știind că f este continuă pe \mathbb{R} .

4. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue și $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Să se demonstreze că $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

a) Să se identifice punctele de discontinuitate ale funcțiilor f și g .

b) Să se determine funcțiile compuse $f \circ g$ și $g \circ f$.

c) Să se studieze continuitatea funcțiilor $f \circ g$ și $g \circ f$.

d) Să se traseze graficele funcțiilor f , g , $f \circ g$ și $g \circ f$.

6. Să se precizeze dacă este mărginită funcția: $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = \frac{x^2 + 5}{2x^2 + 1}$; b) $f(x) = \sin x^2$; c) $f(x) = x + \sin x$; d) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg x$.
7. Funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, are proprietatea că $f(-2) \cdot f(2) < 0$ și totuși ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții. Cum se explică?
8. Să se arate că ecuația $f(x) = 0$ are soluții pe intervalul indicat pentru funcția:
- $f(x) = -x^3 + 8x + 30$, \mathbb{R} ; b) $f(x) = x^4 - 3x + 1$, $[0, 1]$; c) $f(x) = (x-2)\sin\pi x$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
9. Să se rezolve inecuația:
- $x^4 - 9x^2 > 0$; b) $(x^2 - 16)\ln x < 0$; c) $(|x| - 1)(\ln x + 2) > 0$.

Probă de evaluare

B

*Timp efectiv de lucru:
90 de minute*

1. Fie intervalul $I = [a, b]$ și funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Care dintre următoarele cazuri pot avea loc? ③
- f este continuă, mărginită și își atinge marginile.
 - f este continuă și nemărginită.
 - f este discontinuă și își atinge marginile.
 - f este discontinuă și nu-și atinge marginile.
 - f este discontinuă, $f(a) \cdot f(b) < 0$, însă ecuația $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$, nu are soluții.
 - f este continuă, $f(a) \cdot f(b) > 0$ și ecuația $f(x) = 0$ are soluții.
- Argumentați răspunsul apelând la proprietățile funcțiilor continue sau prin exemple.
2. Studiați continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: ③
- $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^2}{2x}, & \text{dacă } x < 0 \\ \sin x, & \text{dacă } x \geq 0; \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{dacă } x \in (-\infty, 1] \\ 2^x - 2, & \text{dacă } x \in [1, 2] \\ x, & \text{dacă } x \in (2, +\infty). \end{cases}$
3. Stabiliți dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită: ②
- $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0, a \in \mathbb{R}; \end{cases}$
 - $f(x) = x \cdot \sin^2 x$.
4. Determinați $a \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + a^2, & \text{dacă } x \in (-\infty, a] \\ 3x - 1, & \text{dacă } x \in (a, +\infty), \end{cases}$ să fie continuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$. ②

Funcții continue

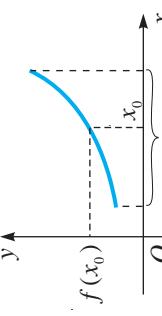
Criterii de continuitate

Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) este continuă în punctul $x_0 \in E$ dacă este adevarată una din **propozitiile**:

1. $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$.
2. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E$ din $|x - x_0| < \delta$ rezultă că $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (Cauchy).
3. Pentru orice sir $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in E$, din $x_n \rightarrow x_0$ rezultă că $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ cind $n \rightarrow \infty$.
4. Fie funcția f monotonă pe un interval I . Funcția f este continuă pe I dacă și numai dacă multimea valorilor ei, $\{f(x)\}$, este un interval.

Definiția continuății

Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) se numește **continuă în punctul $x_0 \in E$** dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.



Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **continuă pe E** dacă ea este continuă în orice punct $x \in E$.

Proprietăți ale funcțiilor continue

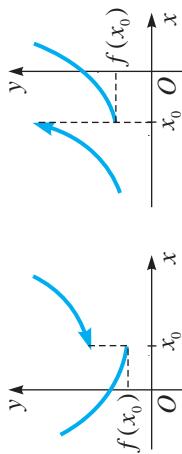
1. Teorema (Weierstrass de mărginire). Orice funcție continuă pe un interval închis este mărginită și își atinge marginile pe acest interval.

Clase de funcții continue

1. Fie f și g funcții continue. Atunci αf ($\alpha \in \mathbb{R}$), $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g'(x) \neq 0$) sunt funcții continue.
2. Componerea a două funcții continue este o funcție continuă.
3. Orice funcție elementară este continuă pe tot domeniul ei de definiție.

Continuitatea la stânga (dreapta)

Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) se numește **continuă la stânga (dreapta) în punctul $x_0 \in E$** dacă există limita ei la stânga (dreapta) în x_0 și $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ ($f(x_0 + 0) = f(x_0)$).



Clasificarea punctelor de discontinuitate

Dacă funcția f nu este continuă în punctul $x_0 \in E$, atunci x_0 se numește **punct de discontinuitate** al acestei funcții.

Punctul de discontinuitate x_0 se numește **punct de discontinuitate de spătuț înfi** pentru funcția f dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există și sunt finite, însă $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ sau $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.

Diferența $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ se numește **salțul funcției în punctul x_0** . Punctul de discontinuitate de spătuț a două dacă cel puțin una dintre limitele laterale $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ este infinită sau nu există.

Obiective

- ⇒ utilizarea corectă în diverse contexte, inclusiv în comunicare, a terminologiei aferente noțiunilor *derivata funcției* și **diferențiala funcției*;
- ⇒ aplicarea definiției derivatei la calculul derivatelor unor funcții elementare; utilizarea în diferite contexte a formulelor obținute;
- ⇒ aplicarea regulilor de derivare și a formulelor derivatelor la rezolvarea problemelor;
- ⇒ *calculul diferențialelor unor funcții elementare și utilizarea formulelor respective în multiple contexte;
- ⇒ utilizarea proprietăților funcțiilor derivabile la rezolvarea problemelor;
- ⇒ conceperea metodelor calculului diferențial ca metode noi de rezolvare a unor probleme teoretice și practice.



I. Newton

Probleme diverse de matematică (studiul variației funcției și trasarea graficului ei, probleme de maxim și minim etc.), de fizică (viteză și accelerată unui mobil, intensitatea curentului electric, densitatea liniară de masă a unei bare metalice etc.), de economie (costurile și beneficiile), probleme de calcul aproximativ, precum și altele, în care prezintă interes rata vreunei schimbări, se rezolvă prin aplicarea directă a noțiunii *derivata funcției*, care este unul dintre concepțele fundamentale ale *analizei matematice*. Istoria atribuie în egală măsură acest concept savanților I. Newton¹ și G.W. Leibniz².

Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor poartă denumirea de *calcul diferențial*. Obiectul calculului diferențial îl constituie funcțiile, iar *derivata* unei funcții reprezintă măsura în care funcția reacționează la schimbarea argumentului.



G. W. Leibniz

¹ Isaac Newton (1642–1727) – fizician, matematician și astronom englez.

² Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) – filozof și matematician german.

§1 Notiunea de derivată

Noțiunea *derivată funcției* este bazată pe noțiunile *creșterea argumentului* și *creșterea funcției*.

1.1. Creșterea argumentului și creșterea funcției

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, unde intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ și x un punct arbitrar dintr-o vecinătate oarecare a punctului x_0 .

Definiție. Diferența $x - x_0$ se numește **creșterea argumentului** x în punctul x_0 .

Se notează: $x - x_0 = \Delta x$.

Definiție. Diferența $f(x) - f(x_0)$ se numește **creșterea funcției** f în punctul x_0 corespunzătoare creșterii argumentului cu Δx .

Se notează: $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$.

Din $x - x_0 = \Delta x$ rezultă că $x = x_0 + \Delta x$.

Atunci $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$.

Exercițiu rezolvat

- ↳ Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. Să se calculeze Δx și Δf , dacă $x_0 = 1$ și:
- $x = 1,5$;
 - $x = 0,9$.

Rezolvare:

a) $\Delta x = x - x_0 = 1,5 - 1 = 0,5$;

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1,5) - f(1) = 2 \cdot 1,5 - 2 \cdot 1 = 1;$$

b) $\Delta x = x - x_0 = 0,9 - 1 = -0,1$;

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = 2 \cdot 0,9 - 2 \cdot 1 = -0,2.$$

Observație. Atât creșterile argumentului, cât și creșterile funcției pot fi pozitive, negative sau nule.

Interpretarea geometrică a creșterilor Δx și $\Delta f(x_0)$ este reprezentată în figura 4.1.

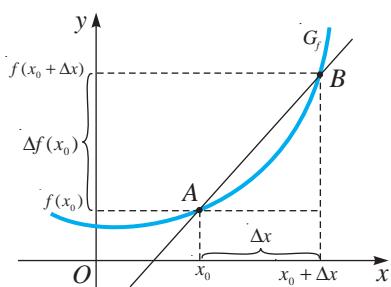


Fig. 4.1

1.2. Probleme care au condus la notiunea de derivată

Două probleme clasice, una de geometrie (despre tangenta la o curbă plană) și alta de fizică (despre viteza instantanee a unui mobil), au condus la notiunea de derivată. Aceste probleme au fost cercetate și rezolvate de G.W. Leibniz și respectiv de I. Newton.

1.2.1. Tangenta la graficul unei funcții (la o curbă plană)

Fie I un interval deschis și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ funcție continuă.

Observație. Funcția este continuă pe un interval dacă graficul acesteia poate fi trasat pe acest interval fără a ridica creionul de pe hârtie.

Graficul $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ al funcției f este o curbă de ecuație $y = f(x)$ (fig. 4.2). Fie $x_0 \in I$, punctele $A(x_0, f(x_0)) \in G_f$, $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \in G_f$ și dreapta AB – o secantă (față de graficul G_f) ce formează cu axa Ox unghiul β . Când pe curba G_f punctul B se apropie de punctul A , adică atunci când $\Delta x \rightarrow 0$, secanta AB ocupă poziții diferite (AB_1, AB_2, \dots, AT).

Spunem că dreapta AT este **tangentă** la graficul funcției f în punctul $A(x_0, f(x_0))$ dacă această dreaptă coincide cu poziția limită (în cazul în care o astfel de poziție există) a secantei AB când $\Delta x \rightarrow 0$ (fig. 4.2).

Tangenta la graficul funcției f în punctul dat $A(x_0, f(x_0))$ poate fi determinată dacă este cunoscută panta ei.

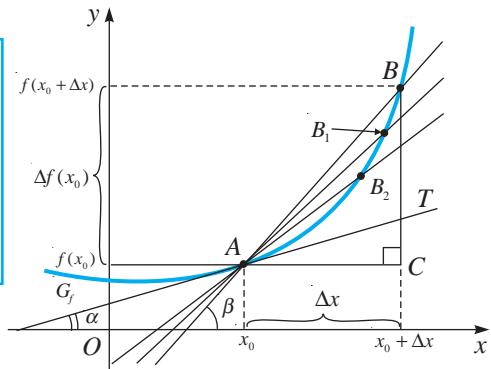


Fig. 4.2

Reamintim!

Panta m (sau **coeficientul unghiular** m) a dreptei de ecuație $y = mx + b$ este egală cu tangenta unghiului pe care îl formează această dreaptă cu direcția pozitivă a axei Ox .

Cum $m(\angle C) = 90^\circ$ (fig. 4.2), din ΔACB obținem coeficientul unghiular $m(\Delta x)$ al secantei AB :

$$m(\Delta x) = \operatorname{tg} \beta(\Delta x) = \frac{BC}{AC} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Trecerea la limită în formula (1), cînd $\Delta x \rightarrow 0$, conduce la studiul limitei:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Valoarea finită a acestei limite (dacă limita există) este coeficientul unghiular al dreptei tangente la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$. Deci,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = m. \quad (2)$$

Așadar, problema existenței tangentei la graficul funcției f într-un punct dat $A(x_0, f(x_0))$ este în corelație cu problema existenței limitei (2).

1.2.2. Viteza instantanee a unui mobil

Fie un mobil se mișcă în sensul pozitiv pe o axă l conform legii $s = s(t)$, unde $s(t)$ este abscisa punctului în care se află mobilul în momentul t . Altfel spus, abscisa este *distanța parcursă (spațiul parcurs)* de mobil în timpul t (fig. 4.3).

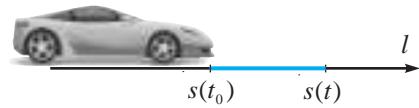


Fig. 4.3

Dacă mișcarea mobilului este uniformă, atunci pentru orice momente t_0, t_1 ($t_1 \neq t_0$) valoarea raportului $\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ este constantă și este egală cu viteza mobilului.

Dacă însă mișcarea mobilului nu este uniformă, viteza lui nu este constantă. Să considerăm un moment t_0 de referință. Pentru intervalul de timp $[t_0, t]$ raportul dintre distanța parcursă și timpul scurs, $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ (3), se numește **viteza medie** a mobilului.

Mișcări uniforme practic nu există, dar pe intervale de timp din ce în ce mai mici, mișcarea mobilului tinde să devină uniformă. În aceste condiții, pentru $t \rightarrow t_0$, $t \neq t_0$, viteza medie respectivă tinde la un număr, care în fizică se numește **viteza instantanee a mobilului în momentul t_0** .

Așadar, definim viteza instantanee $v(t_0)$ a mobilului în momentul t_0 ca fiind limita (dacă aceasta există) la care tinde raportul (3) cînd $t \rightarrow t_0$, adică

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (4)$$

În mod similar, dacă $v(t)$ este viteza instantanee a mobilului în orice moment t , atunci **accelerația instantanee $a(t_0)$ a mobilului în momentul t_0** se definește ca fiind limita (dacă aceasta există) la care tinde raportul $\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$ cînd $t \rightarrow t_0$, adică

$$a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (5)$$

Exemplele prezentate demonstrează importanța studierii limitei raportului dintre creșterea funcției și creșterea argumentului cînd creșterea argumentului tinde la zero, deci a limitei

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (6)$$

1.3. Noțiunea de derivată a unei funcții într-un punct

Să formulăm cîteva definiții importante.

Definiție. Fie intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ și funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se spune că funcția f **are derivată în punctul x_0** dacă există limita $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Această limită se numește **derivata funcției f în punctul x_0** și se notează $f'(x_0)$.

Dacă, în plus, limita este finită, funcția f se numește **derivabilă în punctul x_0** .

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ sau } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (7)$$

Notația $f'(x_0)$ se citește: *ef prim în punctul x_0* .

Observații. 1. În cazul în care limita (7) este infinită sau nu există, funcția f **nu este derivabilă în punctul x_0** .

2. În studiul derivabilității unei funcții într-un punct intervin doar valorile funcției respective într-o vecinătate a acestui punct. Din aceste motive se mai spune că **derivabilitatea funcției**, similar cu limita și *continuitatea funcției, **este o proprietate locală a acesteia**.

3. În continuare vom studia derivata funcției pe un interval deschis I (dacă nu se specifică altceva).

Atenție! 1. Revenind la exemplele din fizică (formulele (4) și (5)), deducem:

- a) $v(t_0) = s'(t_0)$ – viteza instantanee a unui mobil în momentul t_0 este valoarea derivatei distanței (spațiului) în t_0 ;
- b) $a(t_0) = v'(t_0)$ – accelerarea instantanee a unui mobil în momentul t_0 este valoarea derivatei vitezei în t_0 .

2. Formulele $v(t) = s'(t)$ și $a(t) = v'(t)$ exprimă sensul fizic (mecanic) al derivatei: *derivata distanței s în raport cu timpul t este viteza v a mișcării unui mobil, iar derivata vitezei v în raport cu timpul t este accelerarea a a același mobil*.

Definiții. • Se spune că funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) este **derivabilă pe mulțimea M** ($M \subseteq I$) dacă ea este derivabilă în orice punct din M .

• În acest caz, funcția $f': M \rightarrow \mathbb{R}$, care asociază fiecărui punct $x \in M$ numărul real $f'(x)$, se numește **derivata funcției f pe mulțimea M** .

• Operația prin care din f se obține f' se numește **derivare**.

Observație. Derivata funcției f se notează: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx}(f)$, y' , f' , unde $y = f(x)$.

Exercițiu rezolvat

• Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe \mathbb{R} și să se calculeze derivata ei, dacă:

- a) $f(x) = 2x$;
- b) $f(x) = x^2$.

Rezolvare:

a) Funcția f definită prin formula $f(x) = 2x$ este derivabilă în orice punct din \mathbb{R} , deoarece limita $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x_0 + \Delta x) - 2x_0}{\Delta x} = 2$ există pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$. Deci, $f'(x) = (2x)' = 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Funcția f definită prin formula $f(x) = x^2$ este derivabilă în orice punct din \mathbb{R} , deoarece limita $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$ există pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$. Deci, $(x^2)' = 2x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Din definiția derivatei rezultă următorul *algoritm de calcul al derivatei unei funcții* $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ într-un punct și pe o mulțime:

- ① Se ia o creștere arbitrară Δx a argumentului x în punctul x_0 , astfel încât $x_0 + \Delta x \in I$.
- ② Se determină creșterea funcției f în punctul x_0 : $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
- ③ Se alcătuiește raportul $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- ④ Se calculează limita acestui raport: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.
- ⑤ Se trage concluzia referitoare la derivabilitatea funcției f în punctul x_0 .
- ⑥ Se studiază derivabilitatea funcției f pe intervalul I .

Definiție. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Mulțimea punctelor în care funcția f este derivabilă se numește **domeniu de derivabilitate al funcției f** .

Se notează: $D_{f'}$. Evident, $D_{f'} \subseteq I$.

Observație. În continuare, în cazul în care nu este indicat domeniul de definiție al funcției f , se va considera că această funcție este definită pe domeniul ei maxim de definiție.

1.4. Derivabilitate și continuitate

O condiție necesară de existență a derivatei unei funcții într-un punct este formulată în

Teorema 1. Dacă o funcție este derivabilă într-un punct, atunci ea este continuă în acest punct.

Demonstrație

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ un punct în care funcția f este derivabilă, adică există și este finită limita (6). Din relația $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x$, $\Delta x \neq 0$, $x \in D$,

rezultă că $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$.

Deci, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, adică $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, de unde rezultă că funcția f este continuă în x_0 . ►

Reciproca acestei teoreme este falsă. De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, este continuă în punctul $x_0 = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct (fig. 4.4).

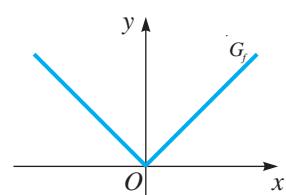


Fig. 4.4

Pentru a demonstra această propoziție, vom calcula limita raportului $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$ în punctul $x_0 = 0$. Calculăm limitele laterale ale funcției f în x_0 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$.

Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x}$, rezultă că limita raportului $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ în punctul $x_0 = 0$ nu există. Deci, funcția f , continuă în $x_0 = 0$, nu este derivabilă în acest punct.

1.5. Derivate laterale

În anumite situații vom studia limitele laterale ale raportului $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Definiție. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I – interval deschis) și $x_0 \in I$. Limita $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (dacă aceasta există), finită sau infinită, se numește **derivata la stînga a funcției f în punctul x_0** și se notează $f'_s(x_0)$.

$$\text{Rețineți: } f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (8)$$

Definiție. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I – interval deschis) și $x_0 \in I$. Limita $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (dacă aceasta există), finită sau infinită, se numește **derivata la dreapta a funcției f în punctul x_0** și se notează $f'_d(x_0)$.

$$\text{Rețineți: } f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (9)$$

Definiție. Funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **derivabilă la stînga** (respectiv **derivabilă la dreapta**) **în punctul $x_0 \in I$** dacă limita (8) (respectiv limita (9)) există și este finită.

Astfel, revenind la exemplul precedent, conchidem că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, este derivabilă la stînga și la dreapta în punctul $x_0 = 0$: $f'_s(0) = -1$, $f'_d(0) = 1$.

Reamintim că unul dintre criteriile de existență a limitei unei funcții într-un punct constă în egalitatea limitelor ei laterale în acest punct. Un criteriu similar există și pentru studiul derivabilității unei funcții într-un punct.

Teorema 2. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul x_0 dacă și numai dacă ea este derivabilă la stînga și la dreapta în x_0 și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$. În acest caz, $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

Demonstrația teoremei 2 rezultă direct din teorema 2, modulul 2, secvența 1.3.

Observație. Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. În punctele a și b putem vorbi doar despre derivata la dreapta, respectiv la stînga, în aceste puncte. Nu are sens problema derivatei la stînga în a și nici a derivatei la dreapta în b .

Exemple

1. Pentru funcția $f(x) = |x|$ avem $f'_s(0) = -1$ și $f'_d(0) = 1$. Cum $f'_s(0) \neq f'_d(0)$, rezultă că funcția f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2|x-1|}$, nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$, deoarece derivatele ei laterale există, dar sunt infinite. (Verificați!)

3. Fie funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$ Există $f'_d(0) = 1$, însă nu există $f'_s(1)$, deoarece f nu este nici continuă în $x = 1$.

Exerciții propuse

A

- Să se calculeze, în punctul $x_0 = \frac{1}{2}$, creșterea argumentului și creșterea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, dacă: a) $x = 2$; b) $x = 0,7$; c) $x = -\sqrt{3}$; d) $x = -4,2$.
- Să se calculeze derivata funcției:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}$;	b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$;
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$;	d) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
- Să se calculeze, aplicînd definiția derivatei, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(10)$, dacă:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0,5x$;	b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$.
---	--
- Să se traseze dreptele ce trec prin punctul $(1, 3)$ și au panta:

a) -1 și $\sqrt{3}$;	b) 1 și $-\sqrt{3}$;	c) 0 și $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
-------------------------	-------------------------	----------------------------------

În fiecare caz, să se determine ce tip de unghi formează aceste drepte cu direcția pozitivă a axei absciselor.

B

- Să se studieze derivabilitatea funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x - 2 $, în $x_0 = 2$;	b) $f(x) = x^2 - 4 $, în $x_0 = -2$, $x_1 = 2$;
c) $f(x) = \sqrt{x-1}$, în $x_0 = 1$.	

6. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ în punctele x_0 și x_1 :
- $f(x) = x + |x|$, $x_0 = 0$, $x_1 = -2$;
 - $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 1$;
 - $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $x_0 = 0,5$, $x_1 = 1$;
 - $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$.
7. Să se studieze, în punctul $x_0 = 0$, continuitatea și derivabilitatea funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = |\sin x|$;
 - $f(x) = |\cos x|$;
 - $f(x) = \frac{2}{|x+1|}$;
 - $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 2x^2 + x, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$
8. Să se afle:
- $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ să fie derivabilă în $x_0 = 0$;
 - $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^n \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ să fie derivabilă în $x_0 = 0$.
9. Să se afle $m, n \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2 \ln x, & \text{dacă } 0 < x \leq e \\ mx + n, & \text{dacă } x > e, \end{cases}$ să fie derivabilă în orice punct $x \in (0, +\infty)$.

§2 Interpretarea geometrică a derivatei

2.1. Ecuată tangentei la graficul funcției

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) o funcție derivabilă în punctul $x_0 \in I$ și G_f graficul ei (fig. 4.5).

Prezentăm, fără demonstrație, două teoreme.

Teorema 3. Dacă funcția f este derivabilă în punctul x_0 , atunci la graficul ei în punctul $(x_0, f(x_0))$ poate fi trasată o tangentă neverticală, având panta egală cu $f'(x_0)$.

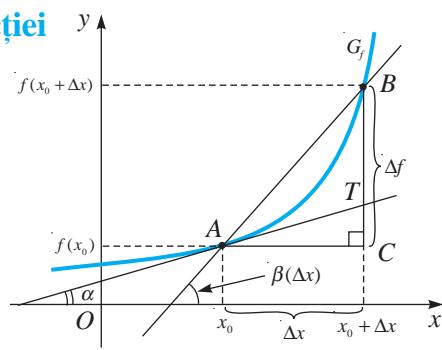


Fig. 4.5

Teorema 4. Dacă la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$ poate fi trasată o tangentă neverticală, atunci funcția f este derivabilă în punctul x_0 și panta m a acestei tangente este egală cu valoarea derivatei funcției f în punctul x_0 ($m = f'(x_0)$).

Sensul geometric al derivatei unei funcții f derivabile într-un punct x_0 rezultă din teoremele 3 și 4: existența derivatei finite a funcției f în punctul x_0 este echivalentă cu existența tangentei nevercicale la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$, astfel încât panta acestei tangente este egală cu $f'(x_0)$.

Rețineți: Tangenta la graficul funcției f derivabile în punctul x_0 este dreapta ce trece prin punctul $(x_0, f(x_0))$, a cărei pantă m este egală cu $f'(x_0)$, adică $m = f'(x_0) = \tan \alpha$.

Să determinăm ecuația tangentei în punctul $(x_0, f(x_0))$ al graficului funcției f derivabile în x_0 . Știind că ecuația dreptei care are coeficientul unghiular $f'(x_0)$ este $y = f'(x_0) \cdot x + b$, să determinăm coeficientul b . Cum tangenta trece prin punctul $(x_0, f(x_0))$, obținem că $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, de unde $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Astfel, tangenta în punctul $(x_0, f(x_0))$ al graficului funcției f derivabile în punctul x_0 este **dreapta de ecuație**

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) . \quad (*)$$

Exerciții rezolvate

1. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, în punctul de abscisă $x_0 = 2$.

Rezolvare:

$f'(x) = (x^2)' = 2x$. Atunci $f'(x_0) = 2 \cdot 2 = 4$, iar $f(x_0) = 2^2 = 4$. Substituind în (*), obținem $y = 4 + 4 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 4$, care este ecuația cerută a tangentei.

Observatie. Dacă $f'(x_0) = \infty$ ($f'(x_0) = +\infty$ sau $f'(x_0) = -\infty$), atunci dreapta tangentă în punctul $(x_0, f(x_0))$ al graficului G_f al funcției f continue în punctul x_0 este paralelă cu axa Oy , adică tangentă are ecuația $x = x_0$.

Dacă $f'(x_0) = +\infty$, atunci în vecinătatea punctului $A(x_0, f(x_0))$ graficul G_f are forma reprezentată în figura 4.6:

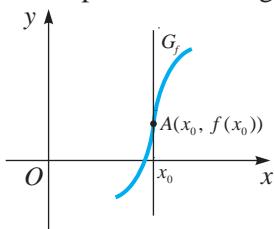


Fig. 4.6

Dacă $f'(x_0) = -\infty$, atunci în vecinătatea punctului $A(x_0, f(x_0))$ graficul G_f are forma reprezentată în figura 4.7:

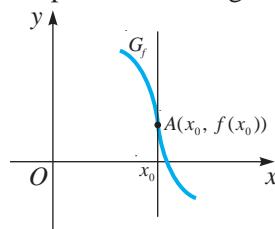


Fig. 4.7

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să se afle măsura unghiului format de tangentă la graficul G_f în punctul de abscisă x_0 și de direcția pozitivă a axei Ox , dacă:

- a) $x_0 = 0$; b) $x_0 = \frac{1}{2}$.

Rezolvare:

Deoarece pantă tangentei este $m = \tan \alpha = f'(x_0)$, unde α este măsura unghiului format de tangenta la graficul G_f în punctul de abscisă x_0 și de direcția pozitivă a axei Ox , obținem:

- a) $\tan \alpha = f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$, deci $\alpha = 0$; b) $\tan \alpha = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, deci $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2.2. Interpretarea geometrică a derivatelor laterale (optional)

Aplicînd derivatele laterale ale unei funcții f într-un punct x_0 și valorile lor în acest punct, putem determina mai exact forma graficului acestei funcții în vecinătatea punctului x_0 . Derivatele laterale ale unei funcții f în punctul x_0 , ca și derivata acesteia, au interpretări geometrice.

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continuă, $x_0 \in I$ (I – interval deschis) și $A(x_0, f(x_0)) \in G_f$. Vom examina unele situații generale referitoare la derivatele laterale și la derivata funcției f continuă în punctul $x_0 \in I$.

I. Fie $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$ și $f'_s(x_0), f'_d(x_0), f'(x_0) \in \mathbb{R}$. În acest caz, funcția f este derivabilă în x_0 și graficul G_f admite în punctul $A(x_0, f(x_0))$ tangenta de ecuație $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

II. a) Fie $f'_s(x_0) = -\infty$, $f'_d(x_0) = +\infty$. Atunci graficul G_f admite în punctul $A(x_0, f(x_0))$ două semitangente care formează cu axa Ox unghiuri de $-\frac{\pi}{2}$ (la stînga) și $\frac{\pi}{2}$ (la dreapta), și $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in V(x_0)$ (fig. 4.8 a)).

b) Fie $f'_s(x_0) = +\infty$, $f'_d(x_0) = -\infty$. Atunci graficul G_f admite în punctul $A(x_0, f(x_0))$ două semitangente, care formează cu axa Ox unghiuri de $\frac{\pi}{2}$ (la stînga) și $-\frac{\pi}{2}$ (la dreapta), și $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in V(x_0)$ (fig. 4.8 b)).

În cazul în care derivatele laterale $f'_s(x_0)$, $f'_d(x_0)$ sunt infinite și $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$, punctul $A(x_0, f(x_0))$ este numit **punct de întoarcere** pentru graficul G_f (fig. 4.8).

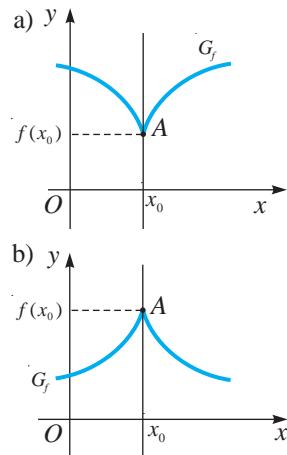


Fig. 4.8

III. a) Fie $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = +\infty$. În acest caz, graficul G_f admite în punctul $A(x_0, f(x_0))$ tangenta de ecuație $x = x_0$ (fig. 4.6);

b) Fie $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = -\infty$. În acest caz, graficul G_f admite în punctul $A(x_0, f(x_0))$ tangenta de ecuație $x = x_0$ (fig. 4.7).

IV. Fie $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ și cel puțin una dintre aceste derivate laterale este finită. Atunci graficul G_f admite în punctul $A(x_0, f(x_0))$ două semitangente (fig. 4.9):

$$\text{a)} \begin{cases} f'_s(x_0) \in \mathbb{R} \\ f'_d(x_0) = -\infty \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} f'_s(x_0) = +\infty \\ f'_d(x_0) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} f'_s(x_0) \in \mathbb{R} \\ f'_d(x_0) \in \mathbb{R} \\ f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0) \end{cases}$$

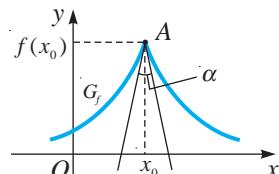
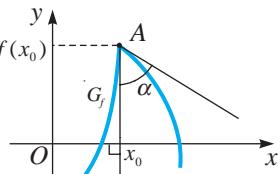
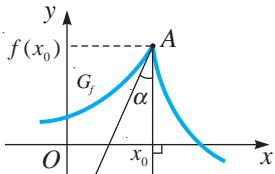


Fig. 4.9

În cazul în care $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ și cel puțin una dintre derivatele laterale este finită, punctul $A(x_0, f(x_0))$ este numit **punct unghiular** pentru graficul G_f (fig. 4.9).

Observație. Cele două semitangente, la stînga și la dreapta, într-un punct de întoarcere pentru graficul funcției f formează un unghi nul (fig. 4.8), iar într-un punct unghiular – un unghi $\alpha \in (0, \pi)$ (fig. 4.9).

Exercițiu. Cercetați și reprezentați geometric celelalte situații posibile pentru derivatele laterale ale funcției f într-un punct x_0 .

Exerciții rezolvate

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x-1|}$. Să se determine dacă punctul de abscisă $x_0 = 1$ este un punct de întoarcere sau un punct unghiular pentru graficul funcției f .

Rezolvare:

$$\text{Cum } f'_s(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{-(x-1)} - 0}{x-1} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{-(x-1)}}{(\sqrt{-(x-1)})^2} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{-(x-1)}} = -\infty \text{ și}$$

$$f'_d(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty, \text{ rezultă că punctul de abscisă } x_0 = 1 \text{ este un punct de întoarcere pentru graficul } G_f.$$

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2\sin x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x^3, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$ Să se determine dacă punctul de abscisă $x_0 = 0$ este un punct de întoarcere sau un punct unghiular pentru graficul G_f și să se scrie ecuațiile semitangentelor la acest grafic în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

Rezolvare:

$$f'_s(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sin x - 0}{x - 0} = 2, \quad f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0.$$

Deoarece $f'_s(0) \neq f'_d(0)$, $f'_s(0), f'_d(0) \in \mathbb{R}$, rezultă că punctul de abscisă $x_0 = 0$ este un punct unghiular pentru graficul G_f .

Tinând cont de faptul că $f'_s(0) = 2$ și $f'_d(0) = 0$ sînt pantele semitangentelor respective, obținem (fig. 4.10):

- 1) $y = f(0) + f'_s(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 0 + 2(x-0);$
deci ecuația semitangentei la stînga, în x_0 , este $y = 2x$, unde $x \in (-\infty, 0]$;
- 2) $y = f(0) + f'_d(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 0 + 0 \cdot (x-0);$
deci ecuația semitangentei la dreapta, în x_0 , este $y = 0$, unde $x \in [0, +\infty)$.

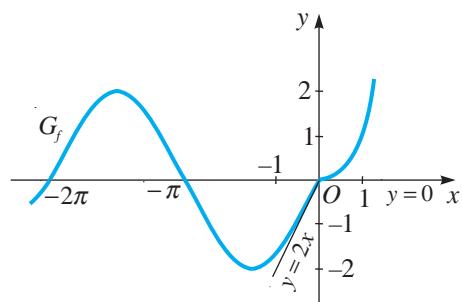
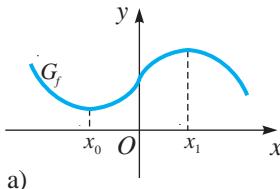


Fig. 4.10

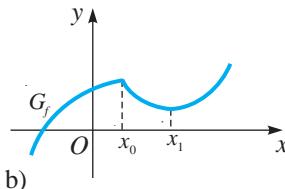
Exerciții propuse

A

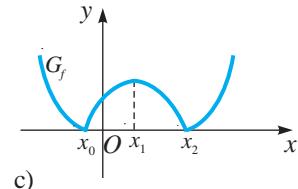
1. Să se determine, utilizând interpretarea geometrică a derivatei, dacă funcția f este derivabilă în punctele de abscise indicate:



a)



b)



c)

2. Să se traseze graficul unei funcții care nu este derivabilă în punctele $x_0 = 3$ și $x_1 = 5$.
3. Să se scrie, aplicând definiția derivatei sau formula respectivă, ecuația tangentei la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în punctul de abscisă x_0 :
- a) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = 2x^2 - 1$, $x_0 = 0$; c) $f(x) = 2 - x^2$, $x_0 = -2$.
4. Să se afle măsura unghiului format de tangentă la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0 și de direcția pozitivă a axei Ox :
- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$, $x_0 = 1$.
5. Să se traseze graficul unei funcții, astfel încât tangenta la acest grafic în punctul de abscisă $x_0 = -1$ să fie dreapta de ecuație: a) $y = 0$; b) $y = 2$.

B

6. Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctele specificate și să se interpreteze geometric rezultatul obținut:
- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 9|$, $x_0 = -3$, $x_1 = 3$;
- b) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |\lg x - 1|$, $x_0 = 10$.
7. Aplicând definiția derivatei, să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției:
- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$, în punctul de abscisă: 1) $x_0 = -0,5$, 2) $x_0 = 2$, 3) $x_0 = -5$;
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, în punctul de abscisă: 1) $x_0 = \frac{\pi}{4}$, 2) $x_0 = \frac{\pi}{3}$, 3) $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.
8. a) Să se determine pentru fiecare dintre funcțiile f , g , $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- $$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 2x^2 - x, & \text{dacă } x < 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{dacă } x \geq 0 \\ x^2, & \text{dacă } x < 0, \end{cases} \quad h(x) = |x^2 - 9|;$$
- 1) mulțimea punctelor pe care funcția este continuă;
- 2) mulțimea punctelor pe care funcția este derivabilă.
- b) Să se schițeze graficele acestor funcții.
9. Utilizând definiția derivatei, să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0 și să se afle măsura unghiului format de această tangentă și de direcția pozitivă a axei Ox :
- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - x^2$: 1) $x_0 = 0$, 2) $x_0 = 1$;
- b) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{x} + 1$: 1) $x_0 = -3$, 2) $x_0 = 1$.

10. Să se afle coeficienții $b, c \in \mathbb{R}$, știind că în punctul de coordonate $(-1, -2)$ parabola $f(x) = x^2 + bx + c$ are ca tangentă dreapta de ecuație $y = 2x$.
11. Să se dea exemple de funcții derivabile pe un interval:
 a) cu excepția unui punct; b) cu excepția a două puncte.

§3 Derivatele unor funcții elementare

Exercițiu. Fie $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\sqrt{x}} \cdot \lg 5x$. Să se calculeze derivata funcției f .

Pentru a calcula derivata funcției f , precum și deriveatele altor funcții, este util să fie cunoscute formulele de calcul al derivatelor funcțiilor elementare.

3.1. Funcția constantă

Teorema 5. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație

Fie x_0 un punct arbitrar din \mathbb{R} . Avem $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$.

Cum x_0 a fost luat arbitrar, rezultă că funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ►

Rețineți: $c' = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (1)

Exemplu

Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2014$, obținem $(2014)' = 0$.

Observație. A se face distincție între numerele $f'(x_0)$ și $(f(x_0))'$, ultimul fiind 0 ca derivata unei funcții constante.

3.2. Funcția identică

Teorema 6. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație

Fie x_0 un punct arbitrar din \mathbb{R} . Avem $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = 1$.

Cum x_0 a fost luat arbitrar, rezultă că funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ►

Rețineți: $x' = 1$. (2)

3.3. Funcția putere cu exponent real

Teorema 7. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Funcția f este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

$$\text{Rețineți: } (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \forall x \in (0, +\infty). \quad (3)$$

$$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha \geq 1, \quad \forall x \in [0, +\infty). \quad (3')$$

Observații. 1. Pentru $\alpha \geq 1$, funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$, este derivabilă și în $x_0 = 0$.

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = nx^{n-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Aplicând formula (3), obținem:

$$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

$$4. (\sqrt[2n+1]{x})' = \frac{1}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

5. Funcția definită prin formula $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$ (deoarece derivatele laterale în punctul 0 sunt infinite).

Exercițiu rezolvat

4. Să se calculeze:

a) $(x^{-\sqrt{2}})'$; b) $(\sqrt{x})'$; c) $(\sqrt[3]{x})'$.

Rezolvare:

a) $(x^{-\sqrt{2}})' = -\sqrt{2}x^{-\sqrt{2}-1};$

b) $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \forall x \in (0, +\infty);$

c) $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}, \quad \forall x \in (0, +\infty).$

Relația $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ are loc și pentru orice $x \in (-\infty, 0)$.

$$\text{Rețineți: } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \forall x \in (0, +\infty). \quad (4)$$

Pentru funcția radicală $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, obținem:

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad \forall x \in D \setminus \{0\}. \quad (5)$$

3.4. Funcția sinus

Teorema 8. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$. Funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație

$$\text{Fie } x_0 \text{ un punct arbitrar din } \mathbb{R}. \text{ Avem } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x_0.$$

Cum x_0 a fost luat arbitrar, rezultă că funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ►

Rețineți: $(\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(6)

3.5. Funcția cosinus

Teorema 9. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$. Funcția cosinus este derivabilă pe \mathbb{R} și $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Rețineți: $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(7)

Exercițiu. Demonstrați teorema 9.

3.6. Funcția exponentială

Teorema 10. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} și $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Rețineți: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(8)

Consecință. Aplicând formula (8), obținem $(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Rețineți: $(e^x)' = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(8')

De exemplu: a) $(2^x)' = 2^x \ln 2$; b) $((0,3)^x)' = (0,3)^x \ln 0,3$.

3.7. Funcția logaritmică

Teorema 11. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Funcția f este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Rețineți: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$. (9)

Exercițiu. Demonstrați teorema 11.

Teorema 12. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Funcția f este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Rețineți: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\forall x \in (0, +\infty)$. (10)

Exercițiu. Demonstrați teorema 12.

Indicație. Se va ține cont de definiția derivatei, de formula $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ și de formula (9).

De exemplu: a) $(\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$; b) $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$.

Exerciții propuse

A

1. Să se calculeze derivata funcției f și să se determine domeniul de derivabilitate D_f :

- | | |
|---|--|
| a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^8$; | b) $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-7}$; |
| c) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x}$; | d) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = 3^x$; |
| e) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; | f) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x$; |
| g) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$; | h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x}$. |

2. Să se calculeze valoarea derivatei funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- | | | |
|--|---|-----------------------------------|
| a) $f(x) = \log_7 x$, în $x_0 = 7$; | b) $f(x) = \lg x$, în $x_0 = \frac{1}{10}$; | c) $f(x) = x^2$, în $x_0 = 60$; |
| d) $f(x) = \sqrt{x}$, în $x_0 = 49$; | e) $f(x) = 2^x$, în $x_0 = 5$; | f) $f(x) = 25$, în $x_0 = -64$. |

3. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ în punctul de abscisă x_0 :

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------|
| a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$; | b) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 0$; |
| c) $f(x) = \log_8 x$, $x_0 = 2$; | d) $f(x) = x^5$, $x_0 = -1$. |

B

4. Să se calculeze derivata funcției f și să se determine domeniul de derivabilitate D_f :

- | | |
|--|--|
| a) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x}$; | b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}$. |
|--|--|

5. Să se calculeze derivata funcției f și să se determine domeniul de derivabilitate D_f , dacă $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- | | | | |
|---------------------------|--------------------------|-------------------------------|-----------------------|
| a) $f(x) = \sqrt[7]{x}$; | b) $f(x) = \sqrt{ x }$; | c) $f(x) = \log_{0,4}(x^2)$; | d) $f(x) = 2^{ x }$. |
|---------------------------|--------------------------|-------------------------------|-----------------------|

6. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = |\cos x|$, în $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
 - $f(x) = |2x|$, în $x_0 = 0$;
 - $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ -2x, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$ în $x_0 = 0$.
7. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ în punctul de abscisă x_0 :
- $f(x) = 7x^2$, $x_0 = -3$;
 - $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;
 - $f(x) = \log_{27}(x^3)$, $x_0 = 27$;
 - $f(x) = 2,5^x$, $x_0 = 1$.
8. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} mx + n, & \text{dacă } x < 0 \\ \sin x, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$ Să se determine valorile parametrilor reali m și n , astfel încât funcția f să fie derivabilă în punctul $x_0 = 0$.
9. Să se formuleze și să se rezolve exercițiile asemănătoare cu ex. 6, 7, 8.

§4 Operații cu funcții derivabile

4.1. Derivata sumei, a produsului și a cîtului

Exercițiu. Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $g(x) = e^x$, $c \in \mathbb{R}$. Să se calculeze:

- $(f + g)'$;
- $(c \cdot f)'$;
- $(f - g)'$;
- $(f \cdot g)'$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)'$;
- $((f \circ g))'$.

Pentru a rezolva acest exercițiu, trebuie să cunoaștem regulile de calcul al derivatelor.

Teorema 13. Dacă funcțiile $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) sunt derivabile în punctul $x_0 \in I$, atunci funcția $f + g$ este derivabilă în x_0 și

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Demonstrație

$$\begin{aligned} \text{Avem } (f + g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x_0 + \Delta x) - (f + g)(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Corolar. Dacă funcțiile f și g sunt derivabile pe intervalul I , atunci funcția $f + g$ este derivabilă pe I și $(f + g)' = f' + g'$. (1)

Exemplu

Pentru funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + g(x) = x^3 + e^x$, conform formulei (1), obținem:

$$(x^3 + e^x)' = (x^3)' + (e^x)' = 3x^2 + e^x.$$

Observație. Aplicând metoda inducției matematice, se poate arăta că suma $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ a n funcții derivabile pe intervalul I este o funcție derivabilă pe I și

$$\left(\sum_{k=1}^n f_k\right)' = \sum_{k=1}^n f'_k. \quad (1')$$

Exercițiu. Deduceți formula (1').

Teorema 14. Dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ și $c \in \mathbb{R}$, atunci funcția $c \cdot f$ este derivabilă în x_0 și $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.

Exercițiu. Demonstrați teorema 14.

Corolare. 1. Dacă funcția f este derivabilă pe intervalul I și $c \in \mathbb{R}$, atunci funcția $c \cdot f$ este derivabilă pe I și $(c \cdot f)' = c \cdot f'$. (2)

Exemplu

Pentru funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{3} \cdot e^x$, obținem $(\sqrt{3} \cdot e^x)' = \sqrt{3} \cdot (e^x)' = \sqrt{3}e^x$.

2. Pentru $c = -1$ avem $(-f)' = -f'$.

3. Dacă funcțiile f, g sunt derivabile pe intervalul I , atunci funcția $f - g$ este derivabilă pe I și $(f - g)' = f' - g'$. (3)

Exemplu

Pentru funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 - e^x$, obținem:

$$(x^3 - e^x)' = (x^3)' - (e^x)' = 3x^2 - e^x.$$

Teorema 15. Dacă funcțiile $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) sunt derivabile în punctul $x_0 \in I$, atunci funcția $f \cdot g: I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Demonstrație

Fie $x_0 \in I$. Funcția g , fiind derivabilă în x_0 , este și continuă în x_0 , adică $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.

$$\begin{aligned} \text{Atunci } (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0 + \Delta x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) = \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Corolar. Dacă funcțiile f, g sunt derivabile pe intervalul I , atunci funcția $f \cdot g$ este derivabilă pe I și

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \quad (4)$$

Exemplu

Pentru funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3 \cdot e^x$, obținem:

$$(x^3 \cdot e^x)' = (x^3)' \cdot e^x + x^3 \cdot (e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x).$$

Observație. Aplicând metoda inducției matematice, se poate arăta că produsul $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$ a n funcții derivabile pe intervalul I este o funcție derivabilă pe I și

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \dots \cdot f_n + \dots + f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n'.$$

Teorema 16. Dacă funcțiile $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) sunt derivabile în punctul $x_0 \in I$ și $g(x_0) \neq 0$, atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 și

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Demonstrație

Cum funcția g este continuă și $g(x_0) \neq 0$, rezultă că există o vecinătate $V(x_0)$ în care $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V(x_0)$. Considerăm Δx , astfel încât $x_0 + \Delta x \in V(x_0)$. Atunci,

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0 + \Delta x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)g(x_0)\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \cdot (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

$(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0)$, deoarece funcția g este continuă în x_0). ►

Corolar 1. Dacă funcțiile f, g sunt derivabile pe intervalul I și $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă pe I și

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}. \quad (5)$$

2. Pentru $f = 1$, aplicând formula (5), obținem:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}. \quad (6)$$

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze derivata funcției $h: D \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x^3}{e^x}$.

Rezolvare:

$$h'(x) = \left(\frac{x^3}{e^x} \right)' = \frac{(x^3)' \cdot e^x - x^3 \cdot (e^x)'}{e^{2x}} = \frac{3x^2 e^x - x^3 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x^2 e^x (3 - x)}{e^{2x}} = \frac{x^2 (3 - x)}{e^x}.$$

4.2. Derivata funcțiilor tangentă, cotangentă

Teorema 17. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ și $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Demonstrație

$$\begin{aligned} f'(x) = (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Rețineți: $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. (7)

Teorema 18. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ și $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Rețineți: $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. (8)

Exercițiu. Demonstrați teorema 18.

4.3. Derivarea funcției compuse

Teorema 19. Fie I_1, I_2 intervale și funcțiile $f: I_1 \rightarrow I_2$, $g: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă funcția f este derivabilă în $x_0 \in I_1$, iar funcția g este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0) \in I_2$, atunci funcția compusă $h = g \circ f: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in I_1$ și $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Reținem regula de derivare a funcției compuse:

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x), \quad \forall x \in I. \quad (9)$$

Corolar. Dacă funcțiile $f: I_1 \rightarrow I_2$, $g: I_2 \rightarrow I_3$, $h: I_3 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile, atunci funcția compusă $p(x): I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = (h \circ g \circ f)(x)$ este derivabilă pe I_1 și

$$p'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x). \quad (10)$$

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze derivata funcției:

a) $h: D \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2^{3x}$;

b) $p: D \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = \log_2 \cos 2x$.

Rezolvare:

a) $(2^{3x})' = 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot (3x)' = \ln 8 \cdot 2^{3x}$.

b) $(\log_2 \cos 2x)' = \log'_2(\cos 2x) \cdot \cos'(2x) \cdot (2x)' = \frac{1}{\cos 2x \cdot \ln 2} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -\frac{2 \sin 2x}{\cos 2x \ln 2} = -\frac{2 \tan 2x}{\ln 2}$.

4.4. Derivarea funcției inverse

Teorema 20. Fie $f: I \rightarrow J$ ($I, J \subseteq \mathbb{R}$) o funcție continuă și bijectivă. Dacă funcția f este derivabilă în $x_0 \in I$ și $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția inversă $f^{-1}: J \rightarrow I$, unde $J = f(I)$, este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ și $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Observație. Fie funcția $f: I \rightarrow J$ strict monotonă, derivabilă pe intervalul I și $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Prin urmare, funcția inversă $f^{-1}: J \rightarrow I$ este derivabilă pe intervalul J și

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}, \quad \forall y \in J, \text{ unde } y = f(x). \quad (11)$$

Exerciții rezolvate

↳ 1. Derivata funcției arcsinus

Fie funcția $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$. Să se calculeze $(f^{-1})'$.

Rezolvare:

În orice punct $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $(\sin)'(x_0) = \cos x_0 \neq 0$ și sunt verificate condițiile teoremei 20. Astfel, funcția $f^{-1} = \arcsin$ este derivabilă în orice punct $y_0 \in (-1, 1)$.

Notăm $y_0 = \sin x_0$. Atunci $\arcsin y_0 = x_0$. Aplicând formula (11), obținem:

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}, \quad \forall y_0 \in (-1, 1).$$

Revenind la notațiile uzuale, reținem formula:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1). \quad (12)$$

2. Derivata funcției arccosinus

Fie funcția $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$. Să se calculeze $(f^{-1})'$.

Rezolvare:

Raționând în mod analog sau aplicînd relația $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, obținem formula:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1) \quad (13)$$

3. Derivata funcției arctangentă

Fie funcția $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Să se calculeze $(f^{-1})'$.

Rezolvare:

În orice punct $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $(\operatorname{tg})'(x_0) = \frac{1}{\cos^2 x_0} \neq 0$ și sînt verificate condițiile teoremei 20. Astfel, funcția $f^{-1} = \operatorname{arctg}$ este derivabilă în orice punct $y_0 \in \mathbb{R}$, unde $y_0 = \operatorname{tg} x_0$. Obținem $(\operatorname{arctg})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x_0}} = \cos^2 x_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}$.

Revenind la notațiile uzuale, obținem formula:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (14)$$

4. Derivata funcției arc cotangentă

Fie funcția $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Să se calculeze $(f^{-1})'$.

Rezolvare:

Raționând în mod similar, obținem formula:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (15)$$

4.5. Derivarea funcției de tipul $f(x) = u(x)^{v(x)}$, unde $u(x) > 0$

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = u(x)^{v(x)}$, unde $u(x) > 0$, $\forall x \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Această funcție, în caz general, nefiind nici funcție putere, nici funcție exponențială, nu poate fi derivată aplicînd formulele (3), (8) din § 3, ci aplicînd identitatea logaritmică fundamentală $f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x)\ln u(x)}$. Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$, astfel obținută, este o funcție compusă. Derivînd-o, obținem:

$f'(x) = (e^{v(x)\ln u(x)})' = e^{v(x)\ln u(x)} \cdot (v(x)\ln u(x))' = u(x)^{v(x)} \cdot (v(x)\ln u(x))' = f(x) \cdot (\ln f(x))'$. (16)
De aici rezultă formula pentru derivata funcțiilor de tipul $f(x) = u(x)^{v(x)}$, unde $u(x) > 0$:

$$(u^v)' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right). \quad (17)$$

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze derivata funcției:

- a) $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = x^x$; b) $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{\sqrt{x}} \lg 5x$ (a se vedea exercițiul de la începutul § 3).

Rezolvare:

a) Conform formulei (16), $f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'$.

Deci, $(x^x)' = x^x \cdot (\ln x^x)' = x^x (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$.

- b) $f'(x) = (x^{\sqrt{x}} \lg 5x)' = (x^{\sqrt{x}})' \cdot \lg 5x + x^{\sqrt{x}} \cdot (\lg 5x)'$. Să calculăm întâi derivata funcției $g: D \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^{\sqrt{x}}$.

Aplicând formula (17) și formula $(\ln u^v)' = (v \ln u)' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$, obținem

$$(\ln x^{\sqrt{x}})' = \frac{1}{x^{\sqrt{x}}} \cdot (x^{\sqrt{x}})', \text{ sau } (x^{\sqrt{x}})' = \frac{(2 + \ln x) \cdot x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}. \text{ Atunci}$$

$$f'(x) = \frac{(2 + \ln x) \cdot x^{\sqrt{x}} \cdot \lg 5x}{2\sqrt{x}} + \frac{x^{\sqrt{x}}}{x \ln 10} = 0,5(2 + \ln x) \cdot x^{\sqrt{x}-0,5} \cdot \lg 5x + x^{\sqrt{x}-1} \lg e.$$

4.6. Derivate de ordin superior

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I . Valorile lui $f''(x)$ depind, în general, de x , adică derivata funcției f este, la rîndul său, o funcție de x . Prin urmare, poate fi pusă problema derivării funcției f' .

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze derivata derivatei funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 e^x$.

Rezolvare:

$$f'(x) = (x^2 e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x.$$

$$\text{Atunci } (f'(x))' = (2x e^x + x^2 e^x)' = 2e^x + 2x e^x + 2x e^x + x^2 e^x = e^x (x^2 + 4x + 2).$$

Definiție. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se spune că **funcția f este derivabilă de două ori într-un punct $x_0 \in I$** dacă funcția f este derivabilă într-o vecinătate a lui x_0 și funcția f' este derivabilă în x_0 .

În acest caz, derivata funcției f' în punctul x_0 se numește **derivata de ordinul doi** (sau **derivata a doua**) a funcției f în punctul x_0 și se notează $f''(x_0)$.

Așadar, $f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$.

Observație. Dacă funcția f este derivabilă de două ori în orice punct al intervalului I , atunci se spune că funcția f este derivabilă de două ori pe acest interval.

Exemple

1. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, obținem: $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$.

2. Pentru funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos x$, avem: $g'(x) = -\sin x$, $g''(x) = -\cos x$.

Similar se definește **derivata de ordinul trei** (sau **derivata a treia**) a funcției f în punctul x_0 . Se notează: $f'''(x_0)$.

În mod analog se definește **derivata de ordinul n** , $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, a funcției f în punctul x_0 . Se notează $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$. Uneori, $f^{(n)}(x)$ se notează $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Observații. 1. Ordinul derivatei se scrie între paranteze, pentru a nu fi confundat cu exponentul puterii (exclusiv cazurile în care ordinul derivatei se notează cu cifre romane).

2. S-a convenit ca derivata de ordinul zero a funcției f să fie considerată însăși funcția f , adică $f^{(0)} = f$.

Exemple

1. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, obținem: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(IV)}(x) = \sin x$. Aplicând metoda inducției matematice, se poate demonstra formula:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Similar obținem formula: $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}$.

3. Pentru funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$, obținem: $g'(x) = e^x$, $g''(x) = e^x$, $g'''(x) = e^x$.

Rețineți: $(e^x)^{(n)} = e^x, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercițiu rezolvat

↳ Să se deducă formula binomului lui Newton folosind derivata funcției.

Rezolvare:

Ridicând binomul $a + x$ la puterea n , $n \in \mathbb{N}^*$, obținem identitatea:

$$(a + x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

unde $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ sunt coeficienții care urmează să fie determinați.

Substituim $x = 0$ în identitatea (18) și obținem:

$$A_0 = a^n. \quad (19)$$

Pentru a determina A_1 , derivăm ambii membri ai identității (18):

$$((a + x)')' = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n)', \text{ sau}$$

$$n(a + x)^{n-1} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \dots + nA_n x^{n-1}. \quad (20)$$

Considerând $x = 0$ în (20), obținem $n \cdot a^{n-1} = A_1$. Atunci

$$A_1 = \frac{n \cdot a^{n-1}}{1}.$$

Derivând ambii membri ai identității (20) și substituind $x = 0$ în expresiile obținute, deducem formula pentru A_2 (verificați!):

$$A_2 = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}.$$

Procedând similar, vom calcula și ceilalți coeficienți: A_3, A_4, \dots, A_n . Derivând de k ori ($k \in \mathbb{N}^*, k \leq n$) ambii membri ai identității (18) și substituind $x = 0$ în expresiile respec-

tive, obținem: $n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)a^{n-k} = 1 \cdot 2 \cdots k \cdot A_k$. Atunci

$$A_k = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} a^{n-k}.$$

Se știe că numerele $\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$ se numesc **coeficienți binomiali** din formula binomului lui Newton și că se notează C_n^k .

Deci, $A_k = C_n^k a^{n-k}$, unde $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Prin urmare,

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + \dots + C_n^k a^{n-k}x^k + \dots + x^n. \quad (21)$$

Astfel, aplicînd derivata funcției, am dedus formula binomului lui Newton (21).

Exerciții propuse

A

1. Să se calculeze f' pentru funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 5x^6$;	b) $f(x) = \pi e^x$;	c) $f(x) = -0,5 \log_{\frac{1}{3}} x$;
d) $f(x) = x^3 - 5x^2$;	e) $f(x) = 7x^2 - 3x + 2$;	f) $f(x) = 2 \log_5 x + 2010$.
2. Să se determine domeniul de definiție D_f , să se calculeze f' și să se determine domeniul de derivabilitate $D_{f'}$ pentru funcția $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x + \sqrt{x}$;	b) $f(x) = \log_3 x + x^5$;	c) $f(x) = xe^x$;
d) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$;	e) $f(x) = \sqrt[3]{x} \log_{\frac{1}{5}} x$;	f) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$;
g) $f(x) = \frac{x}{x^3 + 2x}$;	h) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;	i) $f(x) = \frac{e^x}{x - 3}$;
j) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$;	k) $f(x) = -4 \log_2 \sqrt{2}x$.	
3. Să se calculeze f' în punctul x_0 , dacă:

a) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$, $x_0 = \sqrt{2}$;	b) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} \log_5 2x$, $x_0 = 0,25$.
---	--
4. Dintr-un punct pleacă un mobil care efectuează o mișcare descrisă de ecuația $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 7t$ (s este distanța exprimată în metri, iar t – timpul exprimat în secunde).
Să se determine:
 - a) formula de calcul al vitezei mobilului;
 - b) viteza mobilului în momentul $t = 2$ s;
 - c) peste câte secunde mobilul se va opri.
5. Dintr-un punct pleacă concomitent două mobile ale căror ecuații de mișcare sunt $s_1(t) = 6t^2 + 4t$ și $s_2(t) = t^3 + 3t^2 + 6t$, unde distanța s se exprimă în metri și timpul t – în secunde.
 - a) Să se determine momentele de întâlnire a acestor mobile.
 - b) Să se determine formulele vitezelor și ale accelerațiilor celor două mobile.
 - c) Să se determine vitezele și accelerațiile mobilelor în momentele de întâlnire.
 - d) Să se determine momentele în care vitezele și respectiv accelerațiile lor sunt egale.

B

6. Să se calculeze f' pentru funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = x^{25} - \sqrt{x} + \cos x$; b) $f(x) = \sin x + \log_{0,3} x - \sqrt[5]{x}$; c) $f(x) = 5 \ln x + \sqrt{3x} - \frac{5}{x^2}$;
 d) $f(x) = \sqrt[6]{2x} + 7e^x - \frac{1}{3}x^{-9}$; e) $f(x) = \sqrt{5} \cos x - 7 \sin x - 4 \ln x$; f) $f(x) = 5\sqrt[4]{x} \cdot \sin x$;
 g) $f(x) = 8x^3 \ln x$; h) $f(x) = 6 - 0,6x^{-5} \log_3 x$; i) $f(x) = 5 \ln(x^2 - 3x)$;
 j) $f(x) = \sqrt{2} \log_3^3 \operatorname{tg} x$; k) $f(x) = 6^{3x} \sin^2 4x$; l) $f(x) = \frac{\cos(3x^2 - 1)}{\ln^2 x}$.

7. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = \cos^2 2x$, în $x_0 = \frac{\pi}{3}$; b) $f(x) = \lg^2(3x - 1)$, în $x_0 = \frac{2}{3}$; c) $f(x) = x^{\sqrt{x+2}}$, în $x_0 = 1$.

8. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ ax^2 + bx + c, & \text{dacă } x \in [0, +\infty). \end{cases}$

Să se determine valorile parametrilor reali a , b și c , astfel încât funcția f să fie derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

9. Să se scrie cel puțin o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a cărei derivată este:

- a) $f'(x) = 2 - \cos x$; b) $f'(x) = -2e^{2x}$; c) $f'(x) = 2 \sin 2x$.

10. Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f'(x) = 0$, dacă:

- a) $f(x) = 2 \sin^2 x + \sqrt{2}x$; b) $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3}x$.

11. Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $f'(x) > 0$, dacă:

- a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$; b) $f(x) = 3x + \cos(6x - \pi)$.

12. Să se calculeze f'' pentru funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6$; b) $f(x) = 2 \sin 3x$; c) $f(x) = 5e^{-2x}$;
 d) $f(x) = \sqrt{3-x^2}$; e) $f(x) = \ln x$; f) $f(x) = \arccos \frac{x}{3}$;
 g) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; h) $f(x) = \frac{3^{2x}}{(x-1)^2}$; i) $f(x) = (\sqrt{x})^{x-1}$.

13. Să se calculeze $f''(x) - 5f'(x) + 3f(x)$, știind că $f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

14. Un mobil se deplasează conform ecuației de mișcare $s(t) = \sqrt{t}$. Să se demonstreze că accelerația mobilului este proporțională cu cubul vitezei lui.

15. Să se afle forța F ce acționează în momentul $t = 3$ asupra unui mobil de masă m , care efectuează o mișcare descrisă de ecuația $s(t) = 4t^3 - t^2$ (masa m este exprimată în kilograme, distanța s – în metri și timpul t – în secunde).

16. Să se calculeze $f^{(5)}(0)$, dacă $f(x) = e^{2x} \cdot x^3$.

17. Folosind derivata, să se calculeze suma $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$, unde C_n^k , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, sunt coeficienți binomiali.

18. Să se demonstreze, aplicând metoda inducției matematice, formula lui Leibniz:

$$(f \cdot g)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g^{(0)} + C_n^1 f^{(n-1)} g^{(1)} + \dots + C_n^{n-1} f^{(1)} g^{(n-1)} + C_n^n f^{(0)} g^{(n)}.$$

§5 Diferențiala unei funcții

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) o funcție derivabilă pe intervalul I și $x_0 \in I$. Atunci, conform definiției derivatei, avem

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Din (1) și din definiția limitei unei funcții într-un punct rezultă că

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad (2)$$

unde $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Folosind relația (2), obținem

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ sau} \\ \Delta f(x_0) &= f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \end{aligned} \quad (3)$$

Din relația (3) rezultă că creșterea $\Delta f(x_0)$ a funcției f derivabile în punctul x_0 se exprimă ca o sumă de doi termeni: termenul $f'(x_0) \cdot \Delta x$, care este direct proporțional cu creșterea argumentului, și termenul $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, unde $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ cînd $\Delta x \rightarrow 0$.

Definiție. Funcția liniară $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$, se numește **diferențiala funcției f în punctul x_0** și se notează $df(x_0)$.

Deci, $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$. (4)

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze diferențiala funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Rezolvare:

Cum $f'(x_0) = 1$, obținem $dx = \Delta x$. În baza relației (4), $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$.

Consecință. Dacă funcția f este derivabilă în orice punct din I , obținem formula:

$$df(x) = f'(x) \cdot dx, \quad \forall x \in I. \quad (5)$$

Exemple

1. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, obținem:

$$df(x) = d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

2. Pentru funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \log_8 x$, avem:

$$dg(x) = d(\log_8 x) = \frac{1}{x \ln 8} dx = \frac{dx}{x \ln 8}.$$

Interpretarea geometrică a diferențialei unei funcții f derivabile într-un punct x_0 este reprezentată în figura 4.11. Trasăm tangentă la graficul G_f în punctul $A(x_0, f(x_0))$. Avem $\Delta x = AB$, $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = \frac{BC}{AB}$ (a se vedea $\triangle ABC$ cu $m(\angle B) = 90^\circ$).

Atunci $BC = f'(x_0) \cdot AB$, sau $BC = f'(x_0) \Delta x = df(x_0)$.

Deci, interpretarea geometrică a diferențialei unei funcții f într-un punct x_0 este următoarea: $\Delta f(x_0)$ reprezintă creșterea ordonatei funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$, ce corespunde creșterii Δx a argumentului ei, iar $df(x_0)$ – creșterea ordonatei tangentei la graficul G_f în punctul $(x_0, f(x_0))$, care corespunde aceleiași creșteri Δx a argumentului funcției f (fig. 4.11).

Formulele (3) și (4) implică următoarea relație de aproximare:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0), \quad (6)$$

sau $BD \approx BC$.

Din relația (6) rezultă:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (7)$$

Pentru Δx suficienți de mici avem $f(x_0 + \Delta x) \approx y$. Cu alte cuvinte, în vecinătatea punctului A , pe o porțiune suficient de mică a graficului funcției f , arcul de curbă este aproximat cu un segment al tangentei la graficul G_f în punctul A .

Formula (7) se aplică deseori la calculul aproximativ al valorii unei funcții într-un punct indicat.

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze cu aproximație valoarea funcției f definite prin formula $f(x) = 4x^2 - x - 15$ în punctul $x = 1,1$.

Rezolvare:

$x = 1,1 = 1 + 0,1 = x_0 + \Delta x$. Atunci $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$. Calculăm $f(1)$ și $f'(1)$:

$$f(1) = 4 \cdot 1^2 - 1 - 15 = -12; \quad f'(x) = 8x - 1 \text{ și } f'(1) = 8 \cdot 1 - 1 = 7.$$

Substituind în (6), obținem $f(1,1) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0,1 = -12 + 7 \cdot 0,1 = -11,3$. Valoarea exactă a funcției f în punctul $1,1$ este $f(1,1) = -11,26$.

Observații. Aplicând formula (7), se pot deduce formulele:

$$1. \sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2} \Delta x. \quad (8)$$

$$2. (1+\Delta x)^n \approx 1 + n \cdot \Delta x, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (9)$$

Exercițiu. Deducreți formulele (8) și (9).

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze cu aproximație: a) $\sqrt{4,008}$; b) $(1,003)^{100}$.

Rezolvare:

a) Aplicând formula (8), obținem:

$$\sqrt{4,008} = \sqrt{4(1+0,002)} = 2\sqrt{1+0,002} \approx 2\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0,002\right) = 2 \cdot 1,001 = 2,002.$$

Folosind calculatorul de buzunar, avem: $\sqrt{4,008} \approx 2,00199$.

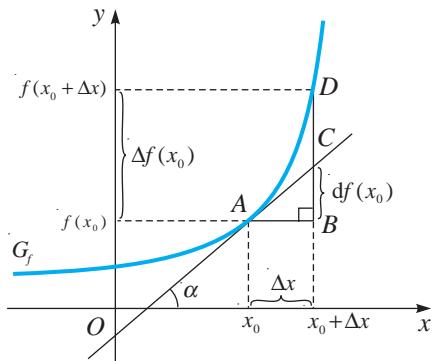


Fig. 4.11

b) În baza formulei (9), obținem: $(1,003)^{100} = (1 + 0,003)^{100} \approx 1 + 100 \cdot 0,003 = 1,3$.

Folosind calculatorul de buzunar, avem: $(1,003)^{100} \approx 1,3493$.

Formula (7) poate fi aplicată la calculul aproximativ al valorilor oricărora funcții derivabile în punctul x_0 , inclusiv al valorilor funcțiilor trigonometrice. Menționăm că în analiza matematică unghiurile se măsoară numai în radiani.

Observație. Formulele (7)–(9) pot fi aplicate doar pentru valori suficient de mici ale lui Δx .

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze cu aproximație $\sin 31^\circ$.

Rezolvare:

Fie $f(x) = \sin x$. Avem $\sin 31^\circ = (\sin 30^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right)$.

Astfel, $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) = f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right)$. Considerăm $x_0 = \frac{\pi}{6}$, iar $\Delta x = \frac{\pi}{180}$.

Atunci $f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$.

Cum $f(x_0) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $f'(x_0) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, obținem:

$$\sin 31^\circ \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\pi \sqrt{3}}{2 \cdot 180} \approx 0,52.$$

Din definiția diferențialei unei funcții rezultă că tabloul derivatelor funcțiilor elementare se poate transcrie în tabloul diferențialelor funcțiilor respective:

$d(c) = 0, c \in \mathbb{R};$	$d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx, \alpha \in \mathbb{R};$	$d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}};$
$d(e^x) = e^x dx;$	$d(a^x) = a^x \ln a dx;$	$d(\ln x) = \frac{dx}{x};$
$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2};$	$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a};$	$d(\sin x) = \cos x dx;$
$d(\cos x) = -\sin x dx;$	$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x};$	$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x};$
$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$	$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$	
$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2};$	$d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}.$	

Regulilor de derivare (harta noțională a modulului 4) le corespund reguli similare de diferențiere.

Exemple

1. $d(e^x \cdot x^3) = e^x \cdot x^3 \cdot dx + 3x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 e^x (x+3) dx$.

2. $d(\sin 3x) = 3 \cos 3x dx$.

Exerciții propuse

B

- Aplicând formula (6), să se calculeze cu aproximarele valorile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
 a) $f(x) = x^3 - 2x$, în $x_1 = 1,04$, $x_2 = 0,98$; b) $f(x) = x^2 + 5x - 1$, în $x_1 = 25,04$, $x_2 = 0,98$.
- Aplicând formulele (7), (8) și (9), să se calculeze cu aproximarele:
 a) $(1,0008)^{200}$; b) $(0,996)^7$; c) $\sqrt{36,011}$; d) $\sqrt[3]{0,998}$; e) $\ln(1,05)$.
- Să se calculeze diferențiala funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
 a) $f(x) = x^3 + 2x$; b) $f(x) = \frac{x}{1-x}$; c) $f(x) = \sin(x+1)$; d) $f(x) = 2^{3x}$; e) $f(x) = \cos 2x$.
- Să se calculeze diferențiala funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
 a) $f(x) = x \cdot \log_2 x$; b) $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$;
 c) $f(x) = x \cdot \operatorname{ctg}(x+5) - \ln 5x$; d) $f(x) = 3 \ln \frac{x}{3} + 5$.
- Să se calculeze diferențiala funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
 a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, în $x_0 = -2$; b) $f(x) = \sin x - \cos x$, în $x_0 = \frac{\pi}{3}$;
 c) $f(x) = \log_2(x^2 + 3)$, în $x_0 = 1$.
- Să se calculeze diferențiala funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
 a) $f(x) = \sqrt{x + 5x^4 - x^{-7}}$; b) $f(x) = 2 \cdot 3^{-x} - \ln(x^2 - 1) + 7$; c) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - \sqrt[5]{x^2 - x}$.
- Să se calculeze diferențiala funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
 a) $f(x) = \sin 2x - \cos^3 x + 5$, în $x_0 = \frac{\pi}{6}$; b) $f(x) = \operatorname{arctg} 3x + 5 \arccos x$, în $x_0 = 1$;
 c) $f(x) = -\sqrt{5} \cdot 7^{x^2} + \arcsin \frac{x}{3}$, în $x_0 = 0$; d) $f(x) = x^3 e^{2x}$, în $x_0 = 2$.
- Aplicând formula (7), să se calculeze cu aproximarele:
 a) $\cos 46^\circ$; b) $\lg 11,2$; c) $e^{0,93}$; d) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 0,004\right)$; e) $\frac{1}{1,004^{20}}$.

§6 Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile

În continuare vom pune în evidență unele proprietăți generale ale funcțiilor derivabile. Teoremele ce urmează sunt **teoreme fundamentale ale analizei matematice**.

6.1. Teorema lui Fermat

Reamintim!

Punctele de maxim (minim) local ale unei funcții se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcții.

Teorema 21 (teorema lui Fermat¹). Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I și $x_0 \in I$. Dacă x_0 este un punct de extrem local al funcției f , atunci $f'(x_0) = 0$.



¹ Pierre de Fermat (1601–1665) – matematician francez.

Pierre de Fermat

Demonstrație

Presupunem că x_0 este un punct de maxim local al funcției f . Atunci există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 ($V(x_0) \subset I$), astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in V(x_0)$. Pentru $x \in V(x_0)$, $x < x_0$, avem $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, iar pentru $x \in V(x_0)$, $x > x_0$, obținem $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

Deoarece funcția f este derivabilă în x_0 , rezultă că $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$, unde $f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, $f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$. Deci, $f'(x_0) \geq 0$ și $f'(x_0) \leq 0$, de unde rezultă că $f'(x_0) = 0$.

Teorema se demonstrează similar și în cazul în care x_0 este un punct de minim local al funcției f . Pentru acest caz teorema mai poate fi demonstrată substituind în demonstrația de mai sus f cu $-f$. ►

Interpretare geometrică. În condițiile teoremei lui Fermat, tangenta la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa Ox (fig. 4.12).

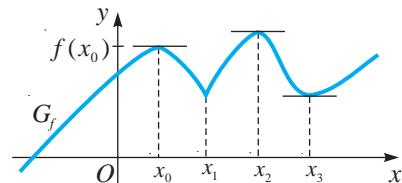


Fig. 4.12

Observație. Teorema lui Fermat exprimă doar *condiția necesară* pentru ca funcția derivabilă f să aibă în punctul x_0 extrem local. Din faptul că derivata funcției f se anulează în x_0 , încă nu rezultă, în mod obligatoriu, că această funcție are în x_0 extrem local.

De exemplu, derivata funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, se anulează în $x_0 = 0$, însă $x_0 = 0$ nu este punct de extrem local pentru funcția f (fig. 4.13).

Acest exemplu demonstrează că reciproca teoremei lui Fermat este falsă.

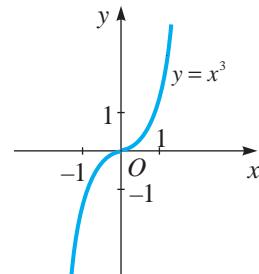


Fig. 4.13

6.2. Teorema lui Rolle

Următoarea teoremă, foarte utilă în aplicații, este o consecință a proprietăților funcțiilor continue și a teoremei lui Fermat.

Teorema 22 (teorema lui Rolle¹). Dacă funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- 1) este continuă pe $[a, b]$,
 - 2) este derivabilă pe (a, b) și
 - 3) $f(a) = f(b)$,
- atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f'(c) = 0$.



Michel Rolle

¹ Michel Rolle (1652–1719) – matematician francez.

Demonstrație

Funcția f , fiind continuă pe $[a, b]$, conform teoremei II Weierstrass (modulul 3, secvența 3.1), este mărginită și își atinge marginile pe acest interval.

Fie $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, $m, M \in \mathbb{R}$. Sunt posibile cazurile: $m = M$; $m < M$.

1) Dacă $m = M$, atunci funcția f este constantă pe $[a, b]$.

Prin urmare, $f'(c) = 0$ pentru orice $c \in (a, b)$.

2) Dacă $m < M$, atunci f nu este o funcție constantă pe $[a, b]$. Din condiția $f(a) = f(b)$ rezultă că funcția f nu-și atinge cel puțin una din margini, m sau M , în extremitățile segmentului $[a, b]$. Adică, există un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = m$ sau $f(c) = M$. Cum c este un punct de extrem local, conform teoremei lui Fermat, $f'(c) = 0$. ►

Observație. Orice funcție cu proprietățile 1) și 2) se numește **funcție Rolle**.

Interpretare geometrică. Dacă segmentul determinat de punctele $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ este paralel cu axa Ox , atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât tangenta în punctul $(c, f(c))$ al graficului funcției derivabile f este paralelă cu axa Ox (fig.4.14).

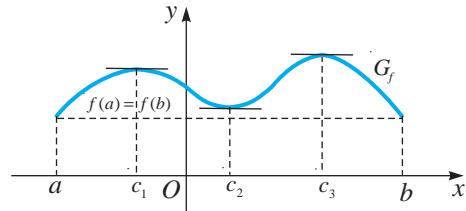


Fig. 4.14

Exemplu

Funcția $f: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$, verifică următoarele condiții:

- 1) este continuă pe $[-1, 0]$,
- 2) este derivabilă pe $(-1, 0)$,
- 3) $f(-1) = f(0) = 1$.

Conform teoremei lui Rolle, există cel puțin un punct $c \in (-1, 0)$, astfel încât $f'(c) = 0$. Să determinăm acest punct c .

Avem $f'(x) = 6x^2 - 2 = 0$ cu $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \notin (-1, 0)$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \in (-1, 0)$. Așadar, $c = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Observații. 1. Punctul c din teorema lui Rolle nu întotdeauna este unic pentru funcția dată.

2. Dacă se renunță la cel puțin una dintre ipotezele teoremei lui Rolle, atunci concluzia teoremei este falsă.

Exercițiu. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 2, & \text{dacă } x = 0, \end{cases} \quad I = [0, 1];$
- b) $f(x) = 2x, \quad I = [0, 1];$
- c) $f(x) = |x|, \quad I = [-1, 1].$

Determinați care dintre condițiile teoremei lui Rolle nu se verifică și convingeți-vă că, în acest caz, concluzia teoremei lui Rolle este falsă.

Corolare ale teoremei lui Rolle

1. Între două zerouri ale unei funcții derivabile pe un interval se află cel puțin un zerou al derivatei acestei funcții (fig. 4.15).

2. Între două zerouri consecutive ale derivatei unei funcții derivabile pe un interval se află cel mult un zerou al acestei funcții (fig. 4.16).

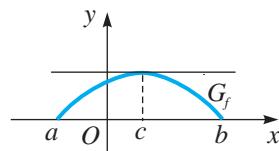


Fig. 4.15

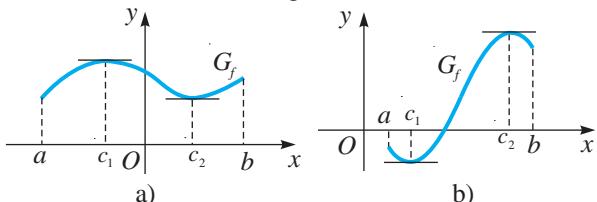


Fig. 4.16

6.3. Teorema lui Lagrange

Teorema 23 (teorema lui Lagrange¹). Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Dacă funcția f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) , atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.



Joseph Louis Lagrange

Demonstrație

Considerăm funcția auxiliară $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) - mx$, $m \in \mathbb{R}$. Funcția F este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) . Determinăm constanta $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $F(a) = F(b)$, adică $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Cum funcția F satisfacă condițiile teoremei lui Rolle, rezultă că există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $F'(c) = 0$.

Din relațiile $F'(x) = f'(x) - m$ și $F'(c) = 0$ rezultă că $f'(c) = m$.

Prin urmare, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, sau $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ (1). ►

Interpretare geometrică. Graficul funcției f admite tangentă în orice punct $x \in (a, b)$. Dreapta care trece prin punctele $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$ are panta $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m_1$, iar tangentă la graficul funcției f în punctul $(c, f(c))$ are panta $f'(c) = m_2$. Cum $m_1 = m_2$, rezultă că aceste drepte sunt paralele.

Așadar, în condițiile teoremei lui Lagrange, există cel puțin un punct al graficului G_f în care tangentă este paralelă cu secanta AB (fig. 4.17).

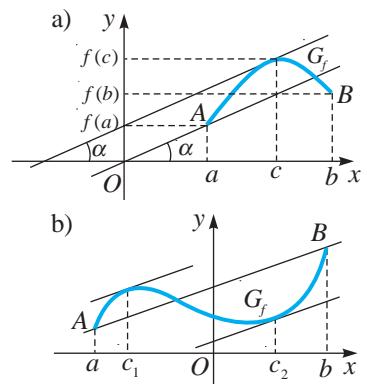


Fig. 4.17

¹ Joseph Louis Lagrange (1736–1813) – matematician și mecanician francez.

Exercițiu rezolvat

↳ Să se aplice teorema lui Lagrange funcției $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 6 - 2x^2, & x \in [0, 1] \\ \frac{4}{x}, & x \in (1, 2] \end{cases}$ și să se determine efectiv c .

Rezolvare:

Funcția f este continuă și derivabilă pe fiecare dintre intervalele $[0, 1)$ și $(1, 2]$. Deoarece $f(1-0) = f(1) = f(1+0) = 4$, rezultă că funcția f este continuă în punctul $x_0 = 1$ și deci continuă pe $[0, 2]$.

$$\text{Avem } f'(x) = \begin{cases} -4x, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ -\frac{4}{x^2}, & \text{dacă } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

În baza definițiilor derivate laterale, $f'_s(1) = f'_d(1) = -4$. Rezultă că $f'(1) = -4$. Deci, funcția f este derivabilă pe $(0, 2)$. Atunci, conform teoremei lui Lagrange, există cel puțin un punct $c \in (0, 2)$, astfel încât $f(2) - f(0) = f'(c) \cdot (2 - 0)$, adică $f'(c) = -2$. Înțînd cont de derivata funcției f pe intervalele indicate, obținem ecuația $-4c = -2$ pentru $c \in (0, 1)$ și ecuația $-\frac{4}{c^2} = -2$ pentru $c \in (1, 2)$, cu soluțiile $c_1 = 0,5$ și respectiv $c_2 = \sqrt{2}$.

Așadar, am obținut două puncte: c_1 și c_2 .

Răspuns: $c_1 = 0,5$; $c_2 = \sqrt{2}$.

Observații. 1. Formula (1) se numește **formula lui Lagrange** sau **formula creșterilor finite**.

2. Ca și în cazul teoremei lui Rolle, punctul c nu întotdeauna este unic pentru funcția dată.

3. Teorema lui Lagrange este o generalizare a teoremei lui Rolle.

Într-adevăr, dacă în teorema lui Lagrange se verifică și condiția $f(a) = f(b)$, atunci din formula (1) rezultă că $f'(c) = 0$, adică obținem concluzia din teorema lui Rolle.

4. Corolarul referitor la monotonie funcției se va studia în modulul 5 (teorema 2, § 1, secvența 1.1).

Corolare ale teoremei lui Lagrange

1. Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă și $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, atunci f este constantă pe I .

2. Dacă $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile pe intervalul I și $f' = g'$, atunci funcția $g - f$ este constantă pe I .

3. Fie f o funcție definită într-o vecinătate V a punctului x_0 , derivabilă pe $V \setminus \{x_0\}$ și continuă în x_0 . Dacă există $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci există $f'(x_0)$ și $f'(x_0) = \lambda$.

Observație. Corolarul 3 impune o condiție suficientă ca f să fie derivabilă în x_0 . Această condiție nu este însă și necesară.

De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$ este continuă și derivabilă în $x_0 = 0$, dar $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ nu există.

6.4. Regulile lui l'Hospital

Unele limite de funcții pot fi calculate cu ajutorul derivatelor. Aplicarea următoarelor două teoreme, numite **regulile lui l'Hospital**¹, fac posibil calculul unor limite de forma $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, în cazurile în care $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ sau dacă aceste limite sunt infinite.



Guillaume de l'Hospital

6.4.1. Regula lui l'Hospital pentru cazul exceptat $\frac{0}{0}$

Teorema 24. Fie I un interval ($I \subseteq \mathbb{R}$), $x_0 \in I$ și funcțiile $f, g: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,
- 2) funcțiile f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$,
- 3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in V(x_0) \cap I$,
- 4) există limita (finită sau infinită) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

atunci există limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, și $\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$.

6.4.2. Regula lui l'Hospital pentru cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 25. Fie I un interval, $x_0 \in I$ și funcțiile $f, g: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$,
- 2) funcțiile f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$,
- 3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in V(x_0) \cap I$,
- 4) există limita (finită sau infinită) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

atunci există limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, și $\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Observații. 1. Teoremele 24 și 25 sunt adevărate și pentru limite laterale în punctul indicat.

2. Regulile lui l'Hospital sunt adevărate și în cazul în care $x \rightarrow \infty$.

3. Teoremele 24 și 25 reprezintă *condiții suficiente* pentru rezolvarea cazurilor exceptate $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

4. Dacă nedeterminarea $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$ este prezentă atât în $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, cât și în $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ și dacă funcțiile f, g, f', g' , precum și ambele aceste limite verifică condițiile regulii respective a lui l'Hospital, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$. În acest caz se spune că s-a aplicat succesiv de două ori regula lui l'Hospital.

¹ Guillaume de l'Hospital (1661–1704) – matematician francez.

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze: 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$; 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x}$.

Rezolvare:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 3x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

|| **Observație.** În unele cazuri apare necesitatea de a aplica succesiv regulile lui l'Hospital de trei sau de mai multe ori.

6.4.3. Cazurile exceptate $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$

Cazurile exceptate $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$ pot fi reduse la cazul exceptat $\frac{0}{0}$ sau la cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$ prin metodele propuse în modulul 2.

Exerciții rezolvate

↳ 1. Să se calculeze:

$$a) \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 \cdot \ln x); \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right); \quad c) \lim_{x \rightarrow +0} x^x; \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2x}.$$

Rezolvare:

a) Sîntem în cazul exceptat $0 \cdot \infty$. Avem $x^2 \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$. Atunci $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$, și $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Funcțiile f și g sînt derivabile: $f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ și $g'(x) = -\frac{2}{x^3} \neq 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

$$\text{Așadar, } \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} -\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

Răspuns: $\lim_{x \rightarrow +0} (x^2 \cdot \ln x) = 0$.

b) Avem cazul exceptat $\infty - \infty$. Cum $\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x}$, obținem cazul exceptat $\frac{0}{0}$.

Deci,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{tg} x)'}{(x \operatorname{tg} x)'} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x} \right)}{\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x \operatorname{tg} x + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x \cdot \sin x + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\frac{1}{2} \sin 2x + x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 x - 1)'}{\left(\frac{1}{2} \sin 2x + x \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{\cos 2x + 1} = 0. \end{aligned}$$

Răspuns: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right) = 0$.

|| **Observație.** În exemplul b) am aplicat regula lui l'Hospital succesiv de două ori, deoarece, aplicînd-o prima dată, am obținut iarăși cazul exceptat $\frac{0}{0}$.

c) Avem cazul exceptat 0^0 . Fie $f(x) = x^x$. Atunci $\ln f(x) = x \cdot \ln x$.

Deci, $f(x) = e^{x \ln x}$.

Deoarece $\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} -\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$, obținem:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x)} = e^0 = 1.$$

Răspuns: $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$.

d) Sîntem în cazul exceptat 1^∞ .

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2x}$, atunci $\ln f(x) = 2x \cdot \ln \frac{x-1}{x+1}$.

Prin urmare, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{2x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{2x^2}} = -4$.

$$\text{Răspuns: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2x} = e^{-4}.$$

Exercițiul d) poate fi rezolvat și cu ajutorul formulei $u^v = e^{v \ln u}$.

Observație. Regulile lui l'Hospital se folosesc și la calculul unor limite de șiruri.

2. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$.

Rezolvare:

Considerăm funcția $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, și calculăm $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Sîntem în cazul exceptat ∞^0 .

Logaritmînd $f(x)$, avem cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x, \text{ iar } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Prin urmare, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Atunci $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$.

$$\text{Răspuns: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

3. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Rezolvare:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

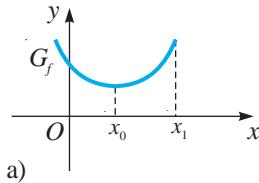
$$\text{Răspuns: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0.$$

Observație. În calculul limitelor de funcții se recomandă combinarea metodelor elementare cu regulile lui l'Hospital.

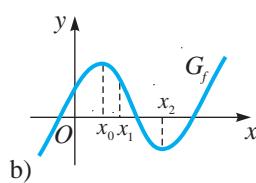
Exerciții propuse

A

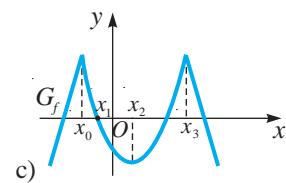
1. Să se determine în care dintre punctele indicate sunt verificate condițiile teoremei lui Fermat pentru funcția f definită grafic:



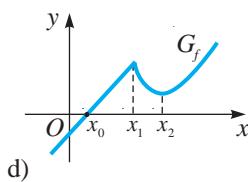
a)



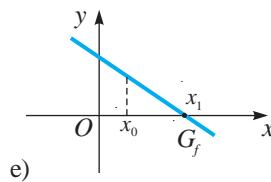
b)



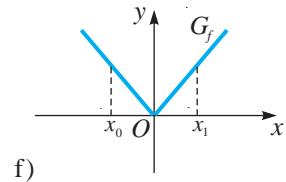
c)



d)



e)



f)

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3;$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 3.$

- 1) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$ și să se determine dacă sunt verificate condițiile teoremei lui Fermat în punctul x_0 , unde x_0 este soluția acestei ecuații.
2) Să se reprezinte graficul funcției f și să se interpreze geometric teorema lui Fermat în punctul x_0 .

3. Să se determine dacă în punctul $x_0 = 1$ sunt verificate condițiile teoremei lui Fermat pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (x-1)^2;$

b) $f(x) = (x-1)^3.$

4. Să se traseze graficul unei funcții, astfel încât în punctele $x_0 = -1$, $x_1 = 2$ să se verifice condițiile teoremei lui Fermat.

B

5. Să se dea exemple de funcții pentru care un număr finit de puncte ale intervalului respectiv sunt puncte de extrem local, dar în aceste puncte nu se verifică teorema lui Fermat.

6. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle funcției f și, în caz afirmativ, să se determine efectiv punctul c :

a) $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+1)(x-3);$

b) $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x-2|;$

c) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin^2 x;$

d) $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos^2 x.$

7. Fie funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 1, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ x^2 - bx + d, & \text{dacă } x \in [0, 1]. \end{cases}$

- a) Să se determine parametrii reali a, b, d , astfel încât funcția f să satisfacă condițiile teoremei lui Rolle pe $[-1, 1]$.

- b) Să se aplice teorema lui Rolle funcției f cu parametrii a, b, d determinați în a) și să se afle efectiv punctul c .

8. Fie funcția:
 a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$; b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 16)$.
 Să se arate că derivata funcției are numai zerouri reale.
9. Să se demonstreze că ecuația $2^x(1+x \ln 2) - 20x^9 = 0$ are cel puțin o soluție pe $(0, 1)$.
10. Fie $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x - \cos x - 1$. Să se arate că există cel puțin un punct $c \in (0, 2\pi)$, astfel încât $f''(c) = 0$.
11. Să se aplique teorema lui Lagrange funcției f și să se determine efectiv punctul c :
 a) $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x + 2$; b) $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$;
 c) $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{dacă } x \in [0, 2] \\ 5x - 2, & \text{dacă } x \in (2, 3]; \end{cases}$; d) $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$.
12. Să se dea exemplu de o funcție $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ ce satisface condițiile teoremei lui Lagrange, pentru care punctul intermediar $c \in (0, 8)$ nu este unic.
13. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 4 \ln x + 3x, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$ Să se afle $f'(1)$.
14. Aplicând regulile lui l'Hospital, să se calculeze limitea:
 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 2x}{x^3 - 2x^2 + x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}}{3x^2 + 3x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{2x^2 - x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^3 - x}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$, $n \in \mathbb{N}^*$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$; g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right)^{\frac{1}{2x}}$; h) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin 2x}$.
15. Aplicând regula respectivă a lui l'Hospital, să se calculeze limita sirului:
 a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 n}{\sqrt[50]{n}}$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{1,01^n}$.
16. Să se formuleze și să se rezolve exerciții asemănătoare cu ex. 6, 7, 11, 14.

Exerciții și probleme recapitulative

A

În exercițiile 1 și 2 determinați litera corespunzătoare variantei corecte.

1. Derivata funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$, este
 A) $f'(x) = 2x^2 - 2x$. B) $f'(x) = 6x^2 - 2x$.
 C) $f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$. D) $f'(x) = 3x^2 - 2x$.
2. Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x-2}$. Atunci
 A) $f'(1) = 0$. B) $f'(1) = 2$. C) $f'(1) = \frac{1}{2}$. D) $f'(1)$ nu există.
3. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + x^2 + 1$.
 a) Să se determine valoarea de adevăr a propoziției „ $D_{f'} \subseteq D_{g'}$ ”.
 b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul G_f în punctul $x_0 = 1$.
 c) Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $f'(x) < g'(x)$.
 d) Să se traseze în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor f' și g' .
 e) Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f' și g' .

4. Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f'(x)=0$, unde f este funcția definită prin formula:
 a) $f(x)=x^3-2x^2$; b) $f(x)=2x \ln x$; c) $f(x)=(x-1)e^x$.
5. Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $f'(x)\geq 0$, unde f este funcția definită prin formula $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.
6. Dintronu punct pornesc concomitent două mobile: primul cu viteza inițială de 8 m/s și accelerarea de 4 m/s², iar al doilea – intr-o mișcare uniformă cu viteza de 16 m/s.
 a) Să se afle momentul de timp în care mobilele se vor întâlni, dacă se știe că ecuația mișcării uniform accelerate este $x(t)=v_0t+\frac{at^2}{2}$, iar ecuația mișcării uniforme este $x(t)=vt$.
 b) Să se determine momentul de timp t în care viteza primului mobil va fi de două ori mai mare decât viteza celui de al doilea.

B

7. Să se calculeze diferențiala funcției f definită prin formula:
 a) $f(x)=\cos(\sin x)$; b) $f(x)=\sin(\cos x)$; c) $f(x)=\ln(\ln x)$.
8. Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f'(x)=0$, unde f este funcția definită prin formula:
 a) $f(x)=\sin x+\cos x$; b) $f(x)=\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x$; c) $f(x)=e^{3x}+e^{-3x}$.
9. a) Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în punctele indicate:
 1) $f(x)=x^2+x \cdot |x|$, $x_0=0$; 2) $f(x)=x+|x-3|$, $x_0=3$; 3) $f(x)=\begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$, $x_0=0$.
 b) Să se traseze graficul fiecăreia dintre funcțiile f .
10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=e^{|x-3|}$.
 a) Să se demonstreze că funcția f este continuă în punctul $x_0=3$, dar nu este derivabilă în acest punct.
 b) Să se traseze graficul funcției f .
11. Fie $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție polinomială. Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului P sunt reale și distințte, atunci P' are aceeași proprietate.
12. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$$
.
13. Să se demonstreze că deși $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x}$ există, nu pot fi aplicate direct regulile lui l'Hospital.
14. Să se verifice dacă formula lui Lagrange este adevarată pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=2x-x^2$, pe intervalul $[0, 1]$ și să se determine efectiv c .
15. Să se verifice justitia teoremei lui Rolle pentru funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ pe intervalul indicat:
 a) $f(x)=\cos^2 x$, $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$; b) $f(x)=\sin^2 x$, $[0, \pi]$;
 c) $f(x)=(x-3)(x-4)(x-5)$, $[3, 5]$.
16. Utilizând regulile lui l'Hospital, să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{\ln(1+e^{3x})}$.

Probă de evaluare

A

*Timp efectiv de lucru:
45 de minute*

- Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3 + x - x^2$.
 - Completați cu unul dintre semnele $<$, $=$, $>$, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată: „ $f'(-1) \square g'(0)$ ”.
 - Rezolvați în \mathbb{R} inecuația $f'(x) \geq g'(x)$.
 - Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $f'(x) + f(x) = g'(x)$.
- Fie funcția $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - \ln 2x$.
 - Completați, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată: „ $D_f = \boxed{\quad}$ ”.
 - Determinați valoarea de adevăr a propoziției: „ $D_f = D_{f'}$ ”.
 - Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = \frac{1}{2}$.
- Calculați derivata funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.
 - $f(x) = x^2 \cdot 5^{3x}$;
 - $f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x+5}$.
- Un mobil se deplasează rectiliniu conform legii $s(t) = 3t^2 + 9\ln t + 18$ (distanța s este exprimată în centimetri, iar timpul t – în secunde). Aflați momentul de timp t în care accelerația este de 2 cm/s^2 .

B

*Timp efectiv de lucru:
90 de minute*

- Fie funcțiile $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 6x + 1$.
 - Determinați valoarea de adevăr a propoziției: „ $D_{f'} \subset D_{g'}$ ”.
 - Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $f'(x) = g'(x)$.
 - Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = \pi$.
- Fie funcția $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{0,2} 6x$.
 - Completați, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată: „ $D_f = \boxed{\quad}$ ”.
 - Calculați diferențiala funcției f .
 - Aflați f'' .
- Fie funcția $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} + 5\right) - \sqrt{3}x$. Rezolvați în \mathbb{R} :
 - ecuația $f'(x) = 0$;
 - inecuatiile $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$.
- Utilizând regulile lui l'Hospital, calculați limita $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.
- Fie funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + d, & \text{dacă } x \in [-1, 0] \\ 1 + \ln(x^2 + 1), & \text{dacă } x \in (0, 1]. \end{cases}$
 - Aflați a , b , $d \in \mathbb{R}$, astfel încât teorema lui Rolle să poată fi aplicată funcției f .
 - Aplicați teorema lui Rolle funcției f , cu parametrii a , b , d determinați în a).
- Un mobil se deplasează rectiliniu conform legii $s(t) = \frac{t^3}{\ln 3} + 6\log_3 t + 20t$ (distanța s este exprimată în centimetri, iar timpul t – în secunde). Determinați momentul de timp t în care accelerația este de 0 cm/s^2 .

Derivata și diferențiala funcției

Derivate laterale

$$f'_+(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Regule de calcul al derivatelor

$$1. (f + g)' = f' + g'$$

$$2. (c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$3. (f - g)' = f' - g'$$

$$4. (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$5. \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

6. Derivata funcției compuse: $(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$$7. Derivata funcției inverse: (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

8. Derivate de ordin superior: $f'' = (f')'; f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Unele aplicații ale derivatelor

1. Ecuarea tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă x_0 : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

2. Aplicații la calculele aproximative

3. Determinarea coeficienților binomiali

4. Calculul unor limite (reguli lui l'Hospital)

5. Studiul funcțiilor

Derivata funcției

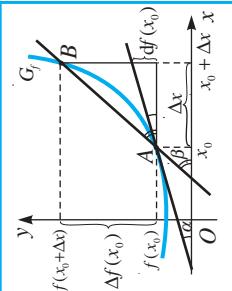
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\text{sau } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tabelul derivatorilor și diferențialelor funcțiilor elementare

f	D_f	f'	$D_{f'}$	$\frac{df}{dx}$
1. c (constantă)	\mathbb{R}	0	\mathbb{R}	0
2. $x^n, n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	$n \cdot x^{n-1}$	\mathbb{R}	$n \cdot x^{n-1} dx$
3. $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1} dx$
4. $\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2} dx$
5. $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^*$	$[0, +\infty)$	$\frac{1}{2n \cdot \sqrt[n]{x^{2n-1}}}$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{2n \cdot \sqrt[n]{x^{2n-1}}} dx$
6. $\sqrt[n+1]{x}, n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	$\frac{1}{(2n+1) \cdot \sqrt[n+1]{x^{2n}}}$	\mathbb{R}^*	$\frac{(2n+1) \cdot \sqrt[n+1]{x^{2n}}}{2} dx$
7. \sqrt{x}	$[0, +\infty)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} dx$
8. $a^x, a > 0, a \neq 1$	\mathbb{R}	$a^x \cdot \ln a$	\mathbb{R}	$a^x \ln a dx$
9. e^x	\mathbb{R}	e^x	\mathbb{R}	$e^x dx$
10. $\ln x$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{x} dx$
11. $\log_a x, a > 0, a \neq 1$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{x \ln a}$	\mathbb{R}	$\frac{1}{x \ln a} dx$
12. $\sin x$	\mathbb{R}	$\cos x$	\mathbb{R}	$\cos x dx$
13. $\cos x$	\mathbb{R}	$-\sin x$	\mathbb{R}	$-\sin x dx$
14. $\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{2k+1\} \frac{\pi}{2} k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{2k+1\} \frac{\pi}{2} k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2 x} dx$
15. $\operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi k \in \mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi k \in \mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x} dx$
16. $\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
17. $\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
18. $\arctg x$	\mathbb{R}	$\frac{1}{x^2+1}$	\mathbb{R}	$\frac{1}{x^2+1} dx$
19. $\operatorname{arctg} x$	\mathbb{R}	$-\frac{1}{x^2+1}$	\mathbb{R}	$-\frac{1}{x^2+1} dx$

Interpretarea geometrică a derivatei și diferențialei funcției



Reguli de calcul al diferențialelor

1. $d(f + g) = df + dg$
2. $d(c \cdot f) = c \cdot df$
3. $d(f - g) = df - dg$
4. $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$
5. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$
6. $d(f(g)) = f'(g)dg$

Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile

1° Teorema lui Fermat
2° Teorema lui Rolle
3° Teorema lui Lagrange

Obiective

- ⇒ aplicarea derivatei la determinarea intervalelor de monotonie și a extremelor funcției;
- ⇒ recunoașterea și utilizarea în diverse contexte a noțiunilor *punct critic*, *punct de extrem*, *extremele funcției*;
- ⇒ *determinarea cu ajutorul derivatei a punctelor de inflexiune, a intervalor de concavitate și de convexitate ale graficului unei funcții;
- ⇒ *recunoașterea și determinarea asimptotelor graficului funcției elementare studiate sau date;
- ⇒ *aplicarea noțiunii *limită funcției* la determinarea asimptotelor graficului funcției;
- ⇒ utilizarea metodelor ce țin de aplicațiile derivatei ca metode noi de studiere a funcției, de rezolvare a problemelor teoretice și practice;
- ⇒ aplicarea derivatelor la rezolvarea unor probleme de maxim și minim din geometrie, fizică, economie.

În acest modul vom aplica derivatele de ordinul întâi și *derivatele de ordinul doi la studiul variației funcțiilor, vom rezolva diverse probleme de geometrie, fizică și din alte domenii, probleme care, în majoritatea cazurilor, nu pot fi rezolvate folosind metode elementare.

§1 | Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor**1.1. Intervalele de monotonie ale unei funcții**

În studiul variației unei funcții este important să cunoaștem în ce condiții funcția este constantă sau monotonă pe un interval dat. Am stabilit deja că derivata unei funcții constante pe un interval dat este egală cu zero. Va fi utilă și reciproca acestei afirmații.

Teorema 1. Fie $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) o funcție derivabilă. Dacă derivata funcției f este egală cu zero pe un interval $I \subseteq E$, atunci funcția f este constantă pe acest interval.

Demonstrație

Fie $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$. Fixăm pe intervalul I un punct x_0 și fie punctul $x \in I$, $x \neq x_0$. Pe intervalul $[x_0, x]$ (sau pe $[x, x_0]$) funcția f satisfac condițiile teoremei lui Lagrange (modulul 4, § 6, secvența 6.3). Conform acestei teoreme, există un punct c situat între x_0 și x , astfel încât $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Deoarece $f'(c) = 0$, din ipoteză, rezultă că $f(x) = f(x_0)$. Prin urmare, în orice punct $x \in I$ funcția f ia valoarea $f(x_0)$, adică funcția f este constantă pe I . ►

Corolar. Dacă f și g sunt funcții derivabile și $f' = g'$ pe un interval I , atunci funcțiile f și g diferă pe I printr-o constantă: $f(x) = g(x) + C$, $\forall x \in I$, $C \in \mathbb{R}$.

Demonstrație

Considerăm funcția $\varphi = f - g$. Atunci $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, $\forall x \in I$. Astfel, funcția φ este constantă pe I și, prin urmare, $f(x) = g(x) + C$, $\forall x \in I$, $C \in \mathbb{R}$. ►

Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine intervalele pe care funcțiile f și g diferă printr-o constantă și să se afle această constantă:

a) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 1$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$; $g: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$.

Rezolvare:

a) $f'(x) = -2 \sin 2x$ și $g'(x) = -2 \cos x \sin x - 2 \sin x \cos x = -2 \sin 2x$. Deci, funcția f diferă de funcția g printr-o constantă: $f(x) = g(x) + C$. Cum $f(0) = 1$ și $g(0) = 2$, rezultă că $C = -1$ și obținem: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Pe fiecare dintre intervalele $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, 1)$ și $I_3 = (1, +\infty)$, funcțiile f și g au derivatele egale: $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Așadar, pe fiecare dintre aceste intervale, funcțiile date diferă printr-o constantă: $f(x) - g(x) = C_1$, $\forall x \in I_1$; $f(x) - g(x) = C_2$, $\forall x \in I_2$; $f(x) - g(x) = C_3$, $\forall x \in I_3$. Pentru intervalul I_2 obținem $C_2 = 0$ (ne convingem îlând $x = 0$), iar pentru intervalele I_1 și I_3 avem $C_1 = -\frac{\pi}{2}$ și respectiv $C_3 = \frac{\pi}{2}$, dacă, de exemplu, x tinde la $-\infty$ și respectiv la $+\infty$.

Astfel, am obținut: $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} - \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in (-\infty, -1)$; $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$, $\forall x \in (-1, 1)$; $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} + \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in (1, +\infty)$.

Relațiile obținute pot fi demonstrate și prin metode elementare, fără aplicarea derivatei.

Observație. În baza exercițiului b), tragem concluzia că din faptul că funcția f este definită pe reuniunea a două (sau mai multe) intervale disjuncte, $I_1, I_2, I_1 \cap I_2 = \emptyset$, și $f'(x) = 0$, $\forall x \in I_1 \cup I_2$, încă nu rezultă că ea este constantă pe mulțimea $I_1 \cup I_2$.

De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ 1, & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \end{cases}$ are derivata nulă în fiecare punct al mulțimii $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, însă ea nu este constantă pe A .

Vom stabili acum un criteriu important și eficient de determinare a intervalelor de monotonie ale unei funcții derivabile.

Teorema 2. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I . Funcția f este crescătoare (descrescătoare) pe I dacă și numai dacă $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in I$.

Demonstrație

Necesitatea. Presupunem că funcția f este crescătoare pe I . Atunci $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, $\forall x, x_0 \in I, x \neq x_0$. Fixând $x_0 \in I$ și trecând în acest raport la limită cînd $x \rightarrow x_0$, obținem că $f'(x_0) \geq 0, \forall x_0 \in I$.

Raționament similar se face și în cazul în care f este o funcție descrescătoare pe intervalul I .

Suficiența. Să considerăm punctele arbitrar $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, și fie $f'(x) \geq 0$ pe I . Aplicînd funcției f teorema lui Lagrange pe intervalul $[x_1, x_2]$, obținem că $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, unde $c \in (x_1, x_2)$ și $f'(c) \geq 0$. Cum $x_2 - x_1 > 0$, rezultă că $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, adică $f(x_2) \geq f(x_1)$. Deci, funcția f este crescătoare pe I .

Analog, dacă $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$, obținem că funcția f este descrescătoare pe I . ►

Observații. 1. Dacă $f'(x) > 0, \forall x \in I$, atunci funcția f este strict crescătoare pe I .

2. Dacă $f'(x) < 0, \forall x \in I$, atunci funcția f este strict descrescătoare pe I .

3. Din faptul că funcția f este strict crescătoare (strict descrescătoare) pe I nu rezultă că f' nu se anulează în nici un punct din I . De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$, este strict crescătoare pe \mathbb{R} , însă $f'(0) = 0$.

Concluzie. O funcție derivabilă este strict monotonă pe intervalele pe care derivata sa își păstrează semnul. Prin urmare, pentru a stabili intervalele de monotonie ale unei funcții derivabile, determinăm intervalele pe care derivata sa își păstrează semnul.

Exemple

1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2x$, este strict crescătoare pe \mathbb{R} , deoarece $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + 1$, este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, întrucît $f'(x) = 2x - 1 < 0, \forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ și $f'(x) > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

1.2. Puncte de extrem ale unei funcții**Reamintim!**

Definiții. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$).

- Punctul $x_0 \in I$ se numește **punct de maxim local** al funcției f dacă există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 , astfel încât $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in V(x_0) \cap I$. În acest caz, valoarea $f(x_0)$ se numește **maxim local** al funcției f în punctul x_0 .

- Punctul $x_0 \in I$ se numește **punct de minim local** al funcției f dacă există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 , astfel încât $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in V(x_0) \cap I$. În acest caz, valoarea $f(x_0)$ se numește **minim local** al funcției f în punctul x_0 .

- Punctele de maxim local și de minim local ale funcției f se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcții.
- Valorile funcției f în punctele ei de extrem local se numesc **extremele locale** ale acestei funcții.

Definiții. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$).

- Punctul $x_0 \in I$ se numește **punct de maxim global** al funcției f pe I dacă $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I$, iar valoarea $f(x_0)$ se numește **maximul global** al funcției f pe I .
- Punctul $x_0 \in I$ se numește **punct de minim global** al funcției f pe I dacă $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in I$, iar valoarea $f(x_0)$ se numește **minimul global** al funcției f pe I .
- Punctele de maxim global și de minim global ale unei funcții se numesc **puncte de extrem global** ale acestei funcții.
- Valorile funcției f în punctele ei de extrem global se numesc **extremele globale** ale acestei funcții.

Observații. 1. Un punct de maxim (minim) local nu este în mod necesar un punct de maxim (minim) global. Un punct de maxim (minim) global este totodată și un punct de maxim (minim) local.

2. Este posibil ca un minim local al unei funcții să fie mai mare decât un maxim local al aceleiași funcții.

De exemplu, funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (fig. 5.1) are în punctul x_1 un minim local mai mare decât maximul local din punctul x_4 .

3. Dacă funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe intervalul $[a, b]$, atunci, conform teoremei lui Weierstrass, funcția f își atinge pe acest interval marginile $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ și $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, care sunt extremele globale ale funcției f pe intervalul $[a, b]$.

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul deschis I . Din teorema lui Fermat rezultă că dacă $x_0 \in I$ este un punct de extrem local al funcției f , atunci $f'(x_0) = 0$. Astfel, teorema lui Fermat pune în evidență faptul că *derivata unei funcții se anulează în orice punct de extrem local al intervalului deschis I* .

Concluzii. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul deschis I și $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in I$.

1. Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, și $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este punct de maxim local al funcției f . Se notează: ↗ $f(x_0)$ ↘. Semnul ↗ (↘) semnifică faptul că funcția este monoton crescătoare (descrescătoare) pe intervalul respectiv.
2. Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, și $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este punct de minim local al funcției f . Se notează: ↘ $f(x_0)$ ↗.

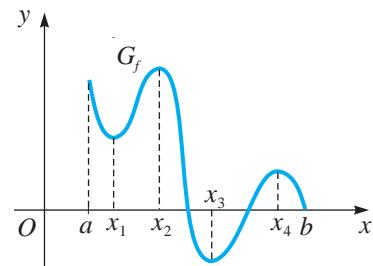


Fig. 5.1

3. Dacă derivata funcției f are același semn la stânga și la dreapta lui x_0 , atunci x_0 nu este punct de extrem local al acestei funcții.

Definiție. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul deschis I . Punctele din intervalul I în care f' ia valoarea zero se numesc **puncte critice** (sau **staționare**) ale funcției f .

Observație. Concluziile 1–3 rămân adevărate și în cazul în care funcția f fiind continuă în punctul x_0 nu este derivabilă în x_0 . Astfel de puncte de asemenea se numesc **puncte critice (staționare)** ale funcției f .

De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$, însă 0 este punct de minim local al acestei funcții.

Într-adevăr, $f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ 1, & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \end{cases}$ și în punctul $x_0 = 0$ derivata își schimbă semnul din „–” în „+”.

Intervalele de monotonie, punctele de extrem local și extremele locale ale unei funcții derivabile pe un interval deschis sau pe o reuniune de intervale deschise pot fi determinate aplicând următorul *algoritm*:

- ① Se calculează f' .
- ② Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$; soluțiile acestei ecuații (zerourile funcției f' , precum și punctele în care f nu este derivabilă) sunt eventualele puncte de extrem local ale funcției f .
- ③ Se determină semnul funcției f' pe intervalele pe care ea nu se anulează.
- ④ Se stabilesc intervalele pe care funcția f' își păstrează semnul, acestea fiind intervalele de monotonie ale funcției f .
- ⑤ Se determină punctele de extrem local și extremele locale ale funcției f .

Exerciții rezolvate

1. Să se studieze monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$.

Rezolvare:

$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$. Observăm că derivata funcției f este pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, f este strict crescătoare pe tot domeniul ei de definiție \mathbb{R} .

2. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 9x^2$.

Rezolvare:

$f'(x) = 3x^2 + 18x = 3x(x + 6)$. Punctele critice ale funcției f sunt -6 și 0 .

Constatăm că:

- $f'(x) > 0$ pe intervalele $(-\infty, -6)$, $(0, +\infty)$, prin urmare, în baza observației 1 (secvența 1.1), funcția f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, -6]$, $[0, +\infty)$.
- $f'(x) < 0$ pe intervalul $(-6, 0)$, deci funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[-6, 0]$.

Rezultatele acestui studiu pot fi trecute în aşa-numitul **tablou (tabel) de variație al funcției**. Pe linia întâi a acestui tablou se indică domeniul de definiție al funcției și punctele în care derivata ei se anulează sau nu există. Pe linia a doua se scriu semnele funcției f' pe intervalele unde ea nu se anulează. Pe ultima linie se indică creșterea (\nearrow), descreșterea (\searrow) funcției, precum și extremele ei locale.

Obținem tabloul de variație al funcției f :

Așadar, -6 este punct de maxim local al funcției f și $f(-6) = 108$ este maximul ei local, iar 0 este punct de minim local al funcției f și $f(0) = 0$ este minimul ei local.

x	$-\infty$	-6	0	$+\infty$
f'	+	0	-	0
f	\nearrow	108	\searrow	0

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$. Să se stabilească intervalele de monotonie, punctele de extrem local și extremele locale ale funcției f .

Rezolvare:

$f'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Derivata funcției f nu se anulează pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$. Pe primul interval $f'(x) < 0$, iar pe al doilea $f'(x) > 0$. Deci, pe $(-\infty, 0]$ funcția f este strict descrescătoare, iar pe $[0, +\infty)$ – strict crescătoare. Punctul $x_0 = 0$ este punct de minim local al funcției f și $f(0) = e^0 = 1$ este minimul ei local.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	\searrow	1	\nearrow

Tabloul de variație al funcției f este:

4. Să se studieze monotonia funcției $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$.

Rezolvare:

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Derivata funcției f nu se anulează pe intervalele $(0, 1)$ și $(1, +\infty)$. Avem $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0, 1)$, și $f'(x) < 0$, $\forall x \in (1, +\infty)$.

Alcătuim tabloul de variație al funcției f :

x	0	1	$+\infty$
f'	+	0	-
f	\nearrow	-1	\searrow

Pe intervalul $(0, 1]$ funcția f este strict crescătoare, iar pe intervalul $[1, +\infty)$ – strict descrescătoare. Prin urmare, 1 este punct de maxim local al funcției f și $f(1) = -1$ este maximul ei local.

Observație. Cunoscând tabloul de variație al unei funcții, pot fi stabilite inegalități de tipul $f_1(x) \geq f_2(x)$, $x \in E$. Pentru aceasta, studiem variația și semnul funcției diferență $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

Exercițiu rezolvat

5. Să se arate că pentru orice $x > -1$ este adevarată inegalitatea $\ln(1+x) \leq x$.

Rezolvare:

Considerăm funcția f definită prin diferența expresiilor din cei doi membri:

$f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - x$. Studiem variația acestei funcții cu ajutorul derivei. Avem $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$.

Tabloul de variație al funcției f este:

Deoarece maximul funcției este 0, rezultă că funcția este negativă pe $(-1, +\infty)$, adică $\ln(1+x) - x \leq 0$.

Așadar, $\ln(1+x) \leq x$ și egalitatea are loc numai pentru $x = 0$.

x	-1	0	$+\infty$
f'	+	0	-
f	\nearrow	0	\searrow

1.3. Determinarea extremelor globale

Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe (a, b) și continuă pe $[a, b]$. În baza teoremei Weierstrass, funcția f își atinge marginile sale pe $[a, b]$, adică există punctele $x_1, x_2 \in [a, b]$, astfel încât $f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = m$, $f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = M$. Dacă punctul x_1 (x_2) este situat în interiorul intervalului $[a, b]$, atunci în acest punct, conform teoremei lui Fermat, funcția f are un minim (maxim) local, și deci $f'(x_1) = 0$ ($f'(x_2) = 0$). Însă marginile m și M pot fi atinse de funcția f și la extremitățile intervalului $[a, b]$.

De exemplu, funcția $f: \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, își atinge cea mai mare valoare a sa, $M = 1$, în punctul 0.

Extremele globale ale unei funcții continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și derivabile pe (a, b) pot fi determinate aplicînd următorul *algoritm*:

- ① Se află valorile funcției f la capetele intervalului $[a, b]$, $f(a)$ și $f(b)$.
- ② Se află punctele critice ale funcției f , adică se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$, $x \in (a, b)$.
- ③ Se calculează valorile funcției f în punctele critice deja determinate și se compară cu valorile acestora la capetele intervalului: cea mai mică (mare) dintre aceste valori va fi minimul (maximul) global al funcției f pe $[a, b]$.

Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine, pe intervalul indicat, extremele locale și extremele globale ale funcției $f: I \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 + 2x - 10$, $I = [-1, 5]$; b) $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $I = [-3, 10]$.

Rezolvare:

a) $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, $\forall x \in [-1, 5]$. Astfel, funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[-1, 5]$. În acest caz, $m = f(-1) = -13$, $M = f(5) = 5^3 + 2 \cdot 5 - 10 = 125$.

b) $f'(x) = 2x - 4$, $\forall x \in [-3, 10]$. Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$ și aflăm punctele critice ale funcției f : $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. În punctul 2, funcția f are un minim local și $f(2) = 2$.

Deci, $m = \min[f(-3), f(2), f(10)] = \min[27, 2, 66] = 2$,

$M = \max[f(-3), f(2), f(10)] = \max[27, 2, 66] = 66$ sunt extremele globale ale funcției f .

Observație. Dacă funcția derivabilă f este definită pe intervalul $I = (a, b)$, finit sau infinit, atunci în algoritmul anterior valorile $f(a)$ și $f(b)$ se vor înlocui cu $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ și respectiv $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$. Se calculează marginile $m = \inf_{x \in I} f(x)$ și $M = \sup_{x \in I} f(x)$ care, în general, nu sînt atinse de funcția f .

Exercițiu rezolvat

Să se determine marginile funcției:

a) $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x;$ b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 3}.$

Rezolvare:

a) $f'(x) = e^x - 1 < 0, \forall x \in (-\infty, 0). \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$

Prin urmare, $m = \inf_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = 1, M = \sup_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = +\infty$ și aceste valori nu sînt atinse de funcția f .

b) $f'(x) = \frac{3-x^2-2x}{x^2+3} = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ sau } x = 1.$

$f(-3) = -\frac{1}{6}, f(1) = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$

Deci, $m = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min \left\{ -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2} \right\} = -\frac{1}{6}, M = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max \left\{ -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$ și

aceste valori sînt atinse de funcția f .

Exerciții propuse

A

1. Să se determine intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale și să se alcătuiască tabloul de variație al funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 - 3x;$	b) $f(x) = x^4 - 3;$	c) $f(x) = x^4 - 4x;$
d) $f(x) = x^3 - 12x;$	e) $f(x) = (x-1)^3(2x+3)^2;$	f) $f(x) = 2+x-x^2.$

2. Să se afle punctele de extrem local și extremele locale ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12;$	b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5;$	c) $f(x) = (x^3 - 10)(x + 5)^2;$
d) $f(x) = x^3 - 6x;$	e) $f(x) = (x-1)^2(x+2);$	f) $f(x) = 2x^3 + 2x - 5.$

3. Să se determine, pe intervalul indicat, extremele globale ale funcției $f: I \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9, I = [-1, 2];$	b) $f(x) = x^3 - x, I = [0, 5].$
--	----------------------------------

B

4. Aplicînd derivata, să se arate că funcțiile f, g diferă printr-o constantă și să se determine constanta respectivă:

a) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin 2x, g(x) = 1 + 2 \sin x \cos x;$
b) $f, g: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x, g(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{1-x};$
c) $f, g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arcsin x, g(x) = -\arccos x.$

5. Să se determine intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale și să se completeze tabloul de variație al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1;$	b) $f(x) = x^2 \ln x;$	c) $f(x) = e^{\frac{1}{(x-3)}};$
d) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln x;$	e) $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2};$	f) $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2 - 1}.$

6. Pentru care valori ale parametrului real a funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este crescătoare pe \mathbb{R} :
- $f(x) = ax - \ln(1+x^2)$;
 - $f(x) = \arctg ax + x$;
 - $f(x) = ax - \sin x$?
7. Să se afle punctele de extrem local și extremele locale ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = \frac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$;
 - $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;
 - $f(x) = x - 2\arctg x$;
 - $f(x) = (x-1)e^{3x}$;
 - $f(x) = x^4 e^{-x^2}$;
 - $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$;
 - $f(x) = |x-1| \sqrt[3]{x+2}$;
 - $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x \ln x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$;
 - $f(x) = (x+2)e^x$.
8. Să se determine, pe intervalul indicat, extremele locale și extremele globale ale funcției $f: I \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $I = [-1, 2]$;
 - $f(x) = \sin x + \cos^2 x$, $I = [0, \pi]$;
 - $f(x) = x - 2\ln x$, $I = (0, e]$.
9. Să se demonstreze inegalitatea:
- $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$, $\forall x \geq -1$, $\forall \alpha > 1$;
 - $\ln(1+x)^2 < x$, $\forall x > 0$.

§2 Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor. Asimptote

Am stabilit deja ce informații pot fi obținute despre comportarea unei funcții derivabile cunoscând derivata ei, mai precis, zerourile și semnul derivatei. Însă simpla cunoaștere a faptului că o funcție f este, de exemplu, strict crescătoare pe un interval I nu este suficientă pentru a stabili forma graficului acesteia. De exemplu, funcția f , definită pe $[0, +\infty)$ prin formula $f(x) = \sqrt{x}$, este strict crescătoare pe acest interval, însă această informație este insuficientă pentru a decide dacă graficul funcției f are forma curbei color sau a curbei de culoare neagră (fig. 5.2).

Forma graficului unei funcții poate fi determinată cu ajutorul derivatei a doua.

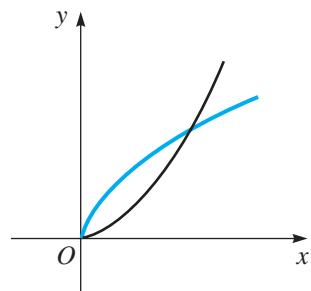


Fig. 5.2

2.1. Convexitate și concavitate

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) o funcție derivabilă pe intervalul deschis I . Presupunem că tangenta în orice punct al graficului funcției f se află sub grafic (fig. 5.3 a)) sau deasupra lui (fig. 5.3 b)).

În cazul a) se spune că graficul funcției f este o curbă convexă, iar în cazul b) – o curbă concavă.

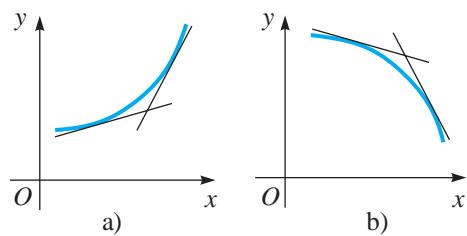


Fig. 5.3

Vom formula o definiție riguroasă a convexității (concavitatei) și vom arăta că derivata a două, dacă există, furnizează informații concrete în această privință.

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul deschis I și $x_0 \in I$. Tangenta la graficul funcției f în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este dreapta de ecuație

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Fie funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Graficul funcției F este tangenta M_0T (fig. 5.4).

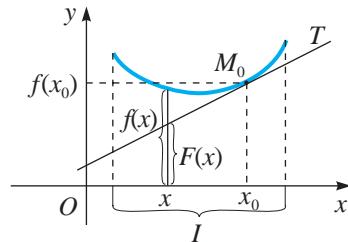


Fig. 5.4

Se spune că tangenta M_0T se află **sub graficul funcției f** dacă

$$F(x) \leq f(x) \quad \forall x \in I. \quad (1)$$

Se spune că tangenta M_0T se află **deasupra graficului funcției f** dacă

$$F(x) \geq f(x) \quad \forall x \in I. \quad (2)$$

Dacă inegalitatea (1) (inegalitatea (2)) este strictă pentru orice $x \in I \setminus \{x_0\}$, se spune că tangenta M_0T se află **strict sub graficul funcției f** (**strict deasupra graficului lui f**).

Definiții. • Funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) se numește **convexă (strict convexă)** pe intervalul I dacă tangenta în orice punct al graficului funcției f se află sub (strict sub) acest grafic.

• Funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) se numește **concavă (strict concavă)** pe intervalul I dacă tangenta în orice punct al graficului funcției f se află deasupra (strict deasupra) acestui grafic.

• Vom spune că graficul funcției f este o **curbă convexă (strict convexă)** sau o **curbă concavă (strict concavă)** pe intervalul I dacă funcția f posedă proprietatea respectivă pe acest interval.

Observații. 1. Definiția convexității graficului unei funcții poate fi formulată și astfel: pentru orice coardă AB cu abscisele aparținând intervalului I , porțiunea graficului care unește punctele A și B este situată sub această coardă (fig. 5.5).

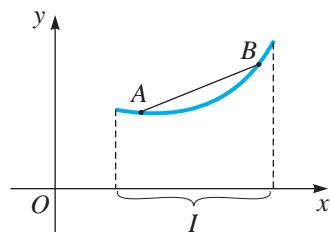


Fig. 5.5

2. Funcția f este concavă pe intervalul I dacă și numai dacă funcția $-f$ este convexă pe I .

3. Uneori se mai spune că funcțiile convexe au „concavitatea în sus” (graficul lor „ține apa”, fig. 5.6 a)), iar funcțiile concave au „concavitatea în jos” (graficul lor „nu ține apa”, fig. 5.6 b)).

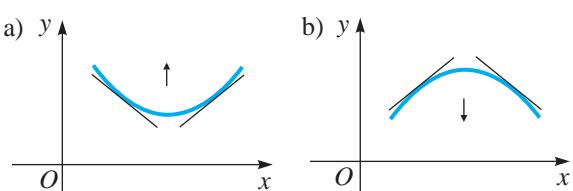


Fig. 5.6

Studiul concavității/convexității în baza definiției este dificil chiar în cazul funcțiilor elementare. Pentru funcțiile derivabile de două ori, determinarea intervalelor de concavitate/convexitate se reduce la studiul semnului derivatei a doua.

Teorema 3. Dacă funcția $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă pe (a, b) și $f''(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci această funcție este convexă pe acest interval.

Înlocuind f cu $-f$ și ținând cont de observația 2, obținem următorul

Corolar. Fie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe (a, b) . Dacă $f''(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci funcția f este concavă pe (a, b) .

Observație. Dacă $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), $\forall x \in (a, b)$, atunci funcția f este strict convexă (strict concavă) pe (a, b) .

Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine intervalele de concavitate și de convexitate ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;
- $f(x) = x^3$.

Rezolvare:

a) Funcția f satisfacă condițiile teoremei 3 și $f''(x) = 2a$. Așadar, funcția f este strict convexă pe \mathbb{R} , dacă $a > 0$, și strict concavă pe \mathbb{R} , dacă $a < 0$.

b) $f''(x) = 6x$. Prin urmare, funcția f este strict concavă pe $(-\infty, 0)$ și strict convexă pe $(0, +\infty)$.

2.2. Determinarea intervalelor de concavitate, convexitate.

Puncte de inflexiune

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul deschis I și $x_0 \in I$ un punct critic al funcției f , adică $f'(x_0) = 0$. Am stabilit deja că dacă funcția f' are semne diferite la stînga și la dreapta punctului x_0 , atunci x_0 este punct de extrem local al funcției f . Există însă cazuri în care este dificil de a stabili semnul derivatei la stînga și la dreapta punctelor critice. În aceste situații vom aplica următorul *criteriu suficient pentru extrem*, fără a mai studia semnul funcției f' , cu condiția că funcția f este de două ori derivabilă pe I .

Teorema 4. Dacă $x_0 \in (a, b)$ este un punct critic al funcției $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe (a, b) și dacă $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), atunci x_0 este un punct de minim local (maxim local) al funcției f .

Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine punctele de extrem local și extremele locale ale funcției definite prin expresia $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

Rezolvare:

Calculăm derivatele de ordinele unu și doi: $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$ și $f''(x) = 6x + 12$. Funcția f' se anulează în punctele $x_1 = -3$ și $x_2 = -1$. Cum $f''(-3) = -6 < 0$ și

$f''(-1)=6>0$, în baza teoremei 4 deducem că $x_1=-3$ este punct de maxim local al funcției f și $f(-3)=0$ este maximul ei local, iar $x_2=-1$ este punct de minim local al funcției f și $f(-1)=-4$ este minimul ei local.

Dacă funcția f este de două ori derivabilă în vecinătatea punctului x_0 în care $f''(x_0)=0$ și dacă funcția f'' are semne diferite la stînga și la dreapta punctului x_0 , atunci funcția f își schimbă concavitatea în acest punct. De exemplu, dacă $f''(x)>0$ pentru $x < x_0$ și $f''(x)<0$ pentru $x > x_0$ (x aparține unei vecinătăți a punctului x_0), atunci funcția f este convexă la stînga lui x_0 și concavă la dreapta lui x_0 .

Definiție. Fie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe (a, b) . Punctul $x_0 \in (a, b)$ se numește **punct de inflexiune al funcției f** dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, astfel încât funcția f este convexă pe $(x_0 - \delta, x_0)$ și concavă pe $(x_0, x_0 + \delta)$ sau invers (fig. 5.7).

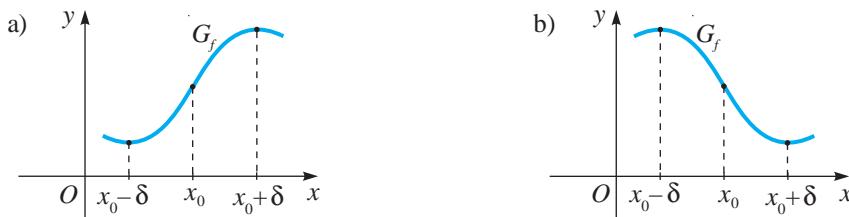


Fig. 5.7

Observație. Dacă x_0 este un punct de inflexiune al funcției f , atunci $M_0(x_0, f(x_0))$ se numește **punct de inflexiune pentru graficul** acestei funcții.

Teorema 5. Fie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă într-o vecinătate $V(x_0)$ a punctului $x_0 \in (a, b)$ și $f''(x_0)=0$. Dacă $f''(x)<0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x < x_0$, și $f''(x)>0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x > x_0$, sau invers (dacă $f''(x)>0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x < x_0$, și $f''(x)<0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x > x_0$), atunci x_0 este punct de inflexiune al funcției f .

Remarcăm: condiția $f''(x_0)=0$ nu implică faptul că x_0 este punct de inflexiune al funcției f , după cum condiția $f'(x_0)=0$ nu implică faptul că x_0 este punct de extrem local al funcției f .

Intervalele de convexitate, de concavitate și punctele de inflexiune ale unei funcții f de două ori derivabilă pe un interval pot fi determinate aplicând următorul *algoritm*:

- ① Se calculează f'' și se rezolvă ecuația $f''(x)=0$ (unele dintre soluțiile acestei ecuații pot fi puncte de inflexiune ale funcției f).
- ② Se stabilesc intervalele pe care funcția f'' are semn constant, acestea fiind intervalele de convexitate sau de concavitate ale funcției f .
- ③ Se determină punctele de inflexiune ale funcției f .

Observație. Dacă în punctul x_0 nu există f'' sau f'' este infinită, atunci acest punct de asemenea este un eventual punct de inflexiune al funcției f .

Exercițiu rezolvat

• Să se determine extremele locale, punctele de inflexiune, intervalele de concavitate și de convexitate ale funcției: a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 4x + 6)e^{-x}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$.

Rezolvare:

a) $f'(x) = 3x(x-2)$, deci funcția f are două puncte critice: $x_1 = 0$ și $x_2 = 2$. Cum $f''(x) = 6(x-1)$, rezultă că $f''(0) = -6 < 0$, $f''(2) = 6 > 0$. Astfel, $x_1 = 0$ este punct de maxim local, iar $x_2 = 2$ este punct de minim local al funcției f . Semnul funcției f'' este indicat în tabloul de variație al funcției f :

Așadar, funcția f este concavă pe $(-\infty, 1)$ și convexă pe $(1, +\infty)$, iar 1 este un punct de inflexiune.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	-	0	+
f	↙ ↘		↙ ↘

b) $f'(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ și $f''(x) = x^2 e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții în \mathbb{R} . Cum funcția f' este continuă pe \mathbb{R} și $f'(0) = -2$, rezultă că $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Astfel, funcția f este strict descrescătoare pe \mathbb{R} . Ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x_1 = 0$. Punctul 0 nu este punct de inflexiune al funcției f , deoarece $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Prin urmare, graficul funcției f este convex pe \mathbb{R} .

c) $f'(x) = 2|x|$, $f'(x) > 0$, $\forall x \neq 0$, deci funcția f este strict crescătoare. $f''(x) = -2$ pentru $x < 0$, $f''(x) = 2$ pentru $x > 0$ și f'' nu există în punctul $x = 0$. Astfel, funcția f este concavă pe $(-\infty, 0)$ și convexă pe $(0, +\infty)$, iar punctul $x = 0$ este punct de inflexiune.

2.3. Asimptote

Fie f o funcție definită pe mulțimea E , care este un interval sau o reuniune (finită sau infinită) de intervale. Dacă mulțimea E este nemărginită sau funcția f este nemărginită, atunci graficul ei este o mulțime nemărginită de puncte din plan (în sensul că nu există nici un dreptunghi care să conțină integral acest grafic). În acest caz, vom spune că graficul funcției f are *ramuri nemărginite*.

Dacă o ramură nemărginită a graficului funcției f se apropie oricăr de mult de o dreaptă dată, se spune că această dreaptă este *o asimptotă a graficului (pentru graficul) funcției f* . Graficul unei funcții poate avea *asimptote orizontale, oblice, verticale*.

2.3.1. Asimptote orizontale

Considerăm o funcție $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, unde mulțimea E conține un interval de forma $(a, +\infty)$ sau $+\infty$ este punct de acumulare pentru E . În acest caz, graficul funcției f are o ramură nemărginită. Fie l ($l \in \mathbb{R}$) un număr și considerăm dreapta de ecuație $y = l$ (paralelă cu axa Ox). Pentru orice număr $x \in (a, +\infty)$, notăm prin P (prin Q) punctul de abscisă x situat pe dreapta de ecuație $y = l$ (respectiv pe graficul funcției f) (fig. 5.8).

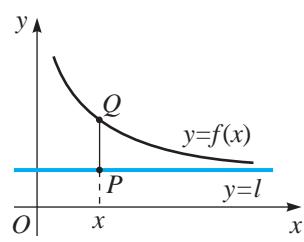


Fig. 5.8

Definiție. Dreapta de ecuație $y = l$ se numește **asimptotă orizontală la $+\infty$** a graficului funcției f (a funcției f) dacă lungimea segmentului $PQ = |f(x) - l|$ tinde la zero cînd $x \rightarrow +\infty$, adică $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - l| = 0$.

Această condiție este echivalentă cu faptul că $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ există și că $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

O definiție similară poate fi formulată și pentru asimptota orizontală la $-\infty$ a graficului funcției f în cazul în care mulțimea E conține un interval de forma $(-\infty, a)$ sau $-\infty$ este punct de acumulare pentru E (fig. 5.9).

Dacă limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$) nu există sau este infinită, atunci graficul funcției f nu are asimptotă orizontală la $+\infty$ (respectiv la $-\infty$).

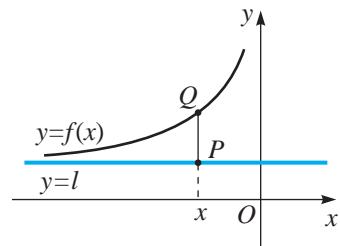


Fig. 5.9

Exercițiu rezolvat

4) Să se determine asimptotele orizontale ale graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- | | |
|--------------------------------|------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2};$ | b) $f(x) = 2^x;$ |
| c) $f(x) = e^{x^2};$ | d*) $f(x) = x \sin x.$ |

Rezolvare:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$. Prin urmare, dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ și la $-\infty$ a graficului funcției f .
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$. Deci, dreapta de ecuație $y = 0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală la $-\infty$ a graficului funcției f . Deoarece $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$, rezultă că graficul funcției f nu are asimptotă orizontală la $+\infty$.

c) Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2} = +\infty$, rezultă că graficul funcției f nu are asimptote orizontale.

d*) Graficul funcției f nu are asimptote orizontale nici la $+\infty$, nici la $-\infty$, deoarece nu există limitele $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin x$.

2.3.2. Asimptote oblice

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, unde mulțimea E conține un interval de forma $(a, +\infty)$ (sau $+\infty$ este punct de acumulare pentru E), și dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$. Pentru orice $x \in (a, +\infty)$ notăm prin P (prin Q) punctul de abscisă x situat pe dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$ (respectiv pe graficul funcției f) (fig. 5.10).

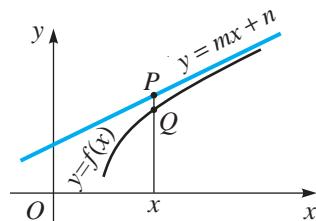


Fig. 5.10

Definiție. Dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$, se numește **asimptotă oblică la $+\infty$** a graficului funcției f (a funcției f) dacă lungimea segmentului $PQ = |f(x) - (mx + n)|$ tinde la zero cînd $x \rightarrow +\infty$, adică $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$.

Teorema 6. Dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$, este asimptotă oblică la $+\infty$ a graficului funcției $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ($m \neq 0$) și $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$.

Fie mulțimea E conține un interval de forma $(-\infty, a)$ sau $-\infty$ este punct de acumulare pentru E . În mod similar se definește noțiunea *asimptotă oblică la $-\infty$* a graficului funcției f și se formulează teorema 6 pentru astfel de asimptote.

Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine asimptota oblică a graficului funcției:

- a) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$; b) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{|x - 1|}$;
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Rezolvare:

a) $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x(x + 1)} = 1$ și $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - x}{x - 1} = -1$. Așadar, dreapta de ecuație $y = x - 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$ și la $-\infty$ a graficului funcției f .

b) $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x - 1)} = 1$ și $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{|x - 1|} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x - 1} = 1$. Prin urmare, dreapta de ecuație $y = x + 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$ a graficului funcției f . În mod similar, dacă $x \rightarrow -\infty$, obținem că dreapta de ecuație $y = -x - 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$ a graficului funcției f .

c) Graficul funcției f nu are asimptote oblice nici la $+\infty$, nici la $-\infty$, deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$, însă nu există limitele $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$.

2.3.3. Asimptote verticale

Exemplu

1. Considerăm funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ (fig. 5.11). Observăm că $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ și, prin urmare, dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală pentru graficul funcției f . Din lectura graficului funcției f rezultă că dacă x tinde la zero, punctul $M\left(x, \frac{1}{x}\right)$, $x > 0$,

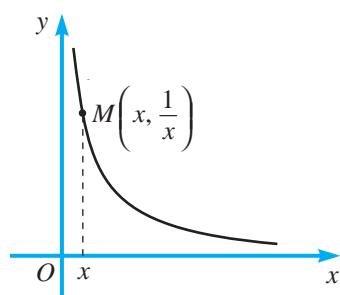


Fig. 5.11

al graficului, de abscisă x , se apropiie de axa Oy . În acest caz spunem că graficul funcției f are **asimptotă verticală** axa Oy , adică dreapta de ecuație $x = 0$.

2. Fie funcția $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ (fig. 5.12).

Audem $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(1-x)} = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

Dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ sunt asimptote verticale ale graficului funcției f .

Vom formula riguros termenul **asimptotă verticală**.

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ și a un punct de acumulare pentru mulțimea E .

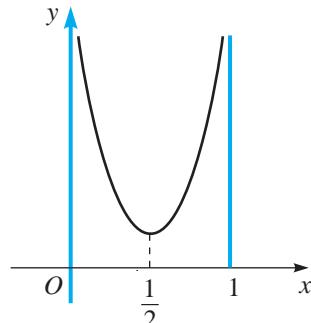


Fig. 5.12

Definiții. • Dacă limita la stânga $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ este $+\infty$ sau $-\infty$, se spune că dreapta de ecuație $x = a$ este **asimptotă verticală la stânga** pentru graficul funcției f (pentru funcția f).

• Dacă limita la dreapta $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ este $+\infty$ sau $-\infty$, se spune că dreapta de ecuație $x = a$ este **asimptotă verticală la dreapta** pentru graficul funcției f .

• Dreapta de ecuație $x = a$ este **asimptotă verticală** pentru graficul funcției f dacă ea este asimptotă verticală la stânga, la dreapta sau de ambele părți.

Dacă dreapta de ecuație $x = a$ este asimptotă verticală la stânga pentru graficul funcției f , atunci lungimea segmentului PQ tinde la zero cînd $x \rightarrow a-0$, iar ordonata punctului Q tinde la $-\infty$ (fig. 5.13 a)) sau la $+\infty$ (fig. 5.13 b)).

O interpretare geometrică similară se obține și pentru asimptota verticală la dreapta pentru graficul funcției f . (Ilustrații!)

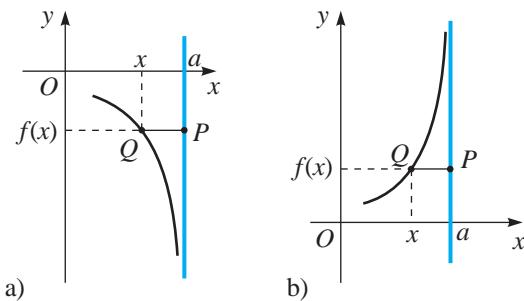


Fig. 5.13

Observație. Din definiție conchidem că asimptotele verticale ale graficului unei funcții $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ se vor căuta printre dreptele de ecuații $x = x_i$, unde x_i sunt punctele de discontinuitate de speță a două și/sau punctele de acumulare finite pentru mulțimea E care nu aparțin lui E .

În particular, dacă $E = (a, b)$ și funcția f este continuă pe (a, b) , atunci dreapta de ecuație $x = a$ ($x = b$) este asimptotă verticală la graficul funcției f dacă și numai dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (respectiv $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$).

Exercițiu rezolvat

Să se determine asimptotele verticale ale graficului funcției:

a) $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$; b) $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Rezolvare:

a) Cum funcția f este continuă pe $(-1, 1)$, eventualele asimptote verticale pentru graficul funcției f sînt dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = -1$.

Calculăm: $l_s(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$, $l_d(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$. Prin urmare, dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = -1$ sînt asimptote verticale ale graficului funcției f .

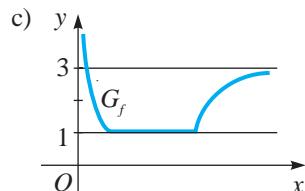
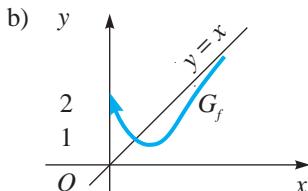
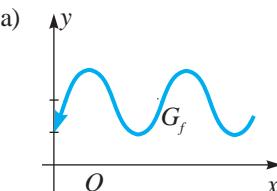
b) Am stabilit (modulul 2) că $l_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ și $l_d\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$.

Deci, dreptele de ecuații $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = -\frac{\pi}{2}$ sînt asimptote verticale pentru graficul funcției f .

Exerciții propuse

B

1. Să se determine asimptotele (orizontale, oblice, verticale) ale graficului funcției $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$:



2. Să se determine asimptotele (orizontale, oblice, verticale) ale graficului funcției:

a) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$;

b) $f: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$;

c) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

3. Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 + 9x^2 - x + 1$;

b) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$;

c) $f(x) = \sin x$;

d) $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$;

e) $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$;

f) $f(x) = x^2 \ln x$;

g) $f(x) = x \sin(\ln x)$.

4. Să se determine punctele de inflexiune ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}$;

c) $f(x) = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$);

d) $f(x) = x + \sin x$;

e) $f(x) = x + x^{\frac{5}{3}}$;

f) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$;

g) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

5. Să se determine asimptotele (orizontale, oblice, verticale) ale graficului funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{|x|}}$;

b) $f(x) = x^2 + \sin x$;

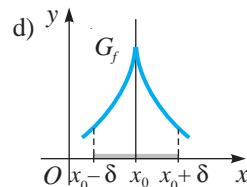
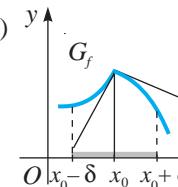
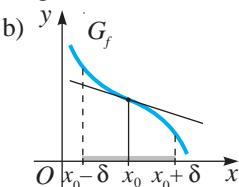
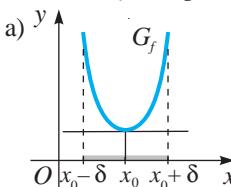
c) $f(x) = e^{\frac{1}{|x|}}$;

d) $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x(x-1)(x+1)}$;

e) $f(x) = \frac{x-9}{|x|+2}$;

f) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

6. Fie funcțiile reprezentate grafic:



Pentru fiecare funcție să se transcrie și să se completeze tabloul de variație:

x	$x_0 - \delta$	x_0	$x_0 + \delta$
f'			
f''			
f			

7. Să se scrie o funcție al cărei grafic are asimptote verticale drepte de ecuație $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

§3 Reprezentarea grafică a funcțiilor

A reprezenta grafic o funcție $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ înseamnă a trasa (a desena) graficul ei $G_f = \{(x, f(x)) | x \in E\}$ într-un sistem de axe ortogonale xOy . Pentru trasarea graficului funcției f recomandăm parcurgerea următoarelor etape de determinare succesivă a unor elemente caracteristice funcției date.

I. Domeniul de definiție al funcției. Dacă domeniul de definiție al funcției f nu este specificat, se subînțelege că este indicat domeniul ei maxim de definiție, format din mulțimea $D \subseteq \mathbb{R}$, pentru care $f(x)$, $x \in D$, are sens. În probleme cu conținut fizic, economic, geometric etc. pot fi restricții suplimentare referitoare la domeniul respectiv de definiție (studiu).

După ce a fost determinat domeniul de definiție al funcției f , se află punctele de intersecție a graficului ei cu axele de coordonate: cu axa Ox ($y=0$) – sînt punctele de forma $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, ..., x_1, x_2, \dots fiind soluțiile ecuației $f(x)=0$ (dacă acestea există); cu axa Oy ($x=0$) – este punctul $(0, f(0))$, dacă $0 \in D$.

II. Semnul funcției și eventualele simetrii ale graficului. Dacă $f \geq 0$ ($f \leq 0$), atunci graficul funcției f este situat deasupra (respectiv dedesubtul) axei Ox .

Dacă f este o funcție pară (impară), atunci graficul ei este simetric față de axa Oy (respectiv față de originea sistemului xOy), și în acest caz este suficient ca domeniul de studiu să fie $D \cap [0, +\infty)$.

Dacă f este o funcție periodică, atunci este suficient să se studieze funcția pe un interval de lungime egală cu perioada principală a acesteia pentru ca apoi graficul ei să se traseze prin translații paralele pe mulțimea D .

III. Limite la capetele intervalor, continuitatea funcției, asymptote. Dacă mulțimea D este nemărginită, atunci se calculează (dacă există) limita funcției f la $+\infty$ (sau și la $-\infty$), se determină (dacă există) asymptotele orizontale, oblice ale graficului funcției f .

Dacă D este o reuniune de intervale, atunci se calculează limitele laterale ale funcției f la capetele fiecărui dintre aceste intervale. Simultan se determină eventualele asymptote verticale. De asemenea, se determină mulțimea de puncte ale mulțimii D în care funcția f este continuă, iar în punctele de discontinuitate se calculează limitele laterale.

IV. Derivata întâi. Se calculează f' . Se stabilește mulțimea $D_{f'}$ pe care funcția f este derivabilă. Se rezolvă ecuația $f'(x)=0$, adică se determină punctele critice ale funcției f . Soluțiile acestei ecuații, precum și punctele în care funcția f nu este derivabilă sau în care derivata ei este infinită, sînt eventualele puncte de extrem local ale acestei funcții. Ele divizează mulțimea D într-un număr finit (sau infinit) de intervale. Se studiază semnul funcției f' pe fiecare dintre intervalele obținute. Astfel se stabilesc intervalele de monotonie, punctele de extrem local și extremele locale ale funcției f .

Dacă funcția f este de două ori derivabilă, atunci, pentru trasarea graficului ei cu o exactitate sporită, se execută etapa V.

V. Derivata a doua. Se calculează f'' și se rezolvă ecuația $f''(x)=0$. Soluțiile acestei ecuații, precum și punctele în care derivata a doua nu există sau este infinită, sînt eventualele puncte de inflexiune ale funcției f . Se stabilesc intervalele pe care derivata a doua are semn constant, se determină semnul funcției f'' pe aceste intervale (acestea fiind intervale de concavitate și/sau de convexitate ale funcției f) și se determină punctele ei de inflexiune.

VI. Tabloul de variație¹ al funcției f include rezultatele obținute în etapele I–V.

În linia întâi se trece informația referitoare la domeniul de definiție al funcției f și la valorile remarcabile ale lui x (zerourile derivatelor întâi și a doua, punctele în care derivele f' și f'' nu există sau sunt infinite).

În linia a doua se trece informația referitoare la derivata întâi, obținută în etapa a IV-a. În coloana fiecărui zerou al derivatei se scrie 0. Se scrie semnul derivatei pe intervalele obținute.

În linia a treia se trece informația referitoare la derivata a doua, obținută în etapa a V-a. În coloana fiecărui zerou al derivatei a doua se scrie 0. Se scrie semnul derivatei a doua pe intervalele obținute.

În ultima linie, prin săgeți „↗”, „↘” se notează monotonia funcției f , iar simbolurile „↙”, „↗” arată convexitatea, respectiv concavitatea ei; literele \bar{m} , \bar{M} sau i semnifică faptul că punctul respectiv este punct de minim local, de maxim local sau punct de inflexiune.

VII. Trasarea graficului¹. Într-un sistem de axe ortogonale xOy se trasează întâi asymptotele graficului funcției f (dacă acestea există), apoi punctele remarcabile $(x, f(x))$ din tabloul de variație al funcției f . Punctele remarcabile ale graficului funcției f se unesc

¹ Informațiile ce țin de periodicitatea, concavitatea, convexitatea funcției, de derivata a doua a funcției și de punctele de inflexiune ale acesteia se referă numai la profilul real.

prinț-o linie curbă, ținîndu-se cont de paritatea, periodicitatea, monotonia, asimptotele, convexitatea și/sau concavitatea funcției f .

Observație. Etapa a V-a poate fi omisă în cazul unor dificultăți de calcul.

În continuare vom trasa graficele unor funcții, parcurgînd sistematic etapele menționate.

Exerciții rezolvate

1. Să se traseze graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$;

b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$; c) $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

Rezolvare:

a) I. Domeniul maxim de definiție al funcției f este \mathbb{R} .

Pentru $x=0$ avem $f(0)=0$. $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 3\}$. Așadar, graficul funcției f trece prin originea sistemului de axe ortogonale xOy și intersectează axa Ox în punctul $x_0 = 3$.

II. Funcția f nu este nici pară, nici impară, deoarece $f(-x) = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x$ și $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$. Cum $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 9x) = \frac{1}{3}x(x-3)^2$, rezultă că $f(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$ și $f(x) \leq 0$ pentru $x \leq 0$.

III. Funcția f este continuă pe multimea \mathbb{R} , deci asimptote verticale nu are.

Calculăm limitele la capetele intervalului $(-\infty, +\infty)$. Avem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x(x-3)^2 = -\infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x(x-3)^2 = +\infty.$$

Astfel, graficul funcției f nu are asimptote oblice și nici orizontale.

IV. $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 3\}$. Punctele $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$ sunt puncte critice.

V. Renunțăm la studiul derivatei a două, întrucât acest exemplu este prevăzut și pentru profilul umanistic.

VI. Alcătuiam tabloul de variație al funcției f :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	\nearrow	\overline{M}	\searrow	\overline{m}	\nearrow

Constatăm că $\overline{M} = f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}$,
 $\overline{m} = f(3) = 9 - 18 + 9 = 0$.

VII. Graficul funcției f este reprezentat în figura 5.14.

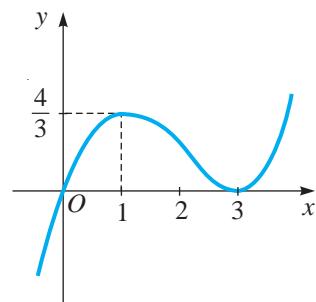


Fig. 5.14

b) I. Domeniul maxim de definiție al funcției f este multimea \mathbb{R} .

Graficul funcției f intersectează axele de coordonate numai în originea lor.

II. Funcția f nu este periodică; f este impară, deoarece este definită pe \mathbb{R} și $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, este suficient să restrângem domeniul de studiu (\mathbb{R}) la multimea $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

III. Funcția f este continuă pe \mathbb{R} . Limitele ei la capetele intervalului $(-\infty, +\infty)$ sunt $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$. Așadar, dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ și la $+\infty$ a graficului funcției f .

IV. $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ecuația $f'(x)=0$ are soluțiile $x_1=-1$ și $x_2=1$

(punctele critice ale funcției f). Pentru $x > 0$ se acceptă numai $x_2=1$. Evident, $f(1)=0,5$.

V. $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. Soluția ecuației $f''(x)=0$ pentru $x > 0$ este $x_3=\sqrt{3}$.

VI. Tabloul de variație al funcției f pentru $x \geq 0$ este cel alăturat, în care $\bar{M}=f(1)=0,5$ este un maxim local, iar $\sqrt{3}$ este un punct de inflexiune. Punctul 0 este de asemenea un punct de inflexiune.

x	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f'	+	0	-	-
f''	0	-	-	0
f	$i \curvearrowright$	$\bar{M} \curvearrowright$	$i \curvearrowright$	

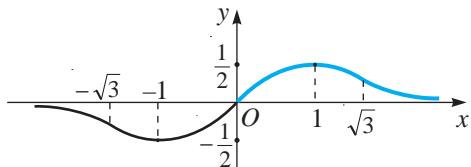


Fig. 5.15

VII. Trasăm graficul funcției f pe \mathbb{R}_+ (fig. 5.15). Cum funcția f este impară, construim, față de originea sistemului de axe ortogonale xOy , simetricul graficului trasat pe multimea \mathbb{R}_+ și obținem graficul funcției f pe multimea \mathbb{R} .

c) I. $D = \mathbb{R}$. Pentru $x=0$ avem $f(0)=0$. $f(x)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Graficul funcției f intersectează axa Oy în origine, iar axa Ox – în punctele $x_k=k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

II. Funcția f este impară, periodică cu perioada principală 2π . Deci, vom studia funcția f pe $[0, 2\pi]$, iar la trasarea graficului ei vom ține cont de simetria acestuia față de originea sistemului de coordonate și de periodicitatea funcției f .

III. Funcția f este continuă, asimptote nu are.

IV. $f'(x) = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$. Ecuația $f'(x)=0$ pe $[0, 2\pi]$ are două soluții: $x_1=\frac{2\pi}{3}$ și $x_2=\frac{4\pi}{3}$.

V. Fiind complicat, renunțăm la studiul derivatei a două.

VI. Alcătuim tabloul de variație al funcției f (pe $[0, 2\pi]$):

$$\text{Constatăm că } \overline{M} = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\overline{m} = f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
f'	+	0	-	0
f	↗	M	↘	m

VII. Trasăm graficul funcției f pe $[0, 2\pi]$, apoi, prin translații, îl prelungim pe mulțimea \mathbb{R} periodic cu perioada 2π . O porțiune a graficului funcției f este reprezentată în figura 5.16.

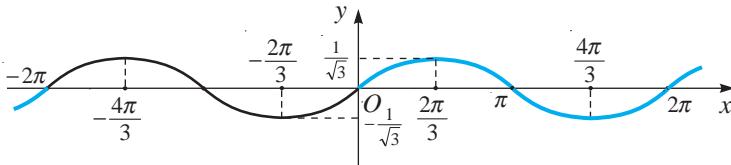


Fig. 5.16

2. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se traseze graficul funcției f , știind că el trece prin punctul de coordonate $(1, 1)$.

Rezolvare:

I. Cum punctul $(1, 1) \in G_f$, obținem: $f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{1(1+a)} = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

Așadar, $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)}$ și domeniul maxim de definiție al funcției f este mulțimea $D = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty).$$

Graficul funcției f nu intersectează axele de coordonate.

II. Funcția f nu este periodică; f nu este nici pară, nici impară; $f(x) \geq 0$ dacă și numai dacă $x(x+2) > 0$ ($x \in D$), adică $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, și $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$.

III. Funcția f este continuă pe D . Limitele ei la capetele intervalului $(-2, 0)$ sunt:

$$l_s(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)} = +\infty, \quad l_d(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)} = -\infty,$$

$$l_s(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)} = -\infty, \quad l_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)} = +\infty.$$

Prin urmare, dreptele de ecuații $x = -2$ și $x = 0$ sunt asymptote verticale la stânga și la dreapta pentru graficul funcției f .

Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)} = 2$, rezultă că dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ și la $+\infty$ pentru graficul funcției f .

IV. $f'(x) = \frac{4x^2 - 2x - 2}{x^2(x+2)^2}, \quad \forall x \in D$ și $f'(x) = 0$ dacă $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$.

V. Fiind complicat, renunțăm la studiul derivatei a două.

VI. Tabloul de variație al funcției f este următorul:

Constatăm că $\bar{m} = f(1) = 1$ și

$$\bar{M} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
f'	+	+	+	0 -	-	0 +
f	\nearrow	\nearrow	$\nearrow \bar{M}$	\searrow	$\searrow \bar{m}$	\nearrow

VII. Graficul funcției f este reprezentat în figura 5.17.

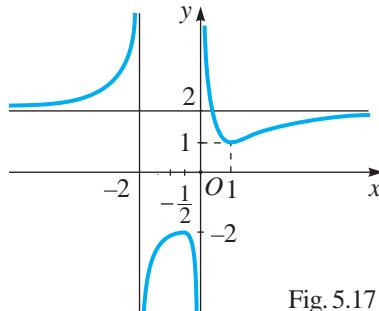


Fig. 5.17

Exerciții propuse

A

1. Să se traseze graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = -2x^2 + x + 1$; b) $f(x) = x^2 + 3x - 4$;
 c) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; d) $f(x) = x^2(x-1)^2$.

B

2. Să se traseze graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (în cazul unor eventuale dificultăți de calcul, etapa cu derivata a două poate fi omisă):

- a) $f(x) = x \ln x$; b) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$; c) $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$;
 d) $f(x) = e^{-x^2}$; e) $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$; f) $f(x) = \frac{|1-x^2|}{x}$;
 g) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$; h) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

3. Știind că suma lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egală cu a :

- a) să se exprime aria acestui triunghi în funcție de lungimea unei catete;
 b) să se construiască graficul funcției obținute;
 c) să se determine aria maximă a acestui triunghi (cea mai mare valoare a funcției obținute).

§4 Aplicații ale derivatelor în fizică, geometrie și economie. Probleme de maxim și minim

Vom aplica rezultatele teoretice obținute anterior privind determinarea punctelor de extrem ale unor funcții. Astfel, vom exemplifica eficacitatea aplicării metodelor analizei matematice la rezolvarea unor probleme de fizică, geometrie, economie etc. ce au ca obiectiv determinarea parametrilor optimi de funcționare a unor sisteme tehnice, economice, care ar asigura un randament maxim, o putere maximă, ar optimiza consumul de energie, de timp, ar minimaliza pierderile. Rezolvând atare probleme, se realizează un anumit procedeu, numit **optimizare**, care constă în alegerea și în aplicarea celei mai potrivite soluții din mai multe posibile, în selectarea parametrilor ce corespund maximului sau minimului unei funcții. Menționăm că rezolvarea unor astfel de probleme nu întotdeauna este posibilă dacă sînt folosite doar metodele algebrei sau geometriei elementare.

Pentru a determina valoarea maximă sau minimă a unei mărimi, vom exprima valorile acesteia printr-o funcție, apoi vom studia variația funcției obținute.

Probleme rezolvate

1. Dintr-o bucată de tablă de formă dreptunghiulară cu laturile de 50 cm și 80 cm se decupează în fiecare colț un pătrat, apoi se îndoae marginile formate. Se obține o cutie de formă unui paralelipiped dreptunghic fără capac. Să se determine înălțimea cutiei, astfel încît volumul ei să fie maxim.

Rezolvare:

Notăm cu x lungimea laturii pătratului decupat și calculăm volumul $\mathcal{V}(x)$ al cutiei obținute:

$$\mathcal{V}(x) = x(50 - 2x)(80 - 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x,$$

unde x variază în intervalul $\left[0, \frac{50}{2}\right] = [0, 25]$. Astfel, problema se reduce la determinarea celei mai mari valori a funcției $\mathcal{V}: [0, 25] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{V}(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$.

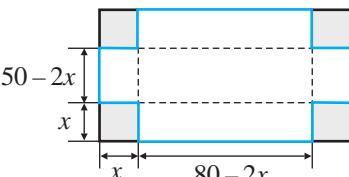


Fig. 5.18

Aflăm extremele funcției \mathcal{V} . Avem $\mathcal{V}'(x) = 12x^2 - 520x + 4000$. Rezolvăm ecuația $\mathcal{V}'(x) = 0$ și obținem că în $[0, 25]$ ea are o soluție unică: $x_0 = \frac{130 - \sqrt{4900}}{6} = 10$.

Cum $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}(25) = 0$, rezultă că în punctul x_0 funcția \mathcal{V} ia cea mai mare valoare.

Răspuns: Cutia are volum maxim dacă înălțimea ei este de 10 cm.

2. Dintre toate dreptunghiurile cu același perimetru $2a$, să se afle cel cu aria maximă.

Rezolvare:

Fie x lungimea laturii AB a dreptunghiului $ABCD$, $AD > AB$ (fig. 5.19). Atunci $AD = \frac{2a - 2x}{2} = a - x$. Aria dreptunghiului $ABCD$ este $\mathcal{A}(x) = x(a - x) = -x^2 + ax$.

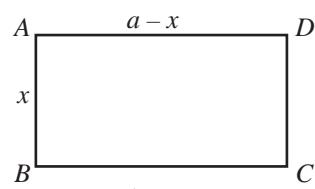


Fig. 5.19

Considerăm funcția $\mathcal{A}: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(x) = -x^2 + ax$.

Atunci $\mathcal{A}'(x) = -2x + a$. $\mathcal{A}'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

Obținem tabloul de variație al funcției $A: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$:

Dreptunghiul $ABCD$ are aria maximă $\mathcal{A}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$ dacă el este un pătrat cu latura $\frac{a}{2}$.

Răspuns: $\mathcal{A}_{\max} = \frac{a^2}{4}$ unități pătrate.

x	0	$\frac{a}{2}$	a
$\mathcal{A}'(x)$	+	0	-
$\mathcal{A}(x)$	↗	$\frac{a^2}{4}$	↘

Consecință. Dacă suma a două numere pozitive este cunoscută, produsul lor este maxim în cazul în care numerele sunt egale.

Se poate demonstra că suma a două numere pozitive, cu produsul lor constant, este minimă dacă numerele sunt egale.

3. Să se determine coordonatele punctului graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, aflat la distanță minimă de punctul $M(10, 5)$ (fig. 5.20).

Rezolvare:

Orice punct A al graficului funcției f are abscisa x și ordonata $x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Notăm cu $\varphi(x)$ distanța dintre punctele M și A și obținem:

$$\varphi(x) = \sqrt{(x-10)^2 + (x^2 + 3 - 5)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 20x + 104}.$$

Problema se reduce la determinarea minimului funcției

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 20x + 104}.$$

$$\text{Avem: } \varphi'(x) = \frac{2x^3 - 3x - 10}{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 20x + 104}} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Punctul $x_0 = 2$ este punct de minim local pentru funcția φ , deoarece $\varphi' < 0$, dacă $x < 2$, și $\varphi' > 0$, dacă $x > 2$.

Atunci $f(2) = 2^2 + 3 = 7$. Astfel, coordonatele punctului A sunt 2 și 7.

Răspuns: Punctul are coordonatele 2 și 7.

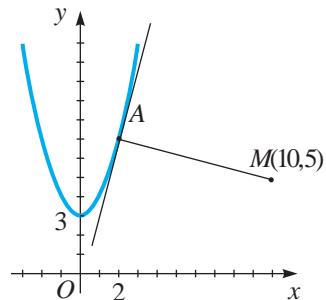


Fig. 5.20

4. Un lot de pămînt de formă dreptunghiulară trebuie îngrădit, știind că dintr-o parte este deja construit gard. Prețul unui metru de gard paralel cu gardul deja construit este de 100 lei, iar al unui metru de restul gardului – de 150 lei. Să se determine aria maximă care poate fi îngrădită, dacă se dispune de 18000 lei.

Rezolvare:

Fie x și y dimensiunile lotului, atunci, din condiția problemei, avem:

$$100 \cdot x + 2 \cdot 150 \cdot y = 18000 \Leftrightarrow x + 3y = 180 \Leftrightarrow y = 60 - \frac{x}{3}.$$

$$\text{Aria lotului } \mathcal{A}(x) = x \cdot y = x \left(60 - \frac{x}{3}\right). \quad \mathcal{A}'(x) = 60 - \frac{2}{3}x.$$

Pentru $\mathcal{A}'(x) = 0$ obținem $60 - \frac{2}{3}x = 0 \Leftrightarrow x = 90$.

Deoarece $\mathcal{A}''(x) = -\frac{2}{3} < 0$, rezultă că în $x = 90$ funcția $\mathcal{A}(x)$ are un maximum.

Prin urmare, aria maximă care poate fi îngădătită $\mathcal{A}_{\max} = 90 \cdot \left(60 - \frac{90}{3} \right) = 2700 (\text{m}^2)$.

Răspuns: 2700 m^2 .

5. Să se determine traseul cel mai economic pentru construirea unei căi ferate între localitățile A și B , știind că o porțiune de lungime d a ei trebuie construită paralel și în imediata vecinătate a unei şosele.

Rezolvare:

Fie h_1, h_2 distanțele dintre A , respectiv B , și şosea, a – distanța dintre proiecțiile punctelor A și B pe direcția şoselei (fig. 5.21).

Evident, costul traseului este direct proporțional cu lungimea traseului $L(x)$. Din figură avem:

$$L(x) = AM + MN + NB = \sqrt{x^2 + h_1^2} + d + \sqrt{h_2^2 + (a-x-d)^2}.$$

$$\text{Avem } L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{a-x-d}{\sqrt{h_2^2 + (a-x-d)^2}}.$$

$$\text{Soluțiile ecuației } L'(x) = 0 \text{ sunt } x_1 = \frac{(a-d)h_1}{h_1 + h_2}, \quad x_2 = \frac{(a-d)h_1}{h_1 - h_2}.$$

În punctul $x_1 = \frac{(a-d)h_1}{h_1 + h_2}$, funcția $L(x)$ are un minim, deoarece $L''(x_1) > 0$.

$$\text{Așadar, } L_{\min} = L(x_1) = \sqrt{(a-d)^2 + (h_1 + h_2)^2} + d.$$

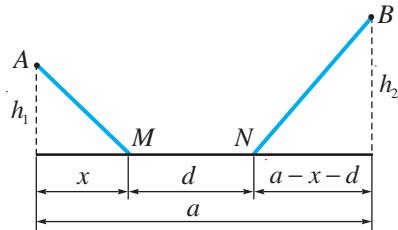


Fig. 5.21

6. Cererea pe piață pentru un produs este descrisă de funcția definită prin formula $p(x) = 780 - 2x - 0,1x^2$, unde x este numărul de unități de produs, iar p – prețul (în lei).

Cheltuielile medii de fabricare a unei unități de produs se descriu de funcția definită prin formula $\bar{C}(x) = \frac{1000}{x} + 500 + 2x$. (Funcția cererii și funcția cheltuielilor medii se determină în baza datelor statistice.)

Să se determine beneficiul brut maxim obținut din vînzarea produsului și prețul respectiv.

Rezolvare:

Beneficiul brut $B(x)$ este egal cu diferența dintre prețul de vînzare și cheltuielile de fabricare a produsului, adică $B(x) = p(x) \cdot x - \bar{C}(x) \cdot x =$

$$= (780 - 2x - 0,1x^2)x - \left(\frac{1000}{x} + 500 + 2x \right)x = 280x - 4x^2 - 0,1x^3 - 1000.$$

$$\text{Derivata } B'(x) = 280 - 8x - 0,3 \cdot x^2.$$

Din $B'(x) = 0$ obținem ecuația $0,3x^2 + 8x - 280 = 0$, cu soluțiile $x_1 = 20$, $x_2 = -\frac{28}{0,6}$

(care nu corespunde condiției problemei). Deoarece $B''(20) < 0$, în punctul $x = 20$ avem maxim. Astfel, obținem beneficiul brut maxim $B(20) = 280 \cdot 20 - 4 \cdot 20^2 - 0,1 \cdot 20^3 - 1000 = 2200$ (lei) și prețul respectiv $p(20) = 780 - 2 \cdot 20 - 0,1 \cdot 20^2 = 700$ (lei).

Răspuns: 2200 lei; 700 lei.

7. Un camion trebuie să parcurgă 100 km cu o viteză medie de v km/h (cu condiția că $40 \leq v \leq 70$), consumând $\left(8 + \frac{v^2}{300}\right)$ litri/h de benzină. Să se afle viteza optimă (pentru care cheltuielile sunt minime), știind că șoferul este retribuit cu 30 lei/h, iar benzina costă 12 lei/litrul.

Rezolvare:

Distanța a fost parcursă în $\frac{100}{v}$ ore, în care s-au consumat $\left(8 + \frac{v^2}{300}\right) \cdot \frac{100}{v} = \frac{v^2 + 2400}{3v}$ litri de benzină. În aceste condiții, cheltuielile totale pentru întregul parcurs sunt

$$c(v) = 30 \cdot \frac{100}{v} + 12 \cdot \frac{v^2 + 2400}{3v} = \frac{4v^2 + 13600}{v} \text{ (lei).}$$

Viteza optimă este cea pentru care cheltuielile totale sunt minime. Rezolvăm ecuația $c'(v) = \frac{4v^2 - 13600}{v^2} = 0$ și obținem $v_0 = \sqrt{3400} \approx 58,31$ (km/h). Prin urmare, pentru această valoare a vitezei cheltuielile totale sunt minime.

Răspuns: $v_{\text{optim}} \approx 58,31$ km/h.

8. Un muncitor trebuie să deplaseze o piesă de bronz pe o placă de fontă așezată pe un plan orizontal, cu ajutorul unei forțe \vec{Q} . Masa piesei este de 100 kg, iar coeficientul de frecare dintre bronz și fontă $\mu = 0,2$. Să se determine măsura unghiului α , format de direcția forței și planul orizontal, astfel încât forța \vec{Q} necesară acestei deplasări să fie minimă.

Rezolvare:

Din figura 5.22 se constată că echilibrul dinamic al forțelor de frecare \vec{F} , de tracțiune \vec{Q} , de greutate \vec{G} și de reacție \vec{N} este asigurat dacă:

$$\begin{cases} Q \cos \alpha - F = 0, \\ N + Q \sin \alpha - G = 0. \end{cases}$$

Din acest sistem, substituind formula pentru forța de frecare $F = \mu N$, determinăm funcția $Q(\alpha)$, al cărei minim trebuie aflat:

$$Q(\alpha) = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

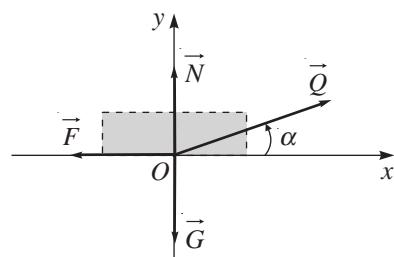


Fig. 5.22

Astfel, problema se reduce la determinarea celei mai mici valori a funcției $Q: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(\alpha) = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$.

Aflăm extretele funcției Q . Avem $Q'(\alpha) = -\frac{\mu G(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2}$. Soluția ecuației $Q'(\alpha) = 0$ este $\alpha = \arctg \mu$. Pentru această valoare funcția $Q(\alpha)$ are un minim:

$$Q_{\min} = Q(\arctg \mu) = \frac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Substituind datele problemei, obținem:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx 0,2; \quad \alpha \approx 11^\circ 20' \text{ și } Q = \frac{0,2 \cdot 100}{\sqrt{1+0,2^2}} \approx 19,6 \text{ kg.}$$

Răspuns: $\approx 11^\circ 20'$.

9. Să se determine înălțimea la care trebuie așezată o sursă de lumină deasupra unei platforme circulare de rază a pentru ca iluminarea platformei să fie maximă, știind că intensitatea luminoasă I pe direcția verticală este constantă, iar iluminarea¹ E este dată de formula $E = \frac{I \cdot \cos \alpha}{r^2}$, unde α este unghiul de incidentă a razeelor pe această suprafață.

Rezolvare:

Notăm cu x distanța de la sursa de lumină pînă la platformă. Din figura 5.23 obținem:

$$r^2 = a^2 + x^2 \text{ și } \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Prin urmare, funcția al cărei maxim trebuie determinat este $E = E(x) = \frac{I \cdot x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad x \in (0, +\infty)$.

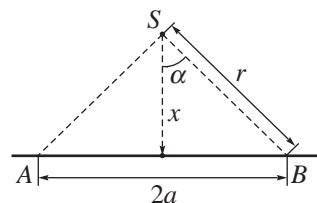


Fig. 5.23

Egalînd derivata cu zero, obținem:

$$E'(x) = I \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + x^2)^3} = 0,$$

soluția fiind $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Pentru această valoare funcția $E(x)$ are un maxim: $E_{\max} = \frac{2I}{3\sqrt{3}a^2}$.

Răspuns: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

10. Care trebuie să fie rezistența unui circuit extern, astfel încît sursa de curent cu tensiunea electromotoare $\varepsilon = 10 \text{ V}$ și rezistența internă $r = 20 \Omega$ să debiteze o putere maximă? Care este valoarea numerică a acestei puteri?

Rezolvare:

Notăm cu x rezistența circuitului extern și cu P puterea curentului electric pe circuitul extern. Atunci, conform formulei pentru puterea curentului, avem: $P = I^2 x$, unde I este intensitatea curentului, care poate fi determinată din legea lui Ohm: $I = \frac{\varepsilon}{x+r}$.

¹ Unitatea de măsură pentru iluminare este luxul (lx).

Deci, obținem funcția $P(x) = \frac{\varepsilon^2 \cdot x}{(x+r)^2}$, $x \in (0, +\infty)$, a cărei derivată

$$P'(x) = \varepsilon^2 \frac{(x+r)^2 - 2x(x+r)}{(x+r)^4} = \varepsilon^2 \frac{r-x}{(x+r)^3}$$

se anulează pentru $x=r$. În $x=r$ funcția $P(x)$ are un maximum. Substituind datele problemei, obținem $P_{\max} = P(r) = \frac{\varepsilon^2}{4r} = \frac{5}{4}$ W.

Răspuns: $x=r$, $P_{\max} = \frac{5}{4}$ W.

Probleme propuse

A

- Un punct material se mișcă rectiliniu conform legii $s(t) = 12t - t^3$ (s este distanța exprimată în metri, iar t – timpul exprimat în secunde).
 - Care este viteza punctului material în momentul inițial?
 - Peste cât timp de la plecare punctul material se va opri? Care este distanța parcursă pînă în acel moment?
- Un element galvanic de tensiune electromotoare E și rezistență interioară r produce un curent de intensitate I într-un circuit extern de rezistență R . Intensitatea curentului este dată de relația $I = \frac{E}{r+R}$. Puterea efectivă a elementului galvanic este $P(R) = RI^2 = \frac{RE^2}{(r+R)^2}$. Să se determine rezistența R pentru care puterea P este maximă.
- Într-un triunghi cu o latură de lungime a și înălțimea corespunzătoare acesteia h se înscrie un dreptunghi, astfel încît una dintre laturile sale este conținută de această latură. Să se afle aria maximă a dreptunghiului.
- Prețul unei unități de produs este de 225 lei. Cheltuielile de fabricare $C(x)$ sunt date de funcția definită prin formula $C(x) = 95x + x^2$, unde x este numărul de unități de produs fabricate. Să se determine beneficiul brut maxim.

B

- Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = at^3 + bt + c$. Să se determine viteza și accelerarea mobilului în momentul t .
- Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = t^3 - 6t^2 + 2$. Să se determine:
 - momentul în care accelerarea sa este nulă;
 - valoarea minimă a vitezei mobilului.
- Cheltuielile de fabricare ale unui produs se descriu de funcția definită prin formula $C(x) = 5 + 36x$, iar cererea – de funcția definită prin formula $p(x) = -x^2 + 18x + 3$, $9 < x < 13$. Să se determine numărul de unități de produs, x , pentru care beneficiul brut este maxim, precum și valoarea acestuia.

Exerciții și probleme recapitulative

A

1. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = x^3 + 6x^2$; b) $f(x) = x^3 - \frac{x}{3}$; c) $f(x) = (x+1)^2$; d) $f(x) = x^2 + x + 1$.
2. Să se determine intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale și să se alcătuiască tabloul de variație al funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = x^2 + 2x$; b) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$; c) $f(x) = (x-1)^2(x+2)^2$;
 - $f(x) = (x+1)^3(x-2)^2$; e) $f(x) = 3+x-x^2$; f) $f(x) = x^4 - 4x + 2$.
3. Să se afle punctele de extrem local și extremele locale ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = x^2 + 2x + 1$; b) $f(x) = x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 8$; c) $f(x) = x^3 - 12x + 4$;
 - $f(x) = x^3 + x - 4$; e) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^3 - 4x + 1$; f) $f(x) = x^2(x+1)^3$.
4. Pe intervalul indicat, să se determine extremele globale ale funcției $f: I \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$, $I = [0; 1]$; b) $f(x) = x^3 - x + 2$, $I = [0; 2]$.
5. Să se traseze graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$; b) $f(x) = x^2 + 2x + 2$.
6. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 - 2$. Să se reprezinte grafic funcția f , știind că:
- graficul trece prin punctul $(1, 1)$;
 - în punctul $x=1$ funcția f are un extrem local.
7. Costul unui lot de produse este de 240 lei. Cheltuielile de fabricare sunt descrise de funcția definită prin formula $C(x) = 3x^2 + 6x + 120$, unde x este numărul de unități de produs. Să se determine beneficiul brut maxim.
- Indicație:* Beneficiul brut $B(x)$ se exprimă prin formula $B(x) = 240x - C(x)$.

B

8. Să se arate că:
- $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \begin{cases} 2\arctgx, & \text{dacă } x \in [0, +\infty) \\ -2\arctgx, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \end{cases}$
 - $\arctg \frac{1+x}{1-x} = \arctgx + \frac{\pi}{4}$, $x \in (-\infty, 1)$;
 - $2\arctgx - \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0$, $x \in (-1; 1)$.
9. Să se afle intervalele de monotonie și extremele locale și globale ale funcției:
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x+1|$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;
 - $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$.
10. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx - \ln(1+x^2)$ să fie descrescătoare pe \mathbb{R} .

11. Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + mx)e^{-x}$ are un maxim și un minim local.

12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfacă condițiile:

a) f este derivabilă pe \mathbb{R} ; b) există $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$; c) există $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

Să se arate că $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Indicație. Aplicații regula lui l'Hospital pentru calculul limitei $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x}$.

13. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{mx^2 - 1}{x - 1}$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile lui m , astfel încât:

- a) funcția să fie strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, 1)$; $(1, +\infty)$;
- b) funcția să fie strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele specificate în a);
- c) funcția să admită puncte de extrem;
- d) graficul funcției să nu aibă asymptote.

14. Să se determine intervalele de convexitate și concavitate ale funcției:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2$; b) $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;
 c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$; d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + |x|$.

15. Să se determine punctele de inflexiune ale funcției:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$
 c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x$; d) $f: (-\infty, -1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;
 e) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |\ln x - 1|$; f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x|$.

16. Să se determine asymptotele graficului funcției: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, D fiind domeniul maxim de definiție:

a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$; b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$; c) $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$;
 d) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$; e) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; f) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

17. Să se afle numerele reale a, b , știind că dreapta $y = 2x + 3$ este asymptotă spre $+\infty$ pentru funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x^2 + ax + 1}{bx + 1}$.

18. Să se traseze graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$; b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$; c) $f(x) = \frac{x^2}{3x-2}$;
 d) $f(x) = \frac{\ln x}{x-2}$; e) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$; f) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$.

19. Cheltuielile de fabricare (în lei) ale unui produs se descriu de funcția definită prin formula $C(x) = 1 + 76x$, iar cererea – de funcția definită prin formula $p(x) = -x^2 + 42x - 80$, $2 \leq x \leq 40$. Să se determine numărul de unități de produs, x , care trebuie fabricate pentru a obține un beneficiu maxim, precum și valoarea acestui beneficiu.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

A

1. Determinați intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale și completați tabloul de variație al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x$. (4)

2. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 2$. (3)

3. Prețul unei unități de produs este de 160 lei. Cheltuielile de producție sunt descrise de funcția $C(x) = 3x^2 + 34x + 450$, unde x – numărul de unități de produs. Determinați beneficiul maxim. (3)

Indicație. Beneficiul $B(x) = 160 \cdot x - C(x)$.

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

B

1. Determinați intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale și completați tabloul de variație al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. (4)

2. Determinați, pe intervalul $I = [-1, 2]$, extremele globale ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, (2)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } -1 \leq x \leq 0 \\ 2\ln x, & \text{dacă } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

3. Trasați graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. (2)

4. Cunoscând funcția cererii $p(x) = 800 - 0,5x$ și funcția ofertei $p_1(x) = 700 + 2x$ (x – numărul de unități de produs), determinați mărimea impozitului pentru fiecare unitate de produs, astfel încât venitul din impozitare să fie maxim. (2)

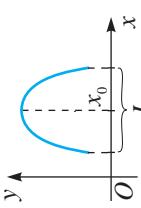
Indicație. Venitul din impozitare a x unități de produs se exprimă prin formula $V(x) = (p(x) - p_1(x))x$.

Aplicații ale derivatelor

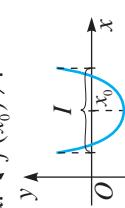
Rolul derivatei în studiul funcțiilor

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, derivabilă pe I .

- Dacă $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, atunci $f(x)$ este constantă pe I .
- Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, atunci $f(x)$ este crescătoare (crescătoare) pe I dacă și numai dacă $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in I$.
- Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, și $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este punct de maxim local al funcției f . Se notează: $\nearrow f(x_0) \searrow$.



- Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, și $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este punct de minim local al funcției f . Se notează: $\searrow f(x_0) \nearrow$.



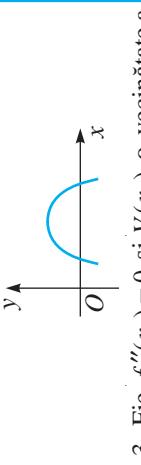
- Punctele de maxim local și de minim local ale unei funcții se numesc **puncte de extremă locală** ale acestei funcții.
- Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt eventualele puncte de extremă locală ale funcției f .

Probleme de maxim și minimum

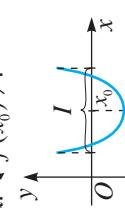
Rolul derivatei a două în studiul funcțiilor

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, derivabilă pe I .

- Dacă $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția f este convexă pe I .
- Funcția f este crescătoare (crescătoare) pe I dacă și numai dacă $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in I$.
- Dacă $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția f este concavă pe I .



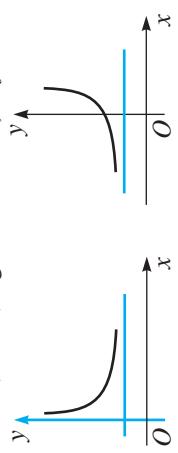
- Fie $f''(x_0) = 0$ și $V(x_0)$ o vecinătate a punctului $x_0 \in I$. Dacă $f''(x) < 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x < x_0$, și $f''(x) > 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x > x_0$, sau invers ($f''(x) > 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x < x_0$, și $f''(x) < 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x > x_0$), atunci x_0 este punct de inflexiune al funcției f .



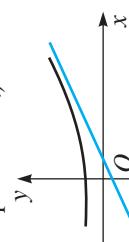
- Punctele de maxim local și de minim local ale unei funcții se numesc **puncte de extremă locală** ale acestei funcții.
- Soluțiile ecuației $f''(x) = 0$ sunt eventualele puncte de inflexiune ale funcției f .

Asimptote

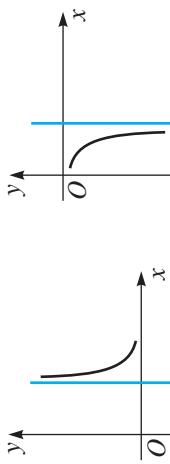
- Dacă $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$), atunci dreapta de ecuație $y = l$ este **asimptotă orizontală la $+\infty$** (la $-\infty$) a graficului funcției f .



- Dacă există și sunt finite limitele $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ($m \neq 0$) și $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$, atunci dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$, este **asimptotă oblică la $+\infty$** a graficului funcției f . (Similar pentru $-\infty$)



- Dacă $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$) este $+\infty$ sau $-\infty$, atunci dreapta de ecuație $x = a$ este **asimptotă verticală la stînga** (dreapta) a graficului funcției f .



Obiective

- ⇒ utilizarea numerelor complexe, a numerelor reale scrise sub diferite forme, a terminologiei aferente în diverse contexte;
- ⇒ utilizarea operațiilor cu numere complexe și numere reale, a proprietăților comune ale acestora în rezolvări de probleme și exerciții;
- ⇒ aplicarea unor algoritmi specifici calculului cu numere complexe pentru rezolvarea ecuațiilor (de gradul II, *bipătratice, *binome, *trinome, *reciproce) în mulțimea **C**;
- ⇒ *rezentarea geometrică a numerelor complexe, a modulelor numerelor complexe și aplicarea acestor reprezentări în rezolvări de probleme;
- ⇒ *determinarea rădăcinilor de ordinul n , $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, ale unui număr complex scris sub formă trigonometrică sau sub formă algebrică.

§1 Operări cu numere complexe reprezentate sub formă algebrică

Din cursul gimnazial de matematică se știe că ecuația de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, are soluții reale dacă și numai dacă discriminantul ei este nenegativ. Dacă însă discriminantul ei este negativ (de exemplu, discriminanții ecuațiilor $3x^2 - x + 4 = 0$,



Carl Friedrich Gauss

$x^2 + 1 = 0$), atunci ecuația nu are soluții reale, deoarece în \mathbb{R} nu există rădăcini de ordinul doi ale unui număr negativ. Pentru ca să existe soluții ale tuturor ecuațiilor de acest tip, matematicienii din secolul al XVI-lea utilizează expresii de forma $\sqrt{-a}$, $a \in \mathbb{R}_+$. În secolul al XVIII-lea, L. Euler introduce notația $\sqrt{-1} = i$ (i de la cuvântul latin „imaginarius”). Astfel, mulțimea numerelor reale se extinde la mulțimea numerelor de forma $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, numite în secolul al XIX-lea de C. F. Gauss¹ *numere complexe*.

Definiție. Se numește **număr complex** expresia de forma $a + bi$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, iar i este un simbol cu proprietatea $i^2 = -1$.

¹ Carl Friedrich Gauss (1777–1855) – matematician, fizician și astronom german.

Vom nota mulțimea numerelor complexe cu \mathbf{C} , deci $\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Prin urmare, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbf{C}$.

Dacă $z = a + bi$, atunci se spune că numărul complex z este scris sub **formă algebraică** (se admite și scrierea $z = a + ib$). Numărul a se numește **partea reală** a numărului $z = a + bi$ și se notează cu $\operatorname{Re} z$, iar b se numește **partea imaginară** a lui z și se notează cu $\operatorname{Im} z$.

Numerele complexe $z_1 = a + bi$ și $z_2 = c + di$ se consideră **egale** dacă și numai dacă $a = c$ și $b = d$. Numărul de forma $a + 0i$ se identifică cu numărul real a . Prin urmare, mulțimea numerelor reale este o submulțime a mulțimii numerelor complexe. Numărul de forma $0 + bi$, $b \neq 0$, se numește **pur imaginar** și se notează bi . Numărul complex $i = 0 + 1i$ se numește **unitate imaginară**, însă ea nu ține de efectuarea unor măsurări. Acest număr este o soluție în \mathbf{C} a ecuației $x^2 + 1 = 0$ (ecuație care nu are soluții în \mathbb{R}).

Exercițiu rezolvat

Să se determine numerele $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $2 + 3i + (x + yi) = 5 + 7i$.

Rezolvare:

$$2 + 3i + (x + yi) = 5 + 7i \Leftrightarrow (2 + x) + (3 + y)i = 5 + 7i.$$

Egalând părțile reale și respectiv cele imaginare, obținem: $\begin{cases} 2 + x = 5 \\ 3 + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 4. \end{cases}$

Definim **operațiile de adunare, scădere și înmulțire** a numerelor complexe în modul următor:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i;$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Adunarea (scăderea) se efectuează adunând (scăzând) între ele părțile reale și respectiv părțile imaginare ale numerelor. Scăderea este operație inversă adunării.

Exemple

$$1. (2 + 3i) + (-3 + 7i) = [2 + (-3)] + (3 + 7)i = -1 + 10i;$$

$$2. (2 + 3i) \cdot (-3 + 7i) = [2 \cdot (-3) - 3 \cdot 7] + [2 \cdot 7 + 3(-3)]i = -27 + 5i.$$

Observație. Operațiile de adunare, scădere, înmulțire cu numere complexe se efectuează similar cu operațiile cu polinoame în nedeterminata i , considerind $i^2 = -1$.

Definiție. Se numește **conjugatul** numărului complex $z = a + bi$ numărul $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$. (Notația \bar{z} se citește „z barat”.)

Produsul $z \cdot \bar{z}$, $z \in \mathbf{C}$, are o semnificație deosebită, deoarece el este un număr real nenegativ: $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$.

Proprietățile operațiilor de adunare și înmulțire a numerelor complexe (sînt aceleași ca și pentru numerele reale):

- 1° $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – adunarea este comutativă;
- 2° $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – adunarea este asociativă;
- 3° $0 = 0 + 0 \cdot i$ este elementul neutru pentru adunare;
- 4° $-z = -a - bi$ este opusul lui $z = a + bi$;
- 5° $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ – înmulțirea este comutativă;
- 6° $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ – înmulțirea este asociativă;
- 7° $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ – înmulțirea este distribuitivă față de adunare;
- 8° $1 = 1 + 0 \cdot i$ este elementul neutru pentru înmulțire;
- 9° $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ este inversul pentru $z = a + bi$, $z \neq 0$.

Expresia pentru z^{-1} se poate obține astfel:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Împărțirea numerelor complexe se poate defini ca operație inversă a înmulțirii: $z_1 : z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1}$, $z_2 \neq 0$, însă, pentru a evita calcule complicate, este mai simplu să se procedeze astfel:

$$\begin{aligned} \text{dacă } z_1 &= a + bi, \quad z_2 = c + di, \quad z_2 \neq 0, \quad \text{atunci} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c+di)}{(c+di)(c+di)} = \\ &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \end{aligned}$$

Exemple

1. $\frac{7+3i}{5-i} = \frac{(7+3i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{35+7i+15i+3i^2}{25+1} = \frac{35-3+22i}{26} = \frac{16}{13} + \frac{11}{13}i.$
2. $(1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$

Definiție. Se numește **modulul numărului complex** $z = a + bi$ numărul real nenegativ $\sqrt{a^2 + b^2}$, notat $|a + bi|$ sau $|z|$. Deci, $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple

Pentru $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = i$, obținem $|z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, $|z_2| = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.

Teorema 1. Pentru orice numere complexe z, z_1, z_2 sunt adevărate egalitățile:

- 1° $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;
- 2° $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;
- 3° $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$ (deci și $\bar{z}_2 \neq 0$);
- 4° $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$;
- 5° $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$;
- 6° $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
- 7° $\bar{\bar{z}} = z$.

Demonstrație

Aceste proprietăți se verifică ușor, scriind numerele sub formă algebrică.

De exemplu:

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \text{ Fie } z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i, \text{ atunci } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)} = \\ = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i} = a_1 a_2 - b_1 b_2 - (a_1 b_2 + b_1 a_2)i = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2. \end{aligned}$$

$$3^{\circ} \text{ Notăm } t = \frac{z_1}{z_2}. \text{ Atunci } t \cdot z_2 = z_1, \text{ deci } \bar{t} \cdot \bar{z}_2 = \bar{z}_1, \text{ sau } \bar{t} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \quad \blacktriangleright$$

Exercițiu. Arătați că, fiind date numerele $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, ecuațiile $z_1 \cdot u = z_2$ ($z_1 \neq 0$) și $z_1 + t = z_2$ au soluții unice.

Observație. Datorită faptului că operațiile cu numere complexe au aceleași proprietăți ca și operațiile respective cu numere reale, pentru numerele complexe pot fi aplicate: formulele cunoscute pentru calculul prescurtat; noțiunea de putere cu exponent întreg a numărului complex nenul z : $z^0 = 1$, $z^k = \underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{k \text{ ori}}$, $z^{-k} = (z^{-1})$, $k \in \mathbb{N}^*$; proprietățile acestei puteri: $z^n \cdot z^m = z^{n+m}$, $(z^n)^m = z^{n \cdot m}$, $z \neq 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Astfel: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$.

$$\text{De asemenea, pot fi aplicate formulele } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pentru calculul soluțiilor ecuației de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$.

Menționăm că orice ecuație de gradul II are soluții în mulțimea \mathbf{C} , deoarece pentru orice număr complex z există un număr complex u , astfel încât $u^2 = z$ (acest fapt va fi demonstrat mai jos).

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze: $A = (2 + 3i)^3 - \frac{7 + 3i}{5 - i}$.

Rezolvare:

Aplicând formula cubului sumei și rezultatul obținut anterior pentru $\frac{7 + 3i}{5 - i}$, obținem:

$$\begin{aligned} A &= 8 + 3 \cdot 4 \cdot 3i + 3 \cdot 2 \cdot (3i)^2 + (3i)^3 - \left(\frac{16}{13} + \frac{11}{13}i \right) = 8 + 36i + 54i^2 + 27i^3 - \frac{16}{13} - \frac{11}{13}i = \\ &= 8 - 54 - \frac{16}{13} + \left(36 - 27 - \frac{11}{13} \right)i = -\frac{614}{13} + \frac{106}{13}i. \end{aligned}$$

2. Să se calculeze:

a) i^{73} ; b) i^{24k+3} , $k \in \mathbb{N}$; c) $(7 - 3i)^{-1}$; d*) $(2 + i)^7$.

Rezolvare:

a) $i^{73} = i^{72+1} = (i^4)^{18} \cdot i = 1^{18} \cdot i = i$.

b) $i^{24k+3} = (i^4)^{6k} \cdot i^3 = 1^{6k} \cdot (-i) = -i$.

c) $(7 - 3i)^{-1} = \frac{1}{7 - 3i} = \frac{7 + 3i}{(7 - 3i)(7 + 3i)} = \frac{7 + 3i}{49 + 9} = \frac{7}{58} + \frac{3}{58}i$.

d) Aplicînd formula binomului lui Newton, obținem:

$$(2+i)^7 = 2^7 + 7 \cdot 2^6 \cdot i + 21 \cdot 2^5 \cdot i^2 + 35 \cdot 2^4 \cdot i^3 + 35 \cdot 2^3 \cdot i^4 + 21 \cdot 2^2 \cdot i^5 + 7 \cdot 2 \cdot i^6 + i^7 = \\ = 128 + 448i - 672 - 560i + 280 + 84i - 14 - i = -278 - 29i.$$

3. Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația:

a) $(2+i)z - (3+6i)z = 5+2i$; b) $z^2 - 2z + 3 = 0$.

Rezolvare:

a) Folosind proprietățile operațiilor cu numere complexe, obținem:

$$(2+i-3-6i)z = 5+2i \Leftrightarrow (-1-5i)z = 5+2i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{5+2i}{-1-5i} = \frac{(5+2i)(-1+5i)}{(-1-5i)(-1+5i)} = \frac{-15+23i}{1+25} = -\frac{15}{26} + \frac{23}{26}i.$$

Răspuns: $S = \left\{ -\frac{15}{26} + \frac{23}{26}i \right\}$.

b) $\Delta = 4 - 12 = -8 = (i\sqrt{8})^2 = (2\sqrt{2}i)^2$.

Astfel, soluțiile sunt $z_1 = \frac{2+2\sqrt{2}i}{2} = 1+i\sqrt{2}$, $z_2 = \frac{2-2\sqrt{2}i}{2} = 1-i\sqrt{2}$.

Răspuns: $S = \{1-i\sqrt{2}, 1+i\sqrt{2}\}$.

Exerciții propuse

A

1. Să se calculeze:

- | | | |
|--------------------------------|---|--|
| a) $(-2+3i)+(1-i)$; | b) $4+3i-(-2+5i)$; | c) $(\sqrt{3}-i)+(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$; |
| d) $(1-3i)(2-4i)$; | e) $(\sqrt{3}-i)(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$; | f) $(2+i):(3+4i)$; |
| g) $(3-i)^{-1}$; | h) $\frac{2+4i}{1-i}+22-23i$; | i) $(1-i)(1+i)^2$; |
| j) $\frac{(1-i)^3}{(1+i)^5}$; | k) $\frac{(1-i)^3}{(1+i)^7}$; | l) $\frac{(1-2i)^2-(1+i)^3}{(3-2i)^3-(2-i)^2}$. |

2. Să se calculeze:

- a) i^3 ; b) i^4 ; c) i^{24} ; d) i^{131} ; e) i^{2010} .

3. Să se determine numerele reale x și y , astfel încât:

- | | |
|--|--|
| a) $(1+3i)x + (2-5i)y = 7+i$; | b) $(\overline{2+5i})x - (1+i)y = i$; |
| c) $i \cdot x + i((i+1)x - (3-i)y) = 3+2i$; | d) $7i \cdot x + (\sqrt{3}-i)(\overline{x-iy}) = 4-3i$. |

4. Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația:

- | | | |
|----------------------------------|------------------------------------|--|
| a) $2z^2 - 3z + 3 = 0$; | b) $\bar{z}^2 - \bar{z} + 1 = 0$; | c) $z^2 + z + 4 = 0$; |
| d) $\sqrt{2}z^2 - z + 1 = -2z$; | e) $2z^2 + z - 2 = 3z - 7$; | f) $\frac{2-z}{3+z} = \frac{-4z+1}{5-z}$; |
| g) $(3-z)(-4+z) = (2+z)z + 7$; | h) $z^2 - 2z + 2 = 0$; | i) $z+2 = \frac{-3-z}{z+1}$. |

5. Să se calculeze:

a) $(2+i)^3 + (2-i)^3$;
 b) $(3-i)^3 - (3+i)^3$;
 c*) $(1-2i)^5 - (1+2i)^5$;
 d*) $(1-2i)^6$.

6. Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația:

a) $(1-i)z = 3+i$;
 b) $3z \cdot i + (5-2i)z = 3z + 2-i$;
 c) $\frac{z}{2+i} - 7+i = z(1+i)$;
 *d) $|z| - iz = 1-2i$.

7*. Să se rezolve sistemul de ecuații ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

a) $\begin{cases} 2z_1 - (3+3i)z_2 = 3-i, \\ (1-i)z_1 - 3iz_2 = -i; \end{cases}$
 b) $\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i, \\ (4+2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i. \end{cases}$

8. Să se determine toate numerele complexe z care satisfac condițiile:

a) $\operatorname{Re} z = 1$, $|z| = \sqrt{2}$;
 b) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 2$, $|\bar{z}| = 1$;
 c) $\operatorname{Im} z = 3$, $|z-i| = 2$.

B

9. Să se calculeze:

a) $(3+2i)(-2+3i)^{-1} \cdot (-i) + 1$;
 b) $(\overline{2+i})(5+i)^{-1} - (7+5i)^2 \cdot (3-i)^{-1}$;
 c) $\frac{(\sqrt{3}-i)^4}{1+i\sqrt{3}}$;
 d) $\frac{1+(1+i)^5}{-1+(1-i)^5}$.

10. Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația:

a) $z^4 - z^2 - 2 = 0$;
 b) $z^4 + z^2 - 12 = 0$;
 c) $z^4 + 12z^2 + 35 = 0$.

11. Să se calculeze:

a) $(z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)(z+1-i)$;
 b) $(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)$;
 c) $(b\varepsilon^2 + a\varepsilon)(a\varepsilon^2 + b\varepsilon)$, dacă $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$;
 d) $(a+b\varepsilon + c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2 + c\varepsilon)$, dacă $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

12. Să se demonstreze egalitatea:

a) $(1+i)^{8n} = 2^{4n}$, $n \in \mathbb{Z}$;
 b) $(1+i)^{4n} = (-1)^n \cdot 2^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

13. Să se arate că următoarele numere sunt reale:

a) $\frac{1}{i}(z-\bar{z})$;
 b) $\frac{z-1}{i(z+1)}$, dacă $z \cdot \bar{z} = 1$;
 c) $(3+2i)^{4n} + (2+3i)^{4n}$.

14. Să se determine numărul complex z , astfel încât $|z+i| = |z+1| = |z+iz|$.

15. Fie $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\alpha - (\alpha+1)i}$. Să se determine toate numerele $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $z \in \mathbb{R}$.

16. Să se arate că $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

§2 Reprezentarea geometrică a numerelor complexe. Forma trigonometrică a unui număr complex

Interpretarea geometrică a numerelor complexe, propusă de C. F. Gauss la începutul secolului al XIX-lea, a făcut posibil ca ele să fie aplicate în diverse domenii.

Fixăm în plan un sistem de axe ortogonale. Oricărui număr complex $z = x + iy$ i se asociază în acest plan punctul $M(x, y)$, și invers. Punctul M se numește **imaginea** numărului z , iar z se numește **afixul** punctului M (fig. 6.1). Astfel se stabilește o bijecție între mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} și mulțimea punctelor din plan, ceea ce permite să identificăm numărul complex $z = x + iy$ cu punctul $M(x, y)$. În baza acestei convenții (identificări) vom putea spune „punctul $z = x + iy$ ” în loc de „numărul complex z ”, iar planul respectiv îl vom numi **plan complex**. În plus, observăm că mulțimea numerelor reale se reprezintă prin punctele axei Ox , pe care o vom numi **axă reală**, iar mulțimea numerelor pur imaginare – de punctele axei Oy , pe care o vom numi **axă imaginară**.

Exemplu

Numerele $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 3$, $z_3 = 3i$ sunt reprezentate de punctele $M_1(2, 2)$, $M_2(3, 0)$ și respectiv $M_3(0, 3)$ (fig. 6.1).

Numerele complexe pot fi reprezentate geometric și prin vectori dintr-un plan dotat cu un sistem de axe ortogonale. Anume numărul complex $z = x + iy$ se identifică cu vectorul \overrightarrow{OM} , unde O este originea sistemului de coordonate, iar $M(x, y)$ este imaginea numărului z (fig. 6.1). Evident, $|z| = |\overrightarrow{OM}|$. Astfel, suma numerelor complexe $t_1 = a + bi$, $t_2 = c + di$ (aficele punctelor $A_1(a, b)$, $A_2(c, d)$) poate fi realizată ca suma vectorilor \overrightarrow{OA}_1 , \overrightarrow{OA}_2 , întrucât coordonatele punctului A_3 , unde $\overrightarrow{OA}_3 = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2$, sunt $a+c$ și $b+d$ (fig. 6.2).

Diferența $t_1 - t_2$ se identifică cu vectorul \overrightarrow{OA}_4 , unde $\overrightarrow{OA}_4 = \overrightarrow{A_2 A_1} = \overrightarrow{OA}_1 - \overrightarrow{OA}_2$ (fig. 6.2).

Deci, $|t_1 - t_2| = A_2 A_1$, adică *distanța dintre punctele A_1 și A_2 este egală cu modulul diferenței $t_1 - t_2$* .

Proprietățile modulului numărului complex sunt date de

Teorema 2. Pentru orice $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$1^\circ |z| = |\bar{z}| = |-z|; \quad 2^\circ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \quad 3^\circ ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|;$$

$$4^\circ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad 5^\circ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0; \quad 6^\circ ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

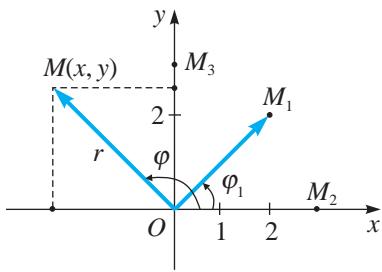


Fig. 6.1

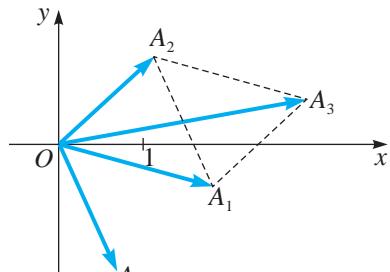


Fig. 6.2

Demonstrație

Proprietatea 1° se obține din definiția numărului conjugat și din definiția modulului. Proprietățile $2^\circ, 3^\circ, 6^\circ$ rezultă din relația dintre lungimile laturilor unui triunghi, care pot fi $|z_1|, |z_2|, |z_1 + z_2|$, sau, dacă vectorii sunt coliniari, din regulile de adunare a acestora. Proprietățile $4^\circ, 5^\circ$ vor fi demonstate mai jos. ►

Spre deosebire de adunarea și scăderea numerelor complexe, operațiile de înmulțire și împărțire nu pot fi ilustrate simplu, prin efectuarea unor operații cu vectorii respectivi. În continuare vom expune reprezentarea numerelor complexe sub formă trigonometrică, care facilitează efectuarea operațiilor de înmulțire, împărțire, ridicare la putere a numerelor complexe.

Reamintim că modulul numărului complex $z = x + iy$ este $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$.

Prin **argument** al numărului complex $z = x + iy$, $z \neq 0$, vom înțelege mărimea unghiului format de vectorul \overrightarrow{OM} , unde O este originea sistemului de coordonate, iar $M(x, y)$ este imaginea numărului z , și de semiaxa pozitivă Ox . Unui număr complex z , $z \neq 0$, îi corespunde o mulțime infinită de valori ale argumentului, care diferă între ele prin $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Menționăm că *argumentul numărului complex 0 nu este definit*. Există un unic argument φ al numărului dat $z = x + iy$, care satisfacă condiția $-\pi < \varphi \leq \pi$. Acesta se numește **argument principal** (sau **redus**) și se notează **arg** z . Orice argument al numărului z se notează **Arg** z și deci se poate scrie: $\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Observație. În unele manuale se folosește notația $\text{Arg } z = \{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, iar condiția $\arg z \in (-\pi, \pi]$ se înlocuiește cu $\arg z \in [0, 2\pi)$.

Exemplu

Numărul $z_1 = 2 + 2i$ are modulul $|z_1| = OM_1 = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ și argumentul principal $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$, iar valori ale $\text{Arg } z_1$ sunt $-\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$ sau orice număr de forma $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Evident, pentru $z = a + bi$, $b \neq 0$, avem $\arg \bar{z} = -\arg z$. Argumentul principal al numărului $z = a + bi$, $z \neq 0$, poate fi determinat cu ajutorul funcției arccos:

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{a}{r}, & \text{dacă } b \geq 0 \\ -\arccos \frac{a}{r}, & \text{dacă } b < 0, r = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Exemple

$$1. \arg(2 - 2i) = -\arccos \frac{2}{2\sqrt{2}} = -\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4};$$

$$2. \arg(-2 + 3i) = \arccos \frac{-2}{\sqrt{13}}.$$

Fie $z = x + iy$, $z \neq 0$, un număr complex arbitrar, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – modulul lui, φ – un argument al său. Folosind definițiile funcțiilor sin și cos ale unui unghi arbitrar, obținem relațiile: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Atunci

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Expresia $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ se numește **forma trigonometrică** a numărului complex z .

Întrucât argumentul numărului complex se determină neunivoc, pentru numerele complexe scrise sub formă trigonometrică avem:

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2)$$

Exercițiu rezolvat

↳ Să se scrie sub formă trigonometrică numerele:

- a) $z_1 = 1 + i$; b) $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $z_3 = -1$; d) $z_4 = 2 - 3i$.

Rezolvare:

a) Calculăm modulul și un argument al lui z_1 :

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \text{ iar } \arg z_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Astfel, $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ (expresia din membrul drept este forma trigonometrică a numărului z_1).

b) Analog, $|z_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, iar conform (1) obținem $\arg z_2 = \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$.

Prin urmare, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

c) Pentru z_3 obținem: $|z_3| = 1$, $\arg z_3 = \arccos(-1) = \pi$, deci $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$.

d) Pentru $z_4 = 2 - 3i$ avem: $|z_4| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, $\arg z_4 = -\arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Așadar, $2 - 3i = \sqrt{13} \left[\cos \left(-\arccos \frac{2}{\sqrt{13}} \right) + i \sin \left(-\arccos \frac{2}{\sqrt{13}} \right) \right]$.

Observație. Forme trigonometrice pentru numerele complexe z_1, z_2, z_3 considerate anterior sunt (cu alte valori ale argumentului) de asemenea:

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right), \quad z_2 = \cos \left(-\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{4\pi}{3} \right), \quad z_3 = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi),$$

însă, de regulă, în forma trigonometrică se indică argumentul principal al numărului complex.

Teorema ce urmează determină formulele pentru calculul produsului, cîtului, puterii cu exponent întreg a numerelor complexe reprezentate sub formă trigonometrică.

Teorema 3. Dacă $z_1, z_2, z \in \mathbf{C}^*$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, atunci:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)); \quad (4)$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{formula lui Moivre}^1). \quad (5)$$



Abraham de Moivre

Demonstrație

Pentru formula (3) avem:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)] = \\ &= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Similar se obține formula (4) pentru cîtuil numerelor.

Vom demonstra formula (5) întîi pentru $n \in \mathbb{N}$, prin metoda inducției matematice.

1. Evident, ea se verifică pentru $n = 0, n = 1$.

2. Din presupunerea că formula are loc pentru $n = k$, adică

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k = r^k \cdot (\cos k\varphi + i\sin k\varphi), \text{ pentru } n = k + 1 \text{ obținem:}$$

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^k (\cos k\varphi + i\sin k\varphi) \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\ &= r^{k+1} (\cos(k\varphi + \varphi) + i\sin(k\varphi + \varphi)) = r^{k+1} (\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi). \end{aligned}$$

3. În baza metodei inducției matematice, formula (5) are loc pentru orice n natural.

Pentru $n = -k$, $k \in \mathbb{N}^*$, formula (5) se verifică astfel:

$$\begin{aligned} z^n &= z^{-k} = \frac{1}{z^k} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r^k (\cos k\varphi + i\sin k\varphi)} = r^{-k} (\cos(0 - k\varphi) + i\sin(0 - k\varphi)) = \\ &= r^{-k} (\cos(-k\varphi) + i\sin(-k\varphi)) = r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Observații. 1. Din (3) și (4) rezultă respectiv proprietăile 4° și 5° ale modulului numărului complex, menționate în teorema 2.

2. Din relațiile (3)–(5), respectiv, rezultă: argumentul produsului este egal cu suma argumentelor factorilor; argumentul cîtuilui este egal cu diferența dintre argumentul deîmpărțitului și argumentul împărțitorului; argumentul puterii z^n este egal cu produsul dintre exponentul întreg n al puterii și un argument al bazei z . De menționat că aici egalitățile au loc cu exactitatea unui termen multiplu al lui 2π .

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze $A = \frac{2(1+i)(1-i\sqrt{3})}{(-\sqrt{3}+i)^{30}}$.

¹ Abraham de Moivre (1667–1754) – matematician englez de origine franceză.

Rezolvare:

Pentru a efectua calculele, este comod să scriem numerele sub formă trigonometrică:

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad 1-i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right),$$

$$-\sqrt{3}+i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

Folosind formulele (3) – (5), obținem:

$$A = \frac{4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]}{\left[2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \right]^{30}} = \frac{4\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right]}{2^{30} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{6} \cdot 30 \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \cdot 30 \right) \right]} =$$

$$= \frac{2^{-\frac{55}{2}} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right]}{\cos 25\pi + i \sin 25\pi} = -2^{-\frac{55}{2}} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right] = 2^{-\frac{55}{2}} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right).$$

↳ 2. Să se arate că:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x;$$

$$\sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \cos 5x + i \sin 5x &= (\cos x + i \sin x)^5 = \cos^5 x + 5 \cos^4 x \cdot i \cdot \sin x + 10 \cos^3 x \cdot i^2 \cdot \sin^2 x + \\ &+ 10 \cos^2 x \cdot i^3 \cdot \sin^3 x + 5 \cos x \cdot i^4 \cdot \sin^4 x + i^5 \sin^5 x = \\ &= \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x + i(5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x). \end{aligned}$$

Egalând părțile reale și respectiv cele imaginare, obținem formulele menționate.

Se știe că rădăcina de ordinul n a numărului real a (în caz că există) este un număr real b , astfel încât $b^n = a$. Acest concept se generalizează pentru numerele complexe.

Definiție. Numărul complex u se numește **rădăcină de ordinul n** , $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, a numărului z dacă $u^n = z$.

Exemple

Rădăcini de ordinul 3 ale numărului 1 sunt $1, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, deoarece $1^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^3 = 1$, iar rădăcini de ordinul doi ale numărului 1 sunt ± 1 .

Dacă numărul complex este scris sub formă trigonometrică, atunci rădăcinile lui de ordinul n se determină relativ ușor.

|| **Observație.** Dacă n parcurge toate valorile din mulțimea $\{k, k+1, \dots, m\}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $k < m$, atunci vom nota $n = \overline{k, m}$.

Teorema 4. Există n rădăcini distincte de ordinul n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ale oricărui număr complex nenul z . Asume dacă $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, atunci mulțimea tuturor rădăcinilor de ordinul n ale lui z este

$$\left\{ \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \mid k = \overline{0, n-1} \right\}. \quad (6)$$

Demonstrație

Fie $u = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ o rădăcină de ordinul n a lui z , adică $u^n = z$, ρ și ψ rămânând a fi determinate.

În baza formulei lui Moivre, avem $\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, iar din (2) obținem $\rho^n = r$ și $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Din prima relație avem $\rho = \sqrt[n]{r}$ (amintim că $r \in \mathbb{R}_+$, deci $\sqrt[n]{r}$ este un număr real pozitiv unic determinat), iar din a doua obținem $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pentru $k = \overline{0, n-1}$ se obțin n valori distincte pentru u :

$$u_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right],$$

deoarece aceste numere se reprezintă (verificați!) în planul complex prin vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi (dacă $n \geq 3$), înscris în cercul de centru O (originea sistemului de coordonate) și rază $\sqrt[n]{|z|}$. Pentru celelalte valori întregi ale lui k avem $k = n \cdot q + t$, $0 \leq t \leq n-1$, și din periodicitatea funcțiilor trigonometrice obținem:

$$u_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi q + 2\pi \frac{t}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi q + 2\pi \frac{t}{n} \right) \right] = u_t, \quad t = \overline{0, n-1}.$$

Prin urmare, oricare u_k , $k \in \mathbb{Z}$, este egal cu un careva u_t , unde $0 \leq t \leq n-1$. Astfel se obțin exact n rădăcini distincte de ordinul n ale lui z , $z \neq 0$. ►

Observație. Argumentele numerelor din (6) nu sunt neapărat argumentele principale ale acestora.

Exerciții rezolvate

1. Utilizând teorema 4, să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului -4 .

Rezolvare:

Scriem numărul -4 sub formă trigonometrică: $-4 = 4 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$. Din (6) obținem $u_0 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i$, $u_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{2} \right) = -2i$. Așadar, rădăcinile de ordinul doi ale numărului -4 sunt $\pm 2i$.

2. Să se determine și să se ilustreze geometric rădăcinile de ordinul trei ale numărului $2i$.

Rezolvare:

Deoarece $2i = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$, din (6) obținem:

$$u_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$u_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$u_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} \right) = -\sqrt[3]{2} \cdot i.$$

Aceste numere se reprezintă geometric prin vîrfurile unui triunghi echilateral (fig. 6.3, a)).

3. Să se determine rădăcinile de ordinul n ale numărului 1.

Rezolvare:

Pentru rădăcinile de ordinul n ale numărului 1 obținem:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

În figurile 6.3 b), c) sînt reprezentate geometric rădăcinile de ordinul patru ale numărului 1: $\{\pm 1, \pm i\}$ și respectiv rădăcinile de ordinul șase ale numărului 1:

$$\left\{ \pm 1, \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

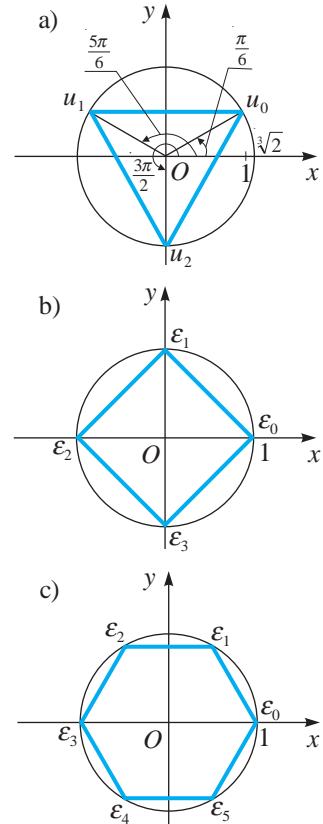


Fig. 6.3

Rădăcinile de ordinul doi, α_1, α_2 , ale numărului complex nenul $a+bi$ sînt numere opuse și pot fi determinate fără a utiliza forma trigonometrică a acestuia:

$$1) \text{ pentru } b \neq 0, \alpha_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn} b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right);$$

$$2) \text{ pentru } b=0, \alpha_{1,2} = \begin{cases} \pm \sqrt{a}, & \text{dacă } a \geq 0 \\ \pm i\sqrt{|a|}, & \text{dacă } a < 0, \end{cases}$$

unde $\operatorname{sgn} b = \begin{cases} 1, & \text{dacă } b > 0 \\ 0, & \text{dacă } b = 0 \\ -1, & \text{dacă } b < 0. \end{cases}$

Exerciții rezolvate

1. Să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului $40 - 42i$.

Rezolvare:

$$\text{Cum } b = -42 < 0, \text{ obținem } \alpha_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{40^2 + 42^2} + 40)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{40^2 + 42^2} - 40)} \right).$$

Deci, $\{-7 + 3i, 7 - 3i\}$ este mulțimea rădăcinilor de ordinul doi ale numărului $40 - 42i$.

2. Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $z^2 - 3z + 3 - i = 0$.

Rezolvare:

Aplicăm formulele cunoscute pentru determinarea soluțiilor ecuației de gradul II. Discriminantul este $-3 + 4i$, iar rădăcinile de ordinul doi ale numărului complex $-3 + 4i$ sunt $1 + 2i$ și $-1 - 2i$.

Deci, soluțiile ecuației sunt $z_1 = \frac{3 + (1 + 2i)}{2}, z_2 = \frac{3 - (1 + 2i)}{2}$.

Răspuns: $S = \{2 + i, 1 - i\}$.

Exerciții propuse

B

1. În planul complex construiți imaginile numerelor:

$$-1, i, 1-i, -5i, 3, -3+i, -1-2i, 1-i\sqrt{2}, \sqrt{2}-i.$$

2. Să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| a) $-2i$; | b) $-5 - 12i$; | c) $48 + 14i$; |
| d) $2 - 2\sqrt{3}i$; | e) $1 - 2i\sqrt{6}$; | f) $-1 + 2i\sqrt{6}$. |

3. Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația:

- | | |
|---|---|
| a) $z^2 + 4z + 4 - 2i = 0$; | b) $i \cdot z^2 - (4 + i)z + 6 + 12i = 0$; |
| c) $z^2 + (3 - 2i)z - 1 - 3i = 0$; | d) $(1 + i)z^2 + (2 + i)z - 7 - i = 0$; |
| e) $(2 + i)z^2 - (5 - i)z + 2 - 2i = 0$; | f) $z^2 - (48 + 14i) = 0$. |

4. Fie $\alpha + \beta i$ și $-\alpha - \beta i$ rădăcinile de ordinul doi ale numărului z . Să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului $-z$.

5. Să se reprezinte sub formă trigonometrică numărul:

- | | | |
|---------------|---|--|
| a) -5 ; | b) $-3i$; | c) $1 - i\sqrt{3}$; |
| d) $2 - 2i$; | e) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; | f) $-4 \left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} \right)$; |
| g) $3 + 4i$; | h) $\sin \varphi - i \cos \varphi$; | i) $\left(\frac{1}{i-1} \right)^{100}$. |

6. Să se calculeze:

$$\text{a) } \frac{\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24} \right)}{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}}, \quad \text{b) } (1 + i\sqrt{3})^3 \cdot \overline{(1 + i)^7}; \quad \text{c) } \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i} \right)^{20}.$$

7. Să se determine rădăcinile:
- de ordinul trei ale numărului i ;
 - de ordinul trei ale numărului -27 ;
 - de ordinul patru ale numărului $2 - 2i\sqrt{3}$;
 - de ordinul patru ale numărului -1 ;
 - de ordinul şase ale numărului $\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.
8. Să se determine numerele complexe z care satisfac condițiile:
- $\operatorname{Im} z \geq 1$, $|z| \leq 1$;
 - $\operatorname{Re}(iz) = 1$, $|z+i| = 2$.

§3 Aplicații ale numerelor complexe

3.1. Rezolvarea ecuațiilor de forma $mz^k + p = 0$, $m \in \mathbb{C}^*$, $p \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$

Definiție. Ecuațiile de forma $mz^k + p = 0$, $m \in \mathbb{C}^*$, $p \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$, se numesc **ecuații binome**.

Ecuația binomă $mz^k + p = 0$ este echivalentă cu ecuația $z^k = -\frac{p}{m}$. De aceea, pentru a rezolva, determinăm toate rădăcinile de ordinul k , $k \geq 2$, ale numărului $-\frac{p}{m}$.

Exercițiu rezolvat

• Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $2z^5 = 1 + i\sqrt{3}$.

Rezolvare:

$2z^5 = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow z^5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pentru a determina rădăcinile de ordinul cinci ale numărului complex $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, scriem acest număr sub formă trigonometrică.

$$\text{Obținem } r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \text{ și } \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Argumentul principal este $\varphi = \frac{\pi}{3}$, deci $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

Aplicând (7) din § 2, obținem:

$$z_0 = \cos\frac{\frac{\pi}{3}}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{5} = \cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}; \quad z_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{5} = \cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15};$$

$$z_2 = \cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}; \quad z_3 = \cos\left(-\frac{11\pi}{15}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{15}\right); \quad z_4 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\begin{aligned} Răspuns: \quad S = & \left\{ \cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}, \cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}, \cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}, \right. \\ & \left. \cos\left(-\frac{11\pi}{15}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{15}\right), \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\}. \end{aligned}$$

3.2. Rezolvarea ecuațiilor de forma $mz^{2k} + pz^k + q = 0$, $m \in \mathbf{C}^*$, $p, q \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$

Definiție. Ecuațiile de forma $mz^{2k} + pz^k + q = 0$, $m \in \mathbf{C}^*$, $p, q \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$, se numesc **ecuații trinome**.

Prin substituția $z^k = u$, ecuația trinomă se reduce la sistemul $\begin{cases} mu^2 + pu + q = 0, \\ z^k = u. \end{cases}$

Exercițiu rezolvat

↳ Să se rezolve în \mathbf{C} ecuația $6z^{12} - z^6 - 1 = 0$.

Rezolvare:

Notăm $z^6 = u$ și obținem ecuația $6u^2 - u - 1 = 0$, ale cărei soluții sunt $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{3}$.

Pentru z obținem două cazuri: $z^6 = \frac{1}{2}$ sau $z^6 = -\frac{1}{3}$. Reprezentăm numerele $\frac{1}{2}$ și $-\frac{1}{3}$ sub formă trigonometrică: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos 0 + i \sin 0)$, $-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(\cos \pi + i \sin \pi)$. În baza formulei (6) din § 2, obținem:

$$z \in \left\{ \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{2\pi k}{6} + i \sin \frac{2\pi k}{6} \right) \middle| k = \overline{0, 5} \right\} \text{ sau } z \in \left\{ \sqrt[6]{3} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{6} \right) \middle| k = \overline{0, 5} \right\}.$$

$$\text{Răspuns: } S = \left\{ -\sqrt[6]{\frac{1}{2}}, \sqrt[6]{\frac{1}{2}}, \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right), -i\sqrt[6]{\frac{1}{3}}, i\sqrt[6]{\frac{1}{3}}, \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right), \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right), \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right), \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \right\}.$$

3.3. Rezolvarea ecuațiilor reciproce

Vom examina ecuații de forma $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, care sunt **ecuații reciproce** de gradul trei și respectiv patru.

Exemplu

Ecuația $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ este ecuație reciprocă de gradul patru.

La rezolvarea acestor ecuații se va ține cont de următoarele *proprietăți*:

1° Ecuația $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ are soluție numărul $x_0 = -1$.

2° Prin substituția $y = x + \frac{1}{x}$, ecuația $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ se reduce la un sistem format dintr-o ecuație de gradul II în y și o totalitate de două ecuații de gradul II în x .

Exercițiu rezolvat

↳ Să se rezolve în \mathbf{C} ecuația $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

Rezolvare:

Se observă că $x = 0$ nu este soluție, de aceea, împărțind la x^2 , obținem ecuația echivalentă: $x^2 - 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$.

Notăm $y = x + \frac{1}{x}$, atunci $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2$ și obținem ecuația $y^2 - 3y + 2 = 0$, cu soluțiile $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Revenind la necunoscuta x , avem: $\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 1, \\ x + \frac{1}{x} = 2. \end{cases}$

Astfel, obținem următoarea totalitate de ecuații de gradul II: $\begin{cases} x^2 - x + 1 = 0, \\ x^2 - 2x + 1 = 0. \end{cases}$

Deci, soluțiile ecuației inițiale sunt $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Răspuns: $S = \left\{1, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

3.4. Aplicații ale numerelor complexe în geometrie

Numerele complexe pot fi aplicate în acele domenii în care sunt examineate mărimi vectoriale. În acest caz, operațiile asupra vectorilor, care se efectuează, de obicei, sub formă geometrică, se înlocuiesc cu operațiile respective cu numere complexe reprezentate sub formă algebrică sau trigonometrică, care se efectuează mai ușor.

Pentru comoditate, în continuare vom nota cu $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, ... afisele punctelor M , M_0 , M_1 , M_2 , ..., respectiv.

a) Ecuația cercului de centru M_0 și rază r este $|z - z_0| = r$, sau $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Într-adevăr, $M \in \mathcal{C}(M_0, r)$ dacă și numai dacă $|\overrightarrow{MM_0}| = r$, adică $|z - z_0| = r$.

b) Inecuația ce determină discul de centru M_0 și rază r este $|z - z_0| \leq r$.

c) Inecuația ce determină inelul cuprins între cercurile concentrice $\mathcal{C}(M_0, r_1)$ și $\mathcal{C}(M_0, r_2)$, $r_1 < r_2$, este $r_1 < |z - z_0| < r_2$ (fig. 6.4).

d) Măsura unghiului $M_1 M_2 M_3$ admite reprezentarea $m(\angle M_1 M_2 M_3) = \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + 2\pi k$, pentru un oarecare $k \in \mathbb{Z}$.

Formula se obține din proprietatea

$$\arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \arg(z_3 - z_2) - \arg(z_1 - z_2) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(fig. 6.5).

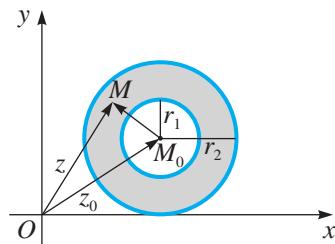


Fig. 6.4

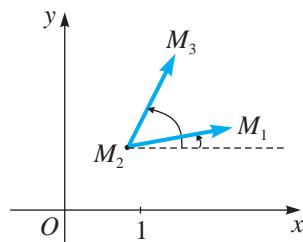


Fig. 6.5

Exerciții rezolvate

4) 1. Să se scrie ecuația cercului de centru $M_0(1, -2)$ și rază 3.

Rezolvare:

Punctul M_0 este imaginea numărului $z_0 = 1 - 2i$, deci $M \in \mathcal{C}(M_0, 3)$ dacă și numai dacă $|z - (1 - 2i)| = 3$, unde $z = x + iy$ este afixul lui $M(x, y)$. Aplicând formula modulului numărului complex, obținem: $\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$, $x, y \in \mathbb{R}$.

4) 2. Să se reprezinte în sistemul de axe ortogonale xOy locul geometric al punctelor $M(x, y)$ ale căror afixe $z = x + iy$ satisfac condiția $|z - 1 + i| \leq 3$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned}|z - 1 + i| \leq 3 &\Leftrightarrow |x + iy - 1 + i| \leq 3 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)i| \leq 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 9 = 3^2.\end{aligned}$$

Se obține discul de centru $A(1, -1)$ și rază 3 (fig. 6.6).

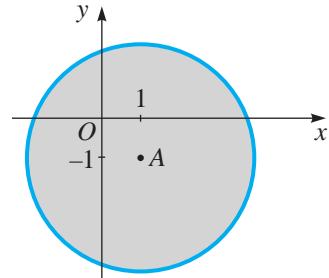


Fig. 6.6

Exerciții propuse

B

1. Să se rezolve în C ecuația:

$$\begin{array}{lll}\text{a)} (1-i)z^6 = 1 - i\sqrt{3}; & \text{b)} (1+i\sqrt{3})z^5 = 1+i; & \text{c)} z^6 - 7z^3 + 6 = 0; \\ \text{d)} z^8 + z^4 - 2 = 0; & \text{e)} z^{10} + z^5 - 6 = 0.\end{array}$$

2. Să se rezolve în C ecuația $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$.

3. Să se arate că soluțiile ecuației $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$ sunt numere reale.

4. Să se rezolve în C ecuația $(z+1)^6 = (z-1)^6$.

5. Să se rezolve în C ecuația reciprocă:

$$\text{a)} x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0; \quad \text{b)} x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0; \quad \text{c)} x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Exerciții și probleme recapitulative

A

1. Să se calculeze:

$$\begin{array}{lll}\text{a)} (2-3i) + (-1+i); & \text{b)} (4-3i) - (2-5i); & \text{c)} (1+3i) \cdot (2+4i); \\ \text{d)} (2-i) : (3-4i); & \text{e)} (-i)^3; & \text{f)} (-i)^4; & \text{g)} i^{13}.\end{array}$$

2. Să se arate că numărul este real:

$$\text{a)} (1-i)^{24}; \quad \text{b)} \left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} \right)^2; \quad \text{c)} \frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i}; \quad \text{d)} (\sqrt{3}+i)^6.$$

3. Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația: a) $z^2 = -9$; b) $z\bar{z} + 2(z - \bar{z}) = 20 + 8i$.

4. Să se calculeze modulul numărului $z = \frac{8+i}{7-4i}$.

5. Fie $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. Să se calculeze:

a) $\bar{z}_1 \cdot z_2$; b) $(z_1 : \bar{z}_2)^2$.

6. Să se calculeze:

a) $(1+i)(2+i) + \frac{5}{1+2i}$;

b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} - (1-i)^{12}$;

c) $\frac{(1+2i)^3 - (1-2i)^3}{(2-i)^2 - (2+i)^2}$;

d) $\frac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$.

7. Să se determine $z = x+iy$, dacă $2z = |z| + 2i$.

B

8. Știind că $z^2 + z + 1 = 0$, să se calculeze $z^4 + \frac{1}{z^4}$.

9. Să se determine partea reală a numărului $(\sqrt{3} + i)^6$.

10. Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația:

a) $z^2 - 3|z| + 3 = 0$;

b) $|z| - 2z + 2i = 0$;

c) $\begin{cases} |z| = |z - 2i|, \\ |z - i| = |z - 1|; \end{cases}$

d) $z^2 + |z| = 0$;

e) $(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0$.

11. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul:

a) $\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6}$;

b) $\sin \alpha - i \cos \alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

12. Să se determine rădăcinile de ordinul trei ale numărului:

a) $-2 + 2i\sqrt{3}$;

b) $-\frac{3}{8}(\sqrt{3} + i)$.

13. Să se calculeze:

a) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12}$;

b) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12} + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{12}$;

c) $\frac{(1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^2}$.

14. Să se determine n , $n \in \mathbb{N}$, pentru care este adevărată egalitatea $(1+i)^n = (1-i)^n$.

15. Fie numerele complexe $z_0 = 1+i$, $z_1 = 2+i$, $z_2 = 2+3i$, $z_3 = 3+i$ și M_0 , M_1 , M_2 , M_3 respectiv imaginile lor.

a) Să se calculeze $|z_1 - z_0|$, $|z_2 - z_0|$, $|z_3 - z_0|$.

b) Să se determine care dintre punctele M_1 , M_2 , M_3 aparțin discului de centru M_0 și rază 2.

16*. Să se arate că este adevărată identitatea ($x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$):

a) $\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$;

b) $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$.

17*. Să se arate că pentru $n \in \mathbb{N}^*$ este adevărată egalitatea:

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos \frac{n\pi}{4}$; b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}$.

Probă de evaluare

A

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

1. Calculați:

a) $(2 - 3i) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}i\right)$; b) $(5 - 2i)\left(\frac{1}{3} - \frac{7}{2}i\right)$; c) $\frac{2 - 3i}{7 + i}$.

2. Rezolvați în \mathbb{C} ecuația $(3 + 2i)z + 5z = 4$.3. Determinați numerele reale x și y , astfel încât $(2 + 3i)x + (5y - 2i)(3 - i) = 3x - 4i$.4. Rezolvați în \mathbb{C} ecuația $7z^2 - 2z + 1 = 0$.5. Fie $z = -1 - i$.

- a) Calculați z^2 .
b) Indicați litera corespunzătoare variantei corecte.

Numărul z este soluție a ecuației

A $x^2 + (2 + i)x - 3i = 0$.

B $x^2 + 4x + 1 = 0$.

C $x^2 + (2 + 2i)x + 2i = 0$.

D $x^2 + 1 = 0$.

B

Timp efectiv de lucru:
90 de minute

1. Calculați:

a) $(1 - 2i)^2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; b) $(5 - i)^3 - (\overline{2 - 3i})(7 - i)$; c) $\frac{3 - i}{2i - 7}$.

2. Rezolvați în \mathbb{C} ecuația $2z^2 + \sqrt{7}z + 7 = 0$.3. Determinați numerele reale x și y , astfel încât

$$(x + 2i)(2 + yi) - x(\sqrt{2} - 3i) = -x(1 + \sqrt{2}) + 8xi.$$

4. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy locul geometric al punctelor $M(x, y)$ ale căror afixe $z = x + iy$ satisfac condiția $1 \leq |z - 2i| \leq 3$.5. Determinați $z = x + iy$, dacă $1 - z - z\bar{z} = i$.6. Calculați $\frac{(1+i\sqrt{3})^{12}}{(-2+2i)^5}$.7. Rezolvați în \mathbb{C} ecuația $2z^3 = 3i$.8. Rezolvați în $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i. \end{cases}$

(2)

(1)

(2)

(2)

(3)

(1)

(1)

(1)

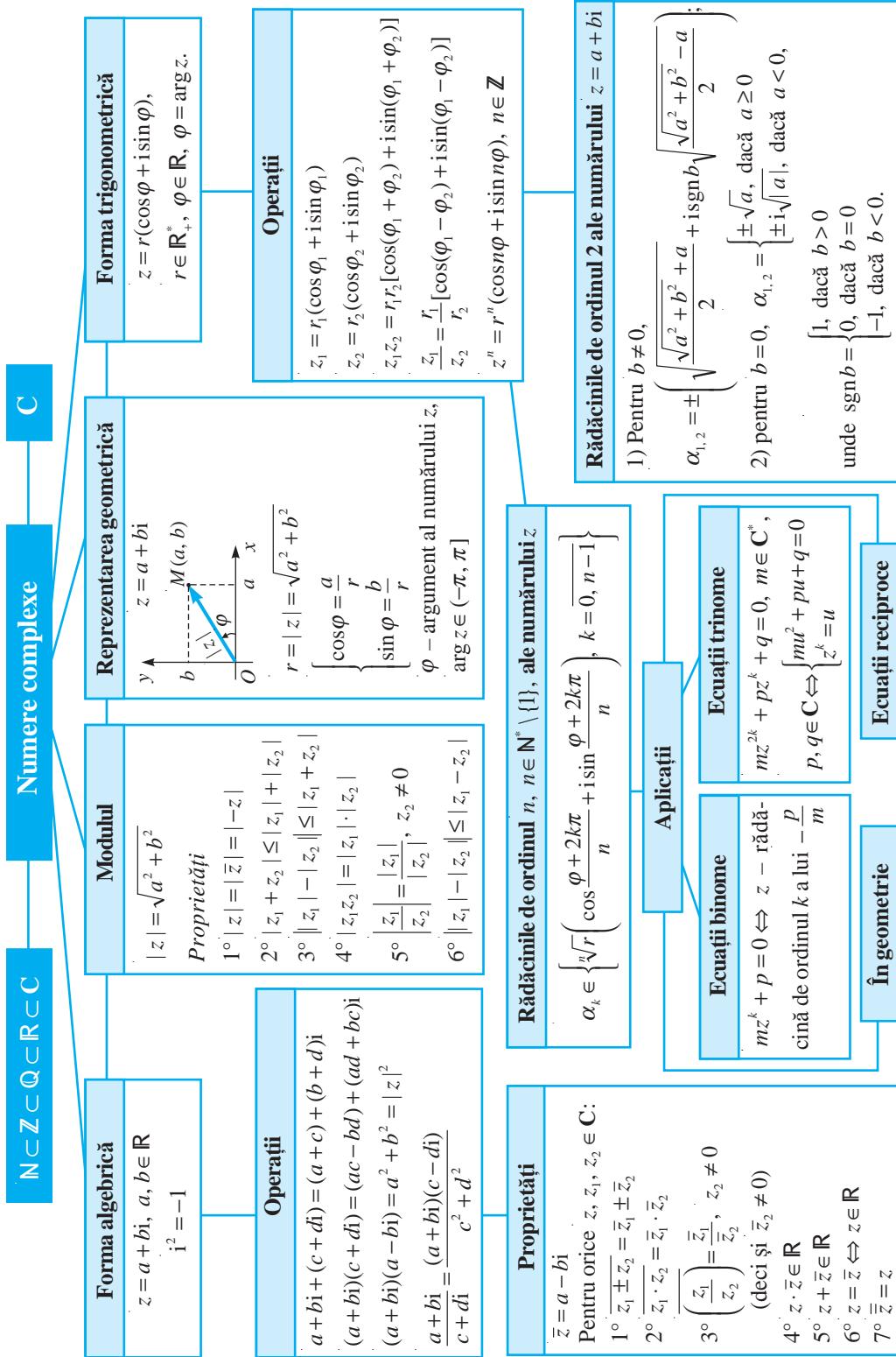
(1)

(1)

(2)

(1)

(2)



Obiective

- ⇒ identificarea tipurilor de matrice, utilizarea terminologiei aferente noțiunii de matrice în diverse contexte;
- ⇒ aplicarea operațiilor cu matrice, inclusiv cu matricea inversă, a proprietăților acestora în diverse contexte, *inclusiv la rezolvarea ecuațiilor matriciale;
- ⇒ recunoașterea în diverse situații a determinanților de ordinele 2, 3, calculul lor prin diferite metode; *aplicarea proprietăților determinanților la calculul determinanților de ordin mai mare decât trei;
- ⇒ rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, inclusiv a celor omogene, prin metoda lui Cramer, metoda lui Gauss, *metoda matricială.

§1 Matrice**1.1. Noțiuni generale**

Două întreprinderi produc înghețată. Pentru aceasta ele folosesc 4 componente principale: lapte, frișcă, zahăr și cacao. Prima întreprindere folosește zilnic: 890 l de lapte, 400 kg de frișcă, 250 kg de zahăr, 90 kg de cacao. A doua întreprindere folosește zilnic 1500 l de lapte, 700 kg de frișcă, 400 kg de zahăr și 160 kg de cacao. O întreprindere de transport a încheiat un contract de livrare a acestor produse întreprinderilor menționate. Managerul firmei de transport a aranjat (pentru comoditate) aceste date în următorul tablou:

$$\begin{pmatrix} 890 & 400 & 250 & 90 \\ 1500 & 700 & 400 & 160 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Tablourile de acest fel (numite matrice) se aplică în matematică, economie și în alte domenii.

Definiție. Se numește **matrice** de tip (m, n) sau $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, un tablou

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

format din $m \cdot n$ elemente aranjate în m linii și n coloane.

Se notează: $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Elementele $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ formează **linia i**, iar elementele $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ – **coloana j** a matricei (2). Deci, primul indice (i) al elementului a_{ij} (se citește a-i-j; de exemplu, a_{12} – a-unu-doi, și nu a-doisprezece) indică linia, iar al doilea (j) – coloana în care el se află.

De exemplu, matricea (1) este de tip (2, 4), $a_{21} = 1500$, $a_{22} = 700$.

Exercițiu. Scrieți: a) elementele matricei (1); b) liniile și coloanele matricei (1).

Mulțimea matricelor de tip (m, n) cu elemente din \mathbb{C} (respectiv din $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$) se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ (respectiv $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q}), \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$). În cele ce urmează vom studia matrice cu elemente numere complexe, dacă nu este specificat altceva.

Deosebim mai multe tipuri de matrice. Pentru $m=n$ matricea (2) are forma

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ și se numește **matrice pătratică de ordinul n**. În acest caz,

mulțimile $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}), \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \dots$ se notează, respectiv, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \dots$ În matricea pătratică, elementele $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formează **diagonala principală**, iar elementele $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n-1,2}, a_{n1}$ – **diagonala secundară** a acesteia. O matrice pătratică în care toate elementele situate deasupra (respectiv dedesubtul) diagonalei principale sunt egale cu 0 se numește **inferior** (respectiv **superior**) **triunghiulară**.

Pentru $n=1$ matricea (2) ia forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ și se numește **matrice-coloană**, iar

pentru $m=1$ matricea (2) devine $A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ și se numește **matrice-linie**. Matricea pătratică de ordinul n de forma $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ se numește **matrice unitate** și se mai notează cu I .

Dacă toate elementele matricei (2) sunt egale cu zero, atunci ea se numește **matrice nulă** sau **zero** și se notează cu $O_{m,n}$ sau cu O , dacă tipul ei este subînțeles.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice pătratică
de ordinul 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Matrice unitate
de ordinul 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrice superior
triunghiulară de ordinul 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{3,2}$$

Matrice nulă
de tip (3,2)

Dacă se știe că matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci o vom nota simplu $A = (a_{ij})$.

Definiție. Două matrice $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ se numesc **egale** dacă $a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

1.2. Operații cu matrice

- **Adunarea matricelor, înmulțirea matricelor cu scalari, transpusa unei matrice**

Definiție. Fie $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Se numește **suma** matricelor A și B matricea $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, unde $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Se scrie: $D = A + B$.

Exemplu

Suma matricelor $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ este matricea $D = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-7 & 3+5 \\ -1+2 & 0-3 & -4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Definiție. Se numește **produsul** matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ cu numărul $\alpha \in \mathbb{C}$ matricea $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, unde $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Se scrie: $B = \alpha A$.

Observații. 1. Cu $-A$ vom nota matricea $(-1)A$, fiindcă $A + (-1)A = (-1)A + A = O$.

Matricea $-A$ se numește **opusa matricei A**.

Pentru suma $B + (-A)$ se va folosi notația $B - A$.

2. Suma matricelor se definește doar pentru oricare două matrice de același tip, însă orice matrice poate fi înmulțită cu un număr.

Exemplu

Pentru matricele din exemplul precedent avem:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad iB = \begin{pmatrix} -i & -7i & 5i \\ 2i & -3i & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze $2X - iY + 3I_3$, dacă $X = \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 0 \\ 3 & i & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} 2X - iY + 3I_3 &= \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & -2i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1-i & 0 \\ -3i & 1 & -i \\ 0 & -2i & -4i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3+2i & -1-i & -2 \\ 6-3i & 6 & -i \\ 4 & -4i & 3-4i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definiție. Se numește **transpusa matricei** $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ matricea $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, astfel încât $b_{ij} = a_{ji}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Dacă matricea A este de tip (m, n) , atunci transpusa ei este de tip (n, m) și se notează $'A$; coloanele (liniile) ei coincid cu liniile (coloanele) respective ale matricei A .

Exemple

1. Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, atunci $'A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine dacă pot fi efectuate operațiile $3 \cdot 'A - 5B$.

Întrucât matricele $'A$ și B (deci și $3 \cdot 'A$ și $5B$) sunt de diferite tipuri, rezultă că nu poate fi calculată „matricea” $3 \cdot 'A - 5B$.

Proprietățile operațiilor cu matrice, definite mai sus, sunt expuse în

Teorema 1. Pentru orice matrice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și pentru orice numere $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, au loc egalitățile:

1° $A + B = B + A$ (adunarea este comutativă);

2° $A + (B + D) = (A + B) + D$ (adunarea este asociativă);

3° $A + O = O + A = A$ (matricea nulă O este element neutru la adunare);

4° $A + (-A) = -A + A = O$ (orice matrice are opusă);

5° $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

6° $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

7° $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

8° $1 \cdot A = A$;

9° $'(\alpha A) = \alpha'A$;

10° $'(A + B) = 'A + 'B$;

11° $'('A) = A$.

Demonstrație

Pentru demonstrație se aplică definiția egalității matricelor și proprietățile operațiilor cu numere complexe. Să demonstreăm, de exemplu, proprietatea 2°.

Matricea $F = A + (B + D)$ este de același tip ca și matricea $F' = (A + B) + D$. Elementul f_{ij} al matricei F are forma $f_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + d_{ij})$, iar elementul respectiv f'_{ij} al matricei F' are forma $f'_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + d_{ij}$. Deoarece adunarea numerelor complexe este asociativă, avem $f_{ij} = f'_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Deci, matricele F și F' sunt egale. ►

Exercițiu. Demonstrați celelalte proprietăți (în mod analog).

Proprietățile operațiilor cu matrice facilitează rezolvarea **ecuațiilor matriciale**, adică a ecuațiilor cu necunoscută o matrice.

Exercițiu rezolvat

↳ Să se rezolve ecuația $2 \cdot 'A + 3X - 4I_3 = O$, unde $A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 1 & 0 & 3i \\ -2 & 3 & -i \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

În baza proprietăților 2° – 4° din teorema 1, putem trece termenii cunoscuți în membrul drept, schimbându-le semnul.

Astfel,

$$3X = -2 \cdot A + 4I_3 = -2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ i & 0 & 3 \\ 0 & 3i & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2i & 0 & -6 \\ 0 & -6i & 2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2i & 4 & -6 \\ 0 & -6i & 4+2i \end{pmatrix}. \text{ Prin urmare, } X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2i & 4 & -6 \\ 0 & -6i & 4+2i \end{pmatrix}.$$

□ Înmulțirea matricelor

Vom ilustra operația de înmulțire a matricelor prin următorul exemplu.

O întreprindere mică produce jucării: păpuși (p) și bufoni (b).

Volumul vînzărilor (mii bucăți) în primul trimestru este reflectat de matricea:

$$A = \begin{pmatrix} p & b \\ 5 & 3 \\ 6 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{ian.} \\ \text{febr.} \\ \text{mar.} \end{array}$$

Prețul de vînzare al fiecărei jucării (în lei) este indicat în matricea $B = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix} \begin{array}{l} p \\ b \end{array}$.

Determinăm venitul lunar pe care îl obține întreprinderea:

$$v_{11} = 5 \cdot 50 + 3 \cdot 90 = 520 \text{ (în luna ianuarie)},$$

$$v_{21} = 6 \cdot 50 + 7 \cdot 90 = 930 \text{ (în luna februarie)},$$

$$v_{31} = 4 \cdot 50 + 8 \cdot 90 = 920 \text{ (în luna martie)}.$$

Se observă că v_{11} (respectiv v_{21}, v_{31}) se obține adunând produsele elementelor liniei înlătări (respectiv liniei a doua, a treia) cu elementele respective ale matricei-coloană B .

Matricea $V = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix}$ reprezintă produsul matricei A cu matricea B .

Definiție. Fie matricele $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$. Se numește **produsul** matricei A cu matricea B (în această ordine) matricea $D = (d_{sp}) \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{C})$ ale cărei elemente d_{sp} se calculează astfel:

$$d_{sp} = a_{s1}b_{1p} + a_{s2}b_{2p} + \dots + a_{sn}b_{np} = \sum_{i=1}^n a_{si}b_{ip}, \quad s = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, k}.$$

Se scrie: $D = A \cdot B$ sau $D = AB$.

Altfel spus, elementul d_{sp} al matricei produs este egal cu suma produselor elementelor liniei s a matricei A cu elementele respective ale coloanei p a matricei B (se mai spune că elementul d_{sp} este produsul dintre linia s a matricei A și coloana p a matricei B).

Atenție. Produsul AB este definit numai în cazul în care numărul de coloane ale matricei A este egal cu numărul de linii ale matricei B . Numărul de linii (coloane) ale matricei AB coincide cu numărul de linii (coloane) ale matricei A (B).

Exemplu

Să se calculeze $D = A \cdot B$, dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

În baza definiției, obținem:

$$D = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ -2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 & (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 & (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observație. Spre deosebire de înmulțirea numerelor, operația de înmulțire a matricelor nu este comutativă. În exemplul 1 s-a calculat produsul AB , iar BA nici nu are sens (nu există). Dar și în cazul în care ambele produse AB și BA au sens, ele nu sunt neapărat egale.

De exemplu: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Proprietățile înmulțirii matricelor sunt expuse în

Teorema 2. Dacă pentru matricele A, B, D sunt de sens expresia dintr-un membru al unei egalități de mai jos, atunci este definită expresia și din celălalt membru și are loc egalitatea respectivă:

- 1° $A(BD) = (AB)D$ (înmulțirea este asociativă);
- 2° $A(B + D) = AB + AD$, $(A + B)D = AD + BD$ (înmulțirea este distributivă față de adunare);
- 3° $'(AB)' = 'B' \cdot 'A'$;
- 4° $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, $I_n, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (I_n este element neutru la înmulțire în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$);
- 5° $A \cdot O = O$, $O \cdot A = O$.

Demonstrație

Aceste proprietăți se demonstrează în baza definiției egalității matricelor și a definițiilor operațiilor cu matrice.

Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea 1°.

Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ matrice arbitrară. Pentru ele să fie de sens produsul $(AB)D$. Să observăm mai întâi că are sens și produsul $A(BD)$: matricea BD conține n linii și q coloane, deci este definit produsul $A(BD)$ și el este o matrice de tip (m, q) – același tip ca și al matricei $(AB)D$. Pentru a obține egalitatea elementelor respective, notăm: $U = AB = (u_{ij})$, $V = BD = (v_{ij})$, $S = (AB)D = (s_{ij})$, $T = A(BD) = (t_{ij})$.

Avem:

$$u_{il} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl}, \quad v_{kj} = \sum_{l=1}^p b_{kl} d_{lj}, \quad s_{ij} = \sum_{l=1}^p u_{il} d_{lj} = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} d_{lj}, \quad t_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} v_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{ik} b_{kl} d_{lj},$$

adică $s_{ij} = t_{ij}$ pentru $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, q}$, și, în final, $A(BD) = (AB)D$. Aici am aplicat proprietățile operațiilor cu numere complexe. ►

Exercițiu. Demonstrați celelalte proprietăți.

Toate operațiile examineate anterior au sens în mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de aceea pot fi calculate puteri cu exponent natural ale unei matrice. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$. Se verifică fără dificultate egalitățile $A^s \cdot A^t = A^{s+t}$, $(A^s)^t = A^{st}$, $s, t \in \mathbb{N}^*$.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze $f(A) = A^3 - 2A^2 + 3I_2$, pentru $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Deci, } f(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

3. Să se determine A^n , dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

Vom aplica metoda inducției matematice.

Să intuijm o formulă pentru A^n . Pentru aceasta, calculăm A^2 , A^3 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se poate presupune că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pentru $n = 1$ această formulă este evidentă.

2. Presupunem că $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}^*$, și calculăm A^{k+1} . Folosind presupunerea,

$$\text{obținem: } A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. În baza metodei inducției matematice, formula $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

1.3. Transformări elementare ale matricelor. Matrice eșalon

Noțiunile ce urmează vor fi aplicate la rezolvarea sistemelor arbitrare de ecuații liniare.

Definiție. Se spune că matricea nenulă A este o **matrice eșalon** (sau **matrice în trepte**) dacă primul (de la stînga) element nenul al fiecărei linii, începînd cu a doua, e situat mai la dreapta decît primul element nenul al liniei precedente.

Primele (de la stînga) elemente neneule ale fiecărei linii (dacă există) se numesc **lideri** ai matricei.

Exemple

1. Matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ este matrice eșalon. Liderii ei sunt $a_{11} = 1$, $a_{23} = 3$.
2. Matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ nu este o matrice eșalon.

Observații. 1. Dacă matricea eșalon are linii nule, atunci ele sînt ultimele în această matrice.

2. Orice matrice eșalon pătratică este o matrice superior triunghiulară.

Exercițiu. Arătați că într-o matrice eșalon:

- a) dacă a_{ij} este lider, atunci $i \leq j$;
- b) $a_{ij} = 0$, oricare ar fi $i > j$.

Pentru a obține dintr-o matrice dată o matrice eșalon, vom efectua asupra liniilor ei transformări asemănătoare cu cele pe care le efectuăm asupra ecuațiilor unui sistem pentru a obține un sistem echivalent.

Definiție. Se numesc **transformări elementare asupra liniilor** unei matrice următoarele transformări:

- 1) permutarea a două linii;
- 2) înmulțirea elementelor unei linii cu un număr nenul;
- 3) adunarea la elementele unei linii a elementelor respective ale altelui linii, înmulțite cu același număr.

Matricele A și B de același tip se numesc **matrice echivalente** dacă una dintre ele se obține din cealaltă prin efectuarea unui număr finit de transformări elementare asupra liniilor.

Se scrie: $A \sim B$.

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Efectuăm asupra liniilor ei următoarele transformări (indicate cu ajutorul săgeților):

a) permuteam liniile a doua și a treia

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right);$$

b) înmulțim elementele liniei întâi cu i

$$i \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} i & -i & 0 & 2i \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right);$$

c) la elementele liniei întâi adunăm elementele respective ale liniei a treia înmulțite cu 2

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} -1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right);$$

d) la elementele liniei întâi înmulțite cu 3 adunăm elementele liniei a treia înmulțite cu 2

$$3 \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Teorema 3. Pentru orice matrice nenulă A există cel puțin un sir finit de transformări elementare asupra liniilor care, efectuate consecutiv, reduc A la o matrice eșalon.

Exemplu

Vom reduce matricea A din exemplul precedent la o matrice eșalon, arătând cu săgeți transformările efectuate consecutiv:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[2]{} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[2]{} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[2]{} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right).$$

Observații. 1. Există mai multe şiruri de transformări elementare asupra liniilor cu ajutorul cărora din matricea dată A se obține o matrice eșalon.

2. Matricea eșalon la care poate fi redusă A nu este unică.

1.4. Matrice inversabile

Este bine cunoscut faptul că pentru orice număr complex nenul a există a^{-1} , astfel încât $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \frac{1}{a} \cdot a = 1$. În intenția de a găsi o matrice B pentru matricea A , astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I$, se introduce următoarea noțiune:

Definiție. O matrice pătratică A se numește **inversabilă** dacă există o matrice pătratică B , astfel încât $AB = BA = I$.

Matricea B se numește **inversă** matricei A și se notează A^{-1} .

Este clar că matricele B și I sunt de același ordin ca și A . Din relațiile $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ rezultă că A^{-1} de asemenea este inversabilă și că inversa ei este A , adică $(A^{-1})^{-1} = A$.

Exemple

Inversele matricelor $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ sunt $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ și respectiv $B^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, deoarece $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proprietăți ale matricelor inversabile

1° Inversa unei matrice inversabile este unică.

Demonstrație

Presupunem contrariul.

Fie B și C două matrice inverse ale matricei A , adică $CA = AC = I$ și $BA = AB = I$. Din aceste egalități obținem: $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. ►

2° Dacă matricele $A_1, A_2, \dots, A_k \in M_n(\mathbb{C})$ sunt inversabile, atunci matricea $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k$ este inversabilă și $(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$.

Demonstrație

Într-adevăr,

$$(A_1 \cdot \dots \cdot A_k) \cdot (A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}) = A_1(A_2 \cdot \dots \cdot (A_{k-1} \cdot (A_k \cdot A_k^{-1})A_{k-1}^{-1}) \cdot \dots \cdot A_2^{-1})A_1^{-1} = \\ = A_1(A_2 \cdot \dots \cdot (A_{k-1} \cdot A_{k-1}^{-1}) \cdot \dots \cdot A_2^{-1})A_1^{-1} = \dots = A_1A_1^{-1} = I_n.$$

În mod analog se obține $(A_k^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1}) \cdot (A_1 \cdot \dots \cdot A_k) = I_n$.

Prin urmare, $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k$ este inversabilă și

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}. \quad \blacktriangleright$$

Transformările elementare ale liniilor matricei pot fi utilizate la calculul inversei unei matrice.

Pentru a determina inversa unei matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, poate fi aplicat următorul *algoritm*:

- se formează matricea cu n linii și $2n$ coloane $B = (A \mid I_n)$, scriind la dreapta de A matricea I_n – matricea unitate de ordinul n ;
- se aplică asupra liniilor matricei B transformări elementare, astfel încât în locul matricei A să se obțină matricea I_n .

Matricea care se obține pe locul unde era scrisă I_n va fi matricea A^{-1} .

Observație. În cazul în care în locul matricei A se obține o matrice eșalon care are pe diagonala principală toate elementele nenule, atunci A este inversabilă. Dacă, efectuând transformări elementare asupra matricei $B = (A \mid I_n)$, în locul matricei A se obține o matrice eșalon care are pe diagonala principală cel puțin un element egal cu zero, atunci matricea A nu este inversabilă.

Exerciții rezolvate

4. Să se determine inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -22 & -6 & 4 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 44 & -22 & 0 & 16 & 4 & -3 \\ 0 & 66 & 0 & -36 & 24 & 15 \\ 0 & 0 & -22 & -6 & 4 & -3 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 132 & 0 & 0 & 12 & 36 & 6 \\ 0 & 66 & 0 & -36 & 24 & 15 \\ 0 & 0 & -22 & -6 & 4 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{132} & \frac{36}{132} & \frac{6}{132} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{36}{66} & \frac{24}{66} & \frac{15}{66} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{22} & -\frac{4}{22} & \frac{3}{22} \end{array} \right) = (I_3 \mid A^{-1}).$$

Deci, $A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercițiu. Efectuați verificarea calculând $A \cdot A^{-1}$ și $A^{-1} \cdot A$.

4. Să se determine dacă este inversabilă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Deoarece pe locul matricei A am obținut o matrice eșalon având pe diagonala principală un element egal cu zero, rezultă că A nu este inversabilă.

Exerciții și probleme propuse

A

1. Să se calculeze:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ -2 & i \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 2-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 3i \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 2+i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -i & 3 \end{pmatrix}$

e) $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & i \end{pmatrix}$

f) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ i & 0 & 7 \\ 2 & -i & 3 \end{pmatrix}$

g) $2i \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ i & 2 & i-1 \\ 5 & i & -3 \end{pmatrix}$

h) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

i) $(7i \quad 3) - i \cdot \begin{pmatrix} 2 & i \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ i & 0 & 2 \\ 1 & -2 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Să se determine numerele x, y, z, u , dacă $x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & z & 6 \\ 1 & u & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.3. Să se calculeze AB , BA (în caz dacă există produsul respectiv):

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Să se calculeze:

a) $\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2$

e) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^2$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^3$

g) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^4$

Ce concluzie puteți trage din rezultatele obținute la a), b)?

5. Să se calculeze $A^2 - B^2$ (în caz dacă există), unde A, B sînt din exercițiu 3.6. Să se afle matricea X , astfel încît $3X + A = 2B$, unde A, B sînt din exercițiu 3.

7. Să se reducă matricea la matrice eșalon:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 25 & 32 & 19 & 46 \end{pmatrix}$

8. Cinci șantiere de construcție C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 folosesc cărămidă produsă la fabrici amplasate în localitățile A, B, C . Prețurile (sute lei) pentru transportarea unei palete cu 1000 de cărămizi de la fiecare fabrică la fiecare șantier sunt indicate în următoarea matrice:

$$T = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$$

Începând cu luna viitoare, prețurile se vor majora cu 10%. Folosind operația de înmulțire a matricei cu un scalar, să se afle noile prețuri.

9. Numărul de palete cu cărămidă transportate de la fabrici la șantiere (a se vedea problema 8) în primele trei luni ale anului sunt date respectiv de matricele M_1, M_2, M_3 :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 8 & 5 \\ 10 & 8 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 10 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicând operații cu matrice, să se determine numărul total de palete cu cărămidă transportate de la fiecare fabrică la fiecare șantier în aceste trei luni.

B

10. Să se calculeze:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -i & 2 \\ 3 & 0 & 2-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3i \\ -2+i & i & 0 \end{pmatrix}$;

d) $3 \cdot \begin{pmatrix} 1-i & 3 & -1 \\ 0 & i & 3+i \end{pmatrix}$; e) $i \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3i & i & 4+i \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$;

g*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$; h) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$; i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$,

j) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 18 & 8 \\ -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & -6 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Să se calculeze $f(A)$, dacă:

a) $f(X) = X^3 - 2X + I_3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $f(X) = X^3 - 3X + 2I_3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 12*. Să se arate că egalitatea $AB - BA = I$ este falsă, oricare ar fi matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

13. O întreprindere preconizează să procure 3 tipuri de mașini T_1, T_2, T_3 de la 3 furnizori F_1, F_2, F_3 . Numărul de mașini procurate de la fiecare furnizor este indicat în următoarea matrice:

$$M = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}$$

În funcție de varianta de completare a acestor mașini (două variante: V_1 și V_2), întreprinderea

$$\text{le poate procura de la fiecare furnizor la următoarele prețuri (u.m.): } P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ 5,1 & 4,1 \\ 5,2 & 4,0 \\ 5,0 & 3,8 \end{pmatrix} \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix}$$

Să se determine suma care trebuie achitată fiecărui furnizor (în ambele variante).

14. Să se determine numărul de linii nenule ale matricei eșalon obținute din matricea (în cazurile a), b), discuție în funcție de parametrul $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & \alpha & 1 \\ 0 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 8 & -2 & 6 & 7 \\ 2 & -1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 37 & 259 & 481 & 407 \\ 25 & 175 & 325 & 275 \\ 19 & 133 & 247 & 209 \end{pmatrix}.$$

15. Să se determine dacă matricea este inversabilă și, în caz afirmativ, să se calculeze inversa acesteia:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{g) } \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{h) } \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 7 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{i) } \begin{pmatrix} 0 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1-2i \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix};$$

$$\text{j) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{k) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}; \quad \text{l*) } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_n.$$

16. Să se determine toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $AX = XA$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

17. Să se rezolve ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

§2 Determinanți

Multe probleme pot fi rezolvate cu ajutorul sistemelor de ecuații liniare (adică ecuații de tipul $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$, $c, a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, n$). De exemplu, un elev a cumpărat 22 de caiete și creioane, achitând cumpărătura cu 20 lei. Cîte caiete și cîte creioane au fost procurate, dacă un caiet costă 1,5 lei, iar un creion 0,5 lei? Notăm cu x numărul de caiete, cu y – numărul de creioane cumpărate. Din condiția problemei obținem sistemul de 2 ecuații liniare cu 2 necunoscute: $\begin{cases} x + y = 22, \\ 2,5x + 1,5y = 42. \end{cases}$ Aplicînd una dintre metodele cunoscute (metoda reducerii, metoda substituției), obținem $x = 9$, $y = 13$.

În caz general, se examinează sisteme de ecuații liniare care conțin mai multe ecuații și mai multe necunoscute, pentru rezolvarea cărora metodele menționate sunt mai puțin eficiente. În cele ce urmează vom expune alte metode de rezolvare, axate pe noțiunea de matrice și pe noțiunea de determinant al matricei.

Observație. În acest paragraf, termenul „matrice” va semnifica „matrice pătratică”.

2.1. Determinanți de ordinul 2 (3).

Sisteme de 2 (3) ecuații liniare cu 2 (3) necunoscute

Forma generală a unui sistem arbitrar de 2 ecuații liniare cu 2 necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{C}, i, j = \overline{1, 2}. \quad (1)$$

Matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se numește **matricea sistemului** (1).

Considerînd că în fiecare ecuație cel puțin o necunoscută are coeficient nenul, rezolvăm sistemul aplicînd metoda reducerii. Obținem:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{cases} \quad (2)$$

Evident, orice soluție a sistemului (1) este soluție și pentru (2). Fie $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, atunci obținem

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (3)$$

Definiție. Numărul $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se numește **determinantul matricei**

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ sau **determinant de ordinul 2**.

Se mai notează: $\det A$, $|A|$ sau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Deci, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta$.

Expresia Δ se numește și **determinant principal al sistemului** (1).

Se observă că numărătorii rapoartelor din (3) de asemenea sănt valori ale unor determinanți, și anume: $b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_1$, $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_2$, numiți **determinanți secundari** (sau **auxiliari ai sistemului**) (1).

Menționăm că Δ_1 (sau Δ_2) este determinantul care se obține din $|A|$ prin substituirea coloanei 1 (respectiv coloanei 2) cu coloana $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ a termenilor liberi ai sistemului inițial.

Exemplu

Determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ este numărul $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2$.

Rezultatul obținut (3) stă la baza următoarei propoziții:

Teorema 4 (regula lui Cramer¹). Dacă determinantul principal Δ al sistemului (1) este nenul, atunci sistemul are o soluție unică: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.



Gabriel Cramer

Demonstrație

Din transformările efectuate mai sus rezultă unicitatea soluției: dacă $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$ este o soluție a sistemului (1), atunci ea coincide cu valorile pentru x_1 , x_2 calculate din (3). Faptul că expresiile (3) pentru x_1 , x_2 sănt soluții se verifică prin substituirea lor în (1). ►

Exercițiu rezolvat

↳ Să se rezolve în \mathbb{R} , prin metoda (regula) lui Cramer, sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$

Rezolvare:

Întrucât $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 12 = 16 \neq 0$, putem aplica regula lui Cramer. Obținem:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7. \quad \text{Prin urmare, } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{8}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{7}{16}.$$

$$\text{Răspuns: } S = \left\{ \left(\frac{5}{8}, -\frac{7}{16} \right) \right\}.$$

Aplicând metoda reducerii pentru a rezolva sistemul de 3 ecuații liniare cu 3 necunoscute, a cărui formă generală este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{C}, i, j = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

se pot obține ecuațiile $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$, $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2$, $\Delta \cdot x_3 = \Delta_3$,

¹ Gabriel Cramer (1704–1752) – matematician elvețian.

unde $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$,
 $\Delta_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}$,
 $\Delta_2 = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33}$,
 $\Delta_3 = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3$.

Definiție. Se numește **determinant al matricei** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ sau **determinant de ordinul 3** numărul

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

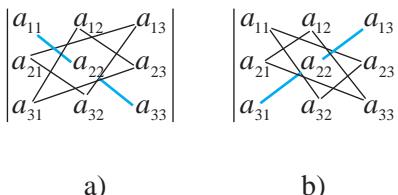
Se mai notează: $\det A$, $|A|$ sau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Exemplu

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-4) + 1 \cdot 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) - 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot (-4) = -11.$$

Observații. 1. Determinantul matricei A de ordinul 3 este o sumă de șase termeni, fiecare fiind produsul a 3 elemente situate cîte unul în fiecare linie și în fiecare coloană a matricei A (a determinantului).

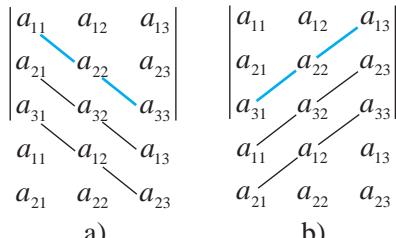
2. Pentru memorizarea algoritmului de calcul al determinantului de ordinul 3, se poate utiliza **regula triunghiurilor** (fig. 7.1) sau **regula lui Sarrus** (fig. 7.2): se iau cu semnul plus produsele elementelor unite printr-o linie sau plasate în vîrfurile unui triunghi din figura 7.1 a) sau 7.2 a), iar cu semnul minus – produsele elementelor unite printr-o linie sau plasate în vîrfurile unui triunghi din figura 7.1 b) sau 7.2 b).



a)

b)

Fig. 7.1



a)

b)

Fig. 7.2

Revenim la rezolvarea sistemului (4). Expresia Δ se numește **determinant principal** al acestui sistem (determinantul matricei A a sistemului). Mai observăm că termenii liberi $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ai ecuațiilor (5) sunt și ei determinanți de ordinul trei (verificați!):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Menționăm că Δ_i ($i = \overline{1, 3}$) (numit **determinant auxiliar**) este determinantul matricei care se obține din matricea A a sistemului (4) prin substituirea coloanei i cu coloana termenilor liberi ai sistemului (4).

Aplicând egalitățile (5), obținem următoarea teoremă, similară cu teorema 4.

Teorema 5 (regula lui Cramer). Dacă determinantul principal Δ al sistemului (4) este diferit de zero, atunci sistemul are o soluție unică:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine dacă poate fi aplicată regula lui Cramer și să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Rezolvare:

Deoarece $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 4 - 12 + 2 = -12$ și este nul, rezultă că regula lui

Cramer poate fi aplicată. Calculăm determinanții auxiliari:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -12; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12.$$

Obținem soluția: $x_1 = \frac{-12}{-12} = 1$, $x_2 = \frac{0}{-12} = 0$, $x_3 = \frac{-12}{-12} = 1$.

Răspuns: $S = \{(1, 0, 1)\}$.

Observație. Rezolvarea sistemelor de acest fel, în caz că determinantul principal este nul, se va examina în § 3.

2.2. Determinanți de ordinul n

Metoda lui Cramer de rezolvare a sistemelor de 2 (sau 3) ecuații liniare cu 2 (respectiv 3) necunoscute se va extinde pentru un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Rezolvarea sistemului se axează pe noțiunea de determinant de ordinul n .

Inițial, pentru comoditate, vom considera determinantul de ordinul 1, $\det(a_{11}) = a_{11}$, și vom expune un alt algoritm de calcul al determinanților de ordinul 3, numit **dezvoltarea determinantului după o linie/coloană**. În acest scop, grupăm termenii din definiția determinantului de ordinul 3, evidențierind elementele liniei întâi:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Acest rezultat poate fi scris sub forma:

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Determinanții de ordinul doi din această expresie se numesc **minori complementari** ai elementelor respective a_{ij} din fața lor: ei reprezintă determinanții matricelor obținute din matricea inițială suprimând linia 1 și coloana j . Minorul complementar al elementului a_{ij} se notează cu \bar{M}_j^i . În aceste notații, pentru determinantul matricei A se obține expresia $|A| = a_{11}(-1)^{1+1} \bar{M}_1^1 + a_{12}(-1)^{1+2} \bar{M}_2^1 + a_{13}(-1)^{1+3} \bar{M}_3^1$, care se numește **dezvoltarea determinantului după linia întâi**. În mod analog se obține dezvoltarea același determinant de ordinul 3 după oricare linie sau coloană. De exemplu, se verifică ușor egalitatea:

$$\begin{aligned}|A| &= a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= a_{13}(-1)^4 \bar{M}_3^1 + a_{23}(-1)^5 \bar{M}_3^2 + a_{33}(-1)^6 \bar{M}_3^3,\end{aligned}$$

care reprezintă **dezvoltarea determinantului după coloana a treia**.

În mod analog se obțin dezvoltările determinantului după oricare altă linie/coloană.

Exercițiu. Scrieți dezvoltările determinantului de ordinul 3 după alte linii, coloane.

Exercițiu rezolvat

✳ Să se calculeze $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, dezvoltîndu-l după o coloană.

Rezolvare:

Dezvoltăm determinantul după coloana întâi (elementul nul facilitează calculul):

$$\Delta = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) + 0 + 4 \cdot (-2) = -12.$$

Vom introduce noțiunea de determinant al matricei pătratice de ordinul n (pe scurt – determinant de ordinul n), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, inductiv, presupunînd cunoștene noțiunea de determinant de orice ordin mai mic sau egal cu $n-1$ și noțiunea de minor complementar al elementului a_{ij} al matricei $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, n$. Aceasta este determinantul matricei obținute din A prin suprimarea liniei i și coloanei j ; se notează cu \bar{M}_j^i .

Definiție. Se numește **determinant al matricei** $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, sau **determinant de ordinul n** numărul

$$\Delta = a_{11}(-1)^{1+1} \bar{M}_1^1 + a_{12}(-1)^{1+2} \bar{M}_2^1 + \dots + a_{1n}(-1)^{1+n} \bar{M}_n^1 = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1. \quad (6)$$

Se mai notează: $|A|$, $\det A$ sau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Noțiunea ce urmează este extrem de utilă pentru calculul determinanților, precum și pentru rezolvarea altor probleme.

Definiție. Se numește **complement algebric** al elementului a_{ij} al matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, (al determinantului $|A|$) numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} \bar{M}_j^i$.

De exemplu, minorul complementar al elementului a_{23} al determinantului $|A|$ din exercițiul precedent este $\bar{M}_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$, iar complementul algebric al acestuia este numărul $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot 6 = -6$.

În acești termeni, definiția determinantului poate fi formulată astfel:

Determinantul matricei este egal cu suma produselor elementelor liniei întâi cu complementii algebrici respectivi:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}. \quad (7)$$

Formulele (6) și (7) (pentru $n=3$, ele coincid cu formula de dezvoltare a determinantului de ordinul 3 după prima linie, obținută anterior) sunt numite **dezvoltare a determinantului după linia întâi**.

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\ &+ (-3) \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (+15) + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \cdot 0 = -15. \end{aligned}$$

Dacă în definiția determinantului am putea înlocui elementele primei linii cu cele ale altor linii (ca și pentru determinantii de ordinul 3), atunci am calcula determinantul precedent mai simplu: dezvoltându-l după linia a patra, vom avea nevoie doar de un minor complementar, deoarece ceilalți se vor înmulții cu 0. Teorema de mai jos stabilește că acest fapt este posibil.

Teorema 6. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$. Pentru orice $i = \overline{1, n}$ are loc egalitatea

$$\Delta = |A| = a_{i1}(-1)^{i+1} \bar{M}_1^i + a_{i2}(-1)^{i+2} \bar{M}_2^i + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \bar{M}_n^i = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}. \quad (8)$$

Formula (8) se numește **formula dezvoltării determinantului după linia i** .

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Rezolvare:

Aplicăm teorema 6 dezvoltând determinantul după linia a patra (deoarece ea conține cele mai multe elemente egale cu 0).

$$|A| = 0 \cdot (-1)^{4+1} \bar{M}_1^4 + 0 \cdot (-1)^{4+2} \bar{M}_2^4 + 3 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+4} \bar{M}_4^4 = (-3) \cdot 5 = -15.$$

Ideea de dezvoltare a determinantului după o linie care are mai multe elemente egale cu 0 generează o altă idee: posibilitatea dezvoltării determinantului după o coloană. Teorema ce urmează confirmă acest fapt.

Teorema 7. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$. Oricare ar fi $j = \overline{1, n}$,

$$\Delta = |A| = a_{1j}(-1)^{1+j} \bar{M}_j^1 + a_{2j}(-1)^{2+j} \bar{M}_j^2 + \dots + a_{nj}(-1)^{n+j} \bar{M}_j^n = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Această formulă se numește **formula dezvoltării determinantului după coloana j**.

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze determinantul din exercițiul precedent, dezvoltându-l după coloana a doua.

Rezolvare:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \bar{M}_2^2 + 0 \cdot (-1)^{3+2} \bar{M}_2^3 + 0 \cdot (-1)^{4+2} \bar{M}_2^4 = -1 \cdot 15 = -15.$$

2.3. Proprietățile determinantilor

Pentru a calcula determinanți de ordin mai mare decât 3 numai în baza definiției, se calculează, în caz general, un număr considerabil de determinanți de ordinul 3: de exemplu, patru determinanți pentru cel de ordinul 4, 20 de determinanți pentru cel de ordinul 5. Din acest motiv (și nu numai) vom demonstra unele proprietăți ale determinantelor de ordin arbitrar, care vor facilita calculul și aplicarea lor.

1° Determinantul matricei A este egal cu determinantul matricei transpuse $'A'$.

Proprietatea poate fi demonstrată pentru $n = 2$, $n = 3$ calculând $|A|$, $|'A'|$ sau utilizând inducția matematică pentru $n > 3$ (determinantul $|A|$ se dezvoltă după linia întâi, iar $|'A'|$ – după coloana întâi).

Observație. Din această proprietate rezultă că orice propoziție adevărată pentru liniile unui determinant va fi adevărată și pentru coloanele lui. Din acest motiv, proprietățile care urmează vor fi formulate doar pentru linii, însă ele sînt valabile și pentru coloane.

2° Dacă matricea B se obține din matricea A permutînd două linii, atunci $|B| = -|A|$.

Demonstrație

Aplicăm metoda inducției matematice: pentru $k = 2$ proprietatea se verifică imediat, iar trecerea de la $k - 1$ la k , $k \geq 3$, se efectuează dezvoltînd determinantul după o linie diferită de cele ce se permută. ►

Exemplu

Permutînd liniile 2 și 4 ale matricei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, obținem matricea

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Avem: $|A| = 3 \cdot (-1)^{4+3} \bar{M}_3^4 = -15$, $|B| = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-15) = 15$. Deci, $|B| = -|A|$.

3° Dacă o matrice A are două liniî egale, atunci determinantul ei este egal cu zero.

Demonstrație

Într-adevăr, permutînd liniile egale, obținem o matrice B , astfel încît, în baza proprietății 2°, $|B| = -|A|$. De fapt, $B = A$, deoarece am permuatat liniile egale. Prin urmare, $|A| = |B| = -|A|$, adică $2|A| = 0$ și deci $|A| = 0$. ►

4° Suma produselor elementelor unei liniî a matricei cu complementii algebrici respectivi ai elementelor oricărei altei liniî este egală cu zero:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (i \neq k).$$

Demonstrație

Examinăm următorul determinant

$a_{11} \dots a_{1n}$	$a_{i1} \dots a_{in}$	$a_{i1} \dots a_{in}$	$a_{n1} \dots a_{nn}$
	← linia k		
		$a_{11} \dots a_{in}$	
		$a_{n1} \dots a_{nn}$	

Expresia din membrul stîng al egalității reprezintă dezvoltarea după linia k a acestui determinant. Cum acest determinant conține două liniî egale, el este egal cu 0. ►

5° Dacă înmulțim toate elementele unei liniî a unei matrice A cu un număr α , atunci determinantul matricei obținute A' este egal cu produsul dintre α și determinantul matricei A .

Se mai spune: factorul comun al elementelor unei linii poate fi scos în fața determinantului.

Demonstrație

Elementele a'_{ij} ale liniei i a matricei A' au forma: $a'_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$. Dezvoltând determinantul $|A'|$ după linia i , obținem: $|A'| = \sum_{j=1}^n (\alpha \cdot a_{ij}) \cdot A_{ij} = \alpha \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} = \alpha \cdot |A|$. ►

Exemplu

$$\begin{vmatrix} 2i & 3i \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 16i - 15i = i, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1, \quad \text{deci } \begin{vmatrix} 2i & 3i \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

6° Dacă toate elementele unei linii a unei matrice sunt egale cu 0, atunci determinantul acestei matrice este egal cu 0.

Proprietatea rezultă imediat din proprietatea **5°** pentru $\alpha = 0$.

Analog cu proprietatea **5°** se demonstrează proprietatea **7°**.

7° Dacă o matrice conține două linii proporționale, atunci determinantul ei este egal cu 0.

Liniile i și s ale unei matrice A se numesc **linii proporționale**, dacă $a_{ij} = \beta \cdot a_{sj}$, $j = \overline{1, n}$.

Exemplu

$$\begin{vmatrix} 2 & i & -3 \\ 4 & 2i & -6 \\ 7 & \pi & i\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{fiindcă liniile 1 și 2 sunt proporționale.}$$

8° Dacă la elementele unei linii a matricei A adunăm elementele respective ale altor linii înmulțite cu unul și același număr nenul α , atunci se obține o matrice al cărei determinant este egal cu determinantul matricei A .

Demonstrație

Fie la elementele liniei k a matricei A se adună elementele respective ale liniei s înmulțite cu numărul α . Elementele liniei k a matricei obținute A' au forma: $a_{kj} + \alpha a_{sj}$. Dezvoltând determinantul $|A'|$ după linia k , obținem

$$|A'| = \sum_{j=1}^n (a_{kj} + \alpha \cdot a_{sj}) A_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj} + \alpha \cdot \sum_{j=1}^n a_{sj} A_{kj} = |A| + \alpha \cdot 0 = |A|. \quad ►$$

Exemplu

Dacă la elementele liniei a doua a matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ adunăm elementele

respective ale liniei a treia înmulțite cu -2 , obținem matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Astfel, $|A| = |B| = 0$.

9° Fie elementele liniei i a matricei A au forma $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$, $j = \overline{1, n}$. Dacă A' (respectiv A'') este matricea care se obține din A înlocuind elementele liniei i cu elementele a'_{ij} (respectiv a''_{ij}), $j = \overline{1, n}$, atunci $|A| = |A'| + |A''|$.

Demonstrație

Dezvoltând determinantul $|A|$ după linia i , obținem:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (a'_{ij} + a''_{ij}) \cdot (-1)^{i+j} \bar{M}_j^i = \sum_{j=1}^n a'_{ij} (-1)^{i+j} \bar{M}_j^i + \sum_{j=1}^n a''_{ij} (-1)^{i+j} \bar{M}_j^i = |A'| + |A''|,$$

deoarece minorii complementari ai elementelor $a'_{ij} + a''_{ij}$, a'_{ij} , a''_{ij} ale matricelor A , A' și respectiv A'' coincid. ►

2.4. Calculul determinanților

1 Un procedeu de calcul al determinanților îl cunoaștem din definiția determinanților (prin dezvoltare după o linie [coloană]).

2 Un al doilea procedeu de calcul constă în reducerea calculului determinantului de ordinul n la calculul unui singur determinant de ordinul $n-1$. Se aplică proprietățile determinanților, în special proprietatea 8°, pentru a obține o linie sau o coloană în care este cel mult un element nenul.

Pentru a evita calcule complicate, se recomandă, în prealabil, să se adune sau să se scadă unele linii (coloane) pentru a obține un element egal cu 1 sau -1 în linia (coloana) respectivă.

Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze $\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 2 & 3i \\ i & 2+i & 0 \\ 0 & 5 & -2+i \end{vmatrix}$.

Rezolvare:

Adunăm la linia întâi linia a doua: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4+i & 3i \\ i & 2+i & 0 \\ 0 & 5 & -2+i \end{vmatrix}$. Acum este simplu să obținem zero pe locul lui i : la linia a doua adunăm prima linie înmulțită cu $-i$.

Atunci: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4+i & 3i \\ 0 & 3-3i & 3 \\ 0 & 5 & -2+i \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3-3i & 3 \\ 5 & -2+i \end{vmatrix} = (3-3i)(-2+i) - 15 = -18 + 9i$.

3 Un alt procedeu de calcul este reducerea determinantului la forma triunghiulară (toate elementele situate deasupra sau dedesubtul diagonalei principale sau secundare sănătule).

La calculul determinanților de formă triunghiulară se vor aplica următoarele formule:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & 1_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2\ n-1} & 0 \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{1n}a_{2\ n-1}\dots a_{n1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aceste rezultate se obțin dezvoltând determinantul Δ_1 (respectiv Δ_2) și ceilalți determinanți, care apar în continuare, după linia (coloana) care conține doar un element nenul.

De exemplu:

$$\Delta_1 = (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Exemple

$$1. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{13}a_{22}a_{31} \cdot (-1)^{\frac{3(3-1)}{2}} = -a_{13}a_{22}a_{31}.$$

$$2. \text{ Determinantul } \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \text{ (matricea respectivă) nu are forma triunghiulară,}$$

însă, folosind proprietățile determinanților, el poate fi transformat (redus) la o altă formă:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8(-1)^{\frac{4 \cdot 3}{2}} \cdot (-1)(-3) = 24. \end{aligned}$$

Pentru calculul unor determinanții de ordin arbitrar n este eficient de a reduce determinanții la forma triunghiulară.

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze determinantul de ordinul n : $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

Rezolvare:

Adunăm la prima linie toate celelalte linii, scoatem factorul $(n - 1)$, apoi la fiecare din liniile $2, \dots, n$ adunăm prima linie înmulțită cu -1 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}^{-1} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (n-1) \cdot (-1)^{n-1}.$$

Teorema 8 (determinantul produsului matricelor). Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Exemplu

Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, atunci $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $|A| = 1$, $|B| = -2$, $|AB| = -2$.

2.5. Matrice inversabile (continuare)

Utilizând determinanții, complementii algebrici ai elementelor unei matrice pătratice, vom prezenta încă un criteriu de inversabilitate a matricei și o altă metodă de calcul al inversei unei matrice (a se vedea secvența 1.4, § 1).

Teorema 9. Matricea pătratică este inversabilă dacă și numai dacă determinantul ei este diferit de zero.

Demonstrație

Necesitatea rezultă din teorema 8. Într-adevăr, dacă matricea A este inversabilă, atunci $I = A \cdot A^{-1}$. Deci, $1 = |I| = |A| \cdot |A^{-1}|$, de unde rezultă că $|A| \neq 0$ și (foarte important!) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$.

Suficiența este de o mare importanță: demonstrația ei furnizează o formulă pentru calculul matricei inverse. Astfel, vom arăta că pentru $n \geq 2$,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Într-adevăr, în baza proprietății 4° a determinantilor, obținem:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_{ii}a_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{ii}a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{ii}a_{in} \\ \sum_{i=1}^n A_{i1}a_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{i1}a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{i1}a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n A_{in}a_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{in}a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{in}a_{in} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = \frac{|A|}{|A|} I = I.$$

În mod analog se arată că $A \cdot A^{-1} = I_n$.

Pentru $n = 1$, din condiția $|A| = |a_{11}| \neq 0$ scriem $A^{-1} = \left(\frac{1}{a_{11}} \right)$, deci $AA^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. ►

Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

Calculăm determinantul matricei: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 12 = 22$.

Inversa există, întrucât determinantul matricei A este diferit de zero. Determinăm complementii algebrici ai elementelor matricei A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

Conform formulei (9), obținem: $A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Aplicând inversa unei matrice, pot fi rezolvate diverse ecuații matriciale. Dacă matricele A și B au același număr de linii, atunci ecuația $AX = B$, unde A este pătratică cu $\det A \neq 0$, poate fi rezolvată în modul următor: înmulțind-o la stânga cu A^{-1} , obținem, consecutiv, egalitățile matriciale: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$, $I \cdot X = A^{-1}B$, $X = A^{-1}B$.

De exemplu, pentru matricea A din exercițiul precedent și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avem

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 4 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercițiu. a) Arătați că soluția ecuației $XA = B$, $|A| \neq 0$, este matricea $X = B \cdot A^{-1}$.

b) Arătați că soluția ecuației $AXB = C$, $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|A| \cdot |B| \neq 0$, este matricea $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Probleme rezolvate

1. Pentru producerea 1 t de bomboane „Masca” se folosesc 0,2 t de produse de cacao și 0,5 t de zahăr, iar pentru producerea 1 t de bomboane „Griliaj” se folosesc 0,14 t de produse de cacao și 0,6 t de zahăr (în afară de alte componente). Să se afle cantitatea de bomboane produse de fiecare fel, dacă s-au folosit 0,15 t de produse de cacao și 0,5 t de zahăr.

Rezolvare:

Fie x_1 și x_2 cantitatea (în tone) de bomboane produse „Masca” și respectiv „Griliaj”.

Alcătuim sistemul de ecuații: $\begin{cases} 0,2x_1 + 0,14x_2 = 0,15 \\ 0,5x_1 + 0,6x_2 = 0,5 \end{cases}$ sau, în formă matricială, $AX = B$,

unde $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,14 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,5 \end{pmatrix}$. Calculăm: $A^{-1} = \frac{1}{0,05} \begin{pmatrix} 0,6 & -0,14 \\ -0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Înmulțind egalitatea $AX = B$ la stânga cu A^{-1} , obținem:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{0,05} \begin{pmatrix} 0,6 & -0,14 \\ -0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \frac{1}{0,05} \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Astfel, au fost produse 0,4 t de bomboane „Masca” și 0,5 t de bomboane „Griliaj”.

2. Se poate demonstra că aria triunghiului $M_1M_2M_3$, unde $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,

$M_3(x_3, y_3)$, se calculează conform formulei: $\mathcal{A}_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. În particular,

punctele M_1 , M_2 , M_3 vor fi coliniare, dacă determinantul respectiv este nul.

Fie punctele $M_1(2, 3)$, $M_2(3, 0)$, $M_3(2, 2)$. Să se calculeze aria triunghiului $M_1M_2M_3$ sau să se arate că punctele respective sunt coliniare.

Rezolvare:

Determinantul $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ este egal cu -1 , deci punctele încăuză nu sunt coliniare. Aria

$\Delta M_1M_2M_3$ este $\frac{1}{2} \cdot |-1| = \frac{1}{2}$ (unități pătrate).

Exerciții propuse

A

1. Să se calculeze determinantul:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix};$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix};$

c) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2a & 3 \end{vmatrix};$

d) $\begin{vmatrix} 5i & 2 \\ i & -3 \end{vmatrix};$

e) $\begin{vmatrix} 2-i & i \\ 3 & 5-i \end{vmatrix};$

f) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix};$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix};$

h) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix};$

i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix};$

j) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$

2. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul aplicând (dacă este posibil) regula lui Cramer:

a) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 = 1, \\ 7x_1 + 11x_2 = 3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_2 = 2; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 6; \end{cases}$

e) $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c, \\ -bx_1 + ax_2 = d, \quad a \cdot b \neq 0, \quad a \neq b; \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15; \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$

j) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

B

3. Să se calculeze determinantul:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix};$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix};$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix};$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix};$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$

4. Aplicând proprietățile determinantelor, să se demonstreze egalitatea:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$ b) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

5. Dacă vom schimba semnele tuturor elementelor determinantului, cum se va modifica valoarea determinantului de ordinul: a) 3; b) n ?

6. Cum se va schimba valoarea determinantului matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dacă fiecare element va fi înlocuit cu conjugatul său?

7. Cum se va schimba valoarea determinantului de ordinul n dacă fiecare element se va înmulți cu același număr nenul α ?

8. Să se arate că determinantul $\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & c_1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & c_2 \\ z_3 & \bar{z}_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $z_i \in \mathbf{C}$, este un număr pur imaginär sau 0.

9. Să se rezolve în $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ sistemul de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x+iy-2z=10, \\ x-y+2iz=20, \\ ix+3iy-(1+i)z=30. \end{cases}$$

10. Să se calculeze aria triunghiului $M_1M_2M_3$ sau să se arate că punctele M_1, M_2, M_3 sunt coliniare.

- a) $M_1(2, 1), M_2(3, 4), M_3(1, 6);$ b) $M_1(0, 0), M_2(2, 1), M_3(4, 2);$
 c) $M_1(-2, 4), M_2(0, -3), M_3(1, 7);$ d) $M_1(5, 4), M_2(11, 0), M_3(0, 3).$

11. Utilizând proprietățile determinanților, să se calculeze:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ c & b & a \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

12. Utilizând complementări algebrici ai elementelor, să se calculeze inversa matricei:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{g) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

13. Să se rezolve ecuațiile matricale $AX = B, YA = B$, unde A este din 12 a) și B este din 12 b).

14. Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ x & -3 & 1 \\ 2 & -5 & x+1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a-x & a & a \\ a & a-x & a \\ a & a & a-x \end{vmatrix} = 0.$$

15. Să se calculeze determinantul și să se scrie rezultatul sub formă de produs:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \\ b^2+c^2 & a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}.$$

§3 Sisteme de ecuații liniare

3.1. Noțiuni generale

În acest paragraf vom determina condițiile în care un sistem arbitrar de ecuații liniare are soluții și vom expune unele metode de determinare a mulțimii soluțiilor acestuia.

Forma generală a unui sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad a_{ij}, b_i \in \mathbf{C}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Numerele a_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, se numesc **coeficienți ai necunoscuteelor**, iar b_1 , b_2 , ..., b_m – **termeni liberi** ai sistemului. Din coeficienții necunoscuteelor și din termenii

liberi formăm două matrice: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$,

numite, respectiv, **matricea sistemului** și **matricea extinsă** a sistemului.

Definiție. Sistemul ordonat de n numere complexe (c_1, \dots, c_n) se numește **soluție** a sistemului (1) dacă, înlocuind necunoscutele x_i , respectiv, cu c_i , $i = \overline{1, n}$, fiecare ecuație din (1) se transformă într-o propoziție adevărată, adică

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot c_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Observație. Pentru comoditate, vom prezenta soluția unui sistem de ecuații cu n necunoscute (fiind stabilită ordinea x_1, \dots, x_n) și ca o matrice-coloană $X_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, considerînd că se substituie $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$.

Se poate arăta că dacă un sistem de ecuații liniare are cel puțin două soluții, atunci mulțimea soluțiilor lui este infinită.

Un sistem de ecuații liniare se numește **compatibil** dacă el are cel puțin o soluție. Sistemul care are o soluție unică se numește **compatibil determinat**, iar cel care are mai mult decât o soluție – **compatibil nedeterminat**. Un sistem de ecuații care nu are soluții se numește **incompatibil**.

Exemple

Fie sistemele de ecuații liniare $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 = -1; \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ 4x_1 - 8x_2 = 12; \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ x_1 - 2x_2 = 4. \end{cases}$

Primul sistem este compatibil determinat, fiindcă determinantul matricei sistemului este nenul și prin metoda lui Cramer stabilim că el are o soluție unică. Al doilea sistem este compatibil nedeterminat: soluții ale sistemului sănt, de exemplu, $x_1 = 1, x_2 = -1$; $x_1 = -3, x_2 = -3$. Ultimul sistem este incompatibil, fiindcă membrii din stînga ai ecuațiilor sănt aceeași, iar cei din dreapta diferă.

A rezolva un sistem de ecuații liniare înseamnă:

- a) a stabili dacă el este compatibil;
- b) în caz afirmativ, a determina mulțimea soluțiilor sale.

În caz general, vom considera că rezolvăm sistemul de ecuații în mulțimea numerelor complexe.

Scrierea matricială a sistemului (1) este:

$$AX = B, \quad (2)$$

unde $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{C})$.

Fie încă un sistem de ecuații liniare:

$$A_1 X = B_1, \quad (3)$$

unde matricele A_1, B_1 sunt de același tip ca și matricele A, B , respectiv.

Definiție. Sistemele (2) și (3) se numesc **echivalente** dacă mulțimile lor de soluții sunt egale (în particular, dacă ambele nu au soluții).

Exemplu

Sistemele $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ și $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ au soluție comună $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$,

însă totuși nu sunt echivalente, fiindcă $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2$ este soluție a sistemului al doilea, dar nu este soluție pentru primul sistem.

Lemă. Dacă $A, A_1 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B, B_1 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{C})$ și există o matrice inversabilă $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, astfel încât $UA = A_1$, $UB = B_1$, atunci sistemele (2) și (3) sunt echivalente.

Demonstrație

Fie sistemul (2) compatibil, $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ o soluție arbitrară pentru (2), adică este adevărată egalitatea $AX_0 = B$. Înmulțind la stânga această egalitate cu U , obținem $UAX_0 = UB$, sau $A_1X_0 = B_1$. Deducem că orice soluție a sistemului (2) este soluție și pentru sistemul (3). Analog se obține că orice soluție a sistemului (3) este soluție și pentru (2), deoarece $A = U^{-1}A_1$, $B = U^{-1}B_1$. Deci, sistemele (2) și (3) sunt echivalente. ►

3.2. Metode de rezolvare a sistemelor de n ecuații liniare cu n necunoscute

□ Metoda matricială

Considerând în sistemul (1) $m = n$, se obține următorul sistem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (4)$$

Scrierea matricială a acestui sistem este

$$AX = B, \quad (5)$$

unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este matricea pătratică a sistemului, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Teorema 10. Dacă matricea A a sistemului (4) este inversabilă, atunci sistemul are o soluție unică:

$$X_0 = A^{-1}B. \quad (6)$$

Demonstrație

Înmulțind la stânga egalitatea (5) cu A^{-1} , obținem consecutiv: $A^{-1}(AX) = A^{-1} \cdot B$, $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $X = A^{-1} \cdot B$. În baza lemei din secvența 3.1, sistemele (5) și $X = A^{-1} \cdot B$ sunt echivalente: în calitate de U din lemă s-a luat matricea inversabilă A^{-1} . ►

Exercițiu rezolvat

↳ Să se rezolve în $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sistemul de ecuații: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

Rezolvare:

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Formăm matricea $(A | I)$ și efectuăm transformări elementare asupra liniilor ei pentru a obține pe locul matricei A matricea I (dacă este posibil):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Elementele de pe diagonala principală a matricei eșalon obținute din A sunt nenule, deci (în baza condiției de inversabilitate a matricei (§ 1, secvența 1.4)) A este inversabilă. Continuăm să efectuăm transformări până obținem zerouri deasupra diagonalei principale:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right). \text{ Așadar, } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conform (6), soluția este $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, adică $x_1 = 1$,

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Răspuns: $S = \{(1, 0, 1)\}$.

□ **Regula lui Cramer** (demonstrată în § 2 pentru $n = 2$, $n = 3$) este o altă metodă de rezolvare a sistemelor de n ecuații liniare cu n necunoscute, $n \in \mathbb{N}^*$. Aplicând proprietatea 4° (secvența 2.3), formula (7) (secvența 2.2) și formula (9) (secvența 2.5) pentru A^{-1} , din (6) obținem formulele pentru calculul valorilor necunoscute x_1, x_2, \dots, x_n .

$$\text{Astfel, } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_{i1} b_i \\ \sum_{i=1}^n A_{i2} b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{in} b_i \end{pmatrix}, \text{ de unde:}$$

$$x_j = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^n A_{ij} b_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \Delta_j \text{ fiind determinanțul matricei care se obține din } A \text{ prin substituirea coloanei } j \text{ cu coloana termenilor liberi ai sistemului (4). Determinantul } \Delta = |A| \text{ se numește determinant principal, iar } \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n - \text{determinanți secundari ai sistemului (4). Rezultatul obținut este}}$$

Teorema 11 (regula lui Cramer). Dacă determinantul Δ al matricei sistemului de ecuații liniare (4) este diferit de zero, atunci sistemul este compatibil determinat și soluția sa este:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Exemplu

Aplicând teorema 11 sistemului de ecuații din exercițiul precedent, obținem $\Delta = -3$, $\Delta_1 = -3$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = -3$. Deci, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

3.3. Metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare

Spre deosebire de metodele examineate, **metoda lui Gauss** (numită și **metoda eliminărilor succesive**), expusă în continuare, poate fi aplicată la rezolvarea oricărui tip de sisteme de ecuații liniare (1). Asupra sistemelor vom efectua următoarele transformări ce permit să se obțină sisteme echivalente cu cel inițial (echivalența se verifică nemijlocit):

- permutarea a două ecuații;
- înmulțirea ambilor membri ai unei ecuații cu un număr nenul;
- adunarea la fiecare membru al unei ecuații a membrilor respectivi ai altei ecuații, înmulțiti cu unul și același număr.

Este clar că efectuarea acestor transformări asupra ecuațiilor unui sistem este echivalentă cu efectuarea transformărilor elementare respective asupra liniilor matricei extinse \bar{A} a sistemului (a se vedea secvența 1.3).

Exemplele ce urmează vor facilita înțelegerea metodei lui Gauss și reprezintă două tipuri de sisteme care pot fi obținute ca rezultat al aplicării acestei metode.

1. Să se rezolve în C sistemul de ecuații liniare
- $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Observăm că matricea sistemului este superior triunghiulară, având toate elementele de pe diagonala principală nenele. Se spune că un astfel de sistem este **triunghiular**.

Sistemele de acest tip se rezolvă relativ simplu: din ultima ecuație calculăm valoarea ultimei necunoscute și o substituim în toate celelalte ecuații; din penultima ecuație calculăm valoarea penultimei necunoscute și.a.m.d., pînă calculăm valoarea primei necunoscute din prima ecuație. Prin urmare, sistemul va avea o unică soluție.

În exemplul dat, din ultima ecuație obținem $x_3 = \frac{1}{2}$; substituim valoarea lui x_3 în primele două ecuații și din ecuația a doua obținem $x_2 = -\frac{1}{2}$; în final, substituind valoarea lui x_2 în prima ecuație, obținem $x_1 = 1$. Unica soluție a sistemului este: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Răspuns: $S = \left\{ \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$.

2. Să se rezolve în \mathbf{C} sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

Observăm că sistemul nu conține o ecuație de forma $0 = b$, $b \neq 0$, numărul necunoscutei lui este mai mare decât numărul ecuațiilor și matricea sistemului are forma eșalon. Se spune că un atare sistem este **trapezic** (altfel zis, un sistem de ecuații liniare este un sistem trapezic dacă matricea lui are forma eșalon, numărul r de linii nenule ale matricei sistemului este egal cu numărul de linii nenule ale matricei extinse a sistemului și r este mai mic decât numărul de necunoscute ale sistemului). Necunoscutele ai căror coeficienți sănătății matricei sistemului trapezic se consideră, de regulă, **necunoscute principale**, iar celelalte – **necunoscute secundare**.

În exemplul dat, considerăm x_1 și x_2 necunoscute principale, iar x_3 – necunoscută secundară.

Sistemul trapezic (inițial) se reduce la un sistem triunghiular în necunoscutele principale x_1 , x_2 în următorul mod:

Lăsăm în membrul stîng al fiecărei ecuații toți termenii ce conțin necunoscutele principale, iar ceilalți termeni îi trecem în membrul drept, schimbîndu-le semnul:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 - x_3, \\ 3x_2 = 1 + x_3. \end{cases}$$

Notînd necunoscuta secundară x_3 cu α , $\alpha \in \mathbf{C}$, și rezolvînd sistemul, obținem aşa-numita *soluție generală* a sistemului: $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\alpha$, $x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{C}$. Este clar că pentru fiecare valoare atribuită parametrului α se determină în mod unic valorile necunoscutele principale. De exemplu, pentru $\alpha = 0$ obținem o soluție a sistemului $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = 0$, numită *soluție particulară*.

Pentru $\alpha = -1$ se obține $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$ – o altă soluție particulară a sistemului.

Parametrului α , deci și necunoscutei secundare x_3 , îi putem atribui o infinitate de valori din \mathbf{C} . Din acest motiv, sistemul este compatibil nedeterminat.

Observații. 1. Lista necunoscutele principale se determină neunivoc: este important doar să se obțină un sistem triunghiular în raport cu necunoscutele principale.

De exemplu, în sistemul precedent pot fi numite necunoscute principale x_1 , x_3 .

2. Sistemele triunghiulare și sistemele trapezice sunt compatibile: sistemul triunghiular are soluție unică, iar sistemul trapezic are o mulțime infinită de soluții.

Compatibilitatea sistemelor de ecuații liniare este determinată de

Teorema 12. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{C})$ și $\bar{A} = (A | B)$. Sistemul de ecuații liniare $AX = B$ este compatibil dacă și numai dacă matricele eșalon A_1, \bar{A}_1 obținute din A și respectiv \bar{A} au același număr de linii nenele.

Demonstrație

Necesitatea. Considerând că sistemul $AX = B$ este compatibil, îl vom reduce la un sistem trapezic, echivalent cu cel inițial.

Fie $\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1p} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & a'_{rp} & \dots & a'_{rm} & b'_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{pmatrix}$ matricea eșalon obținută din matricea extinsă \bar{A}

a sistemului cu ajutorul transformărilor elementare ale liniilor, $a'_{rp} \neq 0$.

Deoarece sistemul $AX = B$ este compatibil, rezultă că este compatibil și sistemul a cărui matrice extinsă este \bar{A}_1 . Prin urmare, $b_i = 0$, pentru orice $i = r+1, m$, adică numărul de linii nenele ale matricei A_1 este egal cu numărul de linii nenele ale matricei \bar{A}_1 .

Suficiența. Dacă numărul r de linii nenele ale matricei A_1 este egal cu numărul de linii

nenele ale matricei \bar{A}_1 , atunci \bar{A}_1 are forma $\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1p} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & a'_{rp} & \dots & a'_{rm} & b'_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a'_{rp} \neq 0$.

Sistemul care are matricea extinsă \bar{A}_1 este echivalent cu sistemul $AX = B$ și este un sistem triunghiular (în cazul $r = n$) sau un sistem trapezic (în cazul $r < n$), de aceea este compatibil. ►

Exerciții rezolvate

1. Să se determine compatibilitatea sistemului $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

Rezolvare:

Formăm matricea extinsă \bar{A} a sistemului și o reducem la forma eșalon:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 6 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Matricea eșalon $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ obținută din matricea sistemului, precum și

matricea $\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ obținută din matricea extinsă au cîte 2 linii nenele.

Prin urmare, sistemul inițial este compatibil.

2. Dacă în exemplul precedent termenul liber al ecuației a treia ar fi, de exemplu, 5,

atunci ultima matrice ar fi: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$. Astfel, matricele eşalon obținute

din matricea sistemului și din cea extinsă conțin 2 și respectiv 3 linii nenele, deci sistemul este incompatibil.

Ideea reducerii matricei extinse a sistemului la forma eşalon, folosită în demonstrația teoremei 12, constituie baza **metodei lui Gauss** de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. De reținut că această metodă are avantajul de a fi ușor programabilă pe calculator. Ea constă în următoarele:

1. Scriem matricea extinsă $\bar{A} = (A | B)$ a sistemului (1).
2. Prin transformări elementare ale liniilor, reducem această matrice la o matrice eşalon $\bar{A}_1 = (A_1 | B_1)$, unde A_1 este matricea eşalon obținută din A .
3. Dacă numărul de linii nenele ale matricei A_1 nu este egal cu numărul de linii nenele ale matricei \bar{A}_1 , atunci sistemul este incompatibil.
4. Dacă numărul de linii nenele ale matricei A_1 este r și este egal cu numărul de linii nenele ale matricei \bar{A}_1 , atunci sistemul este compatibil.

Distingem două cazuri posibile.

- 4.1. Numărul r menționat în punctul 4 este egal cu numărul necunoscutelor. În atare caz, matricea eşalon A_1 este superior triunghiulară, toate elementele de pe diagonala principală sănt nenele. Scriem sistemul căruia îi corespunde matricea extinsă \bar{A}_1 ; evident, el este triunghiular și, prin urmare, are o soluție unică.
- 4.2. Numărul menționat r este mai mic decât numărul n al necunoscuteelor. În acest caz, matricea eşalon A_1 conține mai multe coloane decât liniile nenele. Scriem sistemul căruia îi corespunde matricea extinsă \bar{A}_1 (acest sistem este trapezic și este echivalent cu sistemul (1)). În continuare, specificăm necunoscutele principale (numărul lor este r), apoi necunoscutele secundare, pe care le notăm $x_p = \alpha, x_q = \beta, \dots$, unde α, β, \dots sănt parametri cu valori din \mathbb{C} . Lăsăm în membrul săting al fiecărei ecuații toți termenii ce conțin necunoscutele principale, iar ceilalți termeni îi trecem în membrul drept, schimbîndu-le semnul. Deoarece $r < n$, în membrii din dreapta se va conține cel puțin un parametru. După aceste transformări se obține un sistem triunghiular de r ecuații cu r necunoscute (cele principale). Pentru fiecare set de valori atribuite parametrilor, într-un mod unic se determină valorile necunoscutele principale. Sirul obținut de valori pentru x_1, \dots, x_n va constitui ***o soluție particulară*** a sistemului. În acest mod se obține o infinitate de soluții, deoarece parametrilor le putem atribui o infinitate de valori.

Observație. Pentru a descrie mulțimea infinită de soluții care se obțin în cazul 4.2, vom proceda astfel. Din sistemul redus $A_1 X = B_1$ exprimăm necunoscutele principale x_k, x_l, \dots prin parametrii α, β, \dots . Sistemul de relații obținut:

$$\begin{cases} x_k = f_k(\alpha, \beta, \dots) \\ \dots \\ x_l = f_l(\alpha, \beta, \dots) \\ \dots \\ x_p = \alpha \\ x_q = \beta \\ \dots \end{cases} \quad (7)$$

se numește **soluție generală** a sistemului (1) și descrie mulțimea tuturor soluțiilor acestui sistem, în sens că orice soluție a acestuia se obține din (7) pentru unele valori ale parametrilor.

Exerciții rezolvate

- ↳ 1. Să se rezolve în $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ sistemul de ecuații
- $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Dacă el este compatibil nedeterminat, să se determine și o soluție particulară.

Rezolvare:

Formăm matricea extinsă \bar{A} a sistemului și o reducem la o matrice eșalon:

$$\xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & 7 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Constatăm că numărul liniilor nenule ale matricei eșalon A_1 la care s-a redus matricea sistemului este $r = 2$ și este egal cu numărul liniilor nenule ale matricei eșalon \bar{A}_1 la care s-a redus matricea extinsă, deci sistemul este compatibil. Întrucât acest număr este mai mic decât numărul necunoscutorilor, rezultă că sistemul are o infinitate de soluții. Pentru a determina soluția generală, scriem sistemul corespunzător matricei eșalon \bar{A}_1 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ -x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Necunoscute principale pot fi alese x_1 și x_2 , atunci necunoscută secundară va fi x_3 . Notând necunoscuta secundară cu α , $\alpha \in \mathbf{C}$, obținem sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 + 2\alpha, \\ -x_2 = 2 - 3\alpha. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem în necunoscutele x_1, x_2 , aflăm soluția generală:

$$x_1 = 6 - 4\alpha, \quad x_2 = -2 + 3\alpha, \quad x_3 = \alpha.$$

Dacă atribuim lui α , de exemplu, valoarea 0, obținem o soluție particulară a sistemului: $x_1 = 6, x_2 = -2, x_3 = 0$.

Răspuns: $S = \{(6 - 4\alpha, -2 + 3\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbf{C}\}$;

soluție particulară: $x_1 = 6, x_2 = -2, x_3 = 0$.

↳ 2. Să se rezolve în $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = \alpha \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$ analizând toate cazurile posibile (în funcție de valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{C}$).

Rezolvare:

Formăm matricea extinsă a sistemului și o reducem la o matrice eșalon:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \alpha \\ 0 & -1+\alpha & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & 6-3\alpha & -3+\alpha-\alpha^2 \end{array} \right).$$

1) Dacă $6-3\alpha \neq 0$, adică $\alpha \neq 2$, atunci sistemul este triunghiular, deci este compatibil determinat, cu soluția unică: $x_1 = \frac{3+\alpha}{6-3\alpha}$, $x_2 = \frac{3+\alpha}{-6+3\alpha}$, $x_3 = \frac{\alpha^2-\alpha+3}{-6+3\alpha}$.

2) Dacă $6-3\alpha=0$, adică $\alpha=2$, atunci sistemul obținut $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ este incompatibil, deoarece matricea eșalon A_1 obținută din matricea sistemului are

$$2 \text{ linii nenele}, \text{ iar cea obținută din matricea extinsă } -3 \text{ linii nenele: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right).$$

↳ 3. Să se rezolve în \mathbb{C} sistemul de ecuații $\begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 3+2i, \\ 2x_1 + x_2 + (-2+i)x_3 + 2ix_4 = 4+5i, \\ x_1 + 2ix_2 + (-1+i)x_3 + (2+i)x_4 = 3. \end{cases}$

Rezolvare:

Scriem matricea extinsă a sistemului și o reducem la forma eșalon:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2i & -1 & 1+i & 3+2i \\ 2 & 1 & -2+i & 2i & 4+5i \\ 1 & 2i & -1+i & 2+i & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2i & -1 & 1+i & 3+2i \\ 0 & 1-4i & i & -2 & -2+i \\ 0 & 0 & i & 1 & -2i \end{array} \right).$$

Obținem sistemul trapezic respectiv: $\begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 3+2i, \\ (1-4i)x_2 + ix_3 - 2x_4 = -2+i, \\ ix_3 + x_4 = -2i. \end{cases}$

Declarăm necunoscute principale x_1, x_2, x_4 , iar x_3 – necunoscută secundară și rezolvăm sistemul $\begin{cases} x_1 + 2ix_2 + (1+i)x_4 = 3+2i + x_3 \\ (1-4i)x_2 - 2x_4 = -2+i - ix_3 \\ x_4 = -2i - ix_3 \end{cases}$ în necunoscutele x_1, x_2, x_4 .

Notând $x_3 = \alpha$, obținem soluția generală $x_1 = \frac{1}{17}(-5+48i-(6+7i)\alpha)$,

$x_2 = \frac{1}{17}(10-11i+(12-3i)\alpha)$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = -2i-i\alpha$.

Răspuns: $S = \left\{ \left(\frac{1}{17}(-5+48i-(6+7i)\alpha), \frac{1}{17}(10-11i+(12-3i)\alpha), \alpha, -2i-i\alpha \right) \alpha \in \mathbb{C} \right\}$.

Observație. Soluția generală nu este univoc determinată, deoarece ea depinde de sirul de transformări elementare aplicate pentru a obține un sistem trapezic din cel dat, de necunoscutele principale selectate. Însă în toate soluțiile generale, în expresiile din membrii din dreapta, figurează același număr de necunoscute secundare $(n - r)$, n fiind numărul necunoscutele și r – numărul de linii nenule ale matricei eșalon.

De exemplu, dacă în exercițiul 1 numim x_1, x_3 necunoscute principale, atunci, notând $x_2 = \alpha$, avem sistemul $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 2 - 2\alpha \\ 3x_3 = 2 + \alpha \end{cases}$ de unde obținem soluția generală $x_1 = \frac{1}{3}(10 - 4\alpha), x_2 = \alpha, x_3 = \frac{1}{3}(2 + \alpha), \alpha \in \mathbf{C}$.

3.4. Sisteme de ecuații liniare omogene

Sistemul de ecuații liniare (1) se numește **omogen** dacă termenii liberi ai tuturor ecuațiilor sunt 0. Forma generală a unui sistem de m ecuații liniare omogene cu n necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Observație. Matricea extinsă a sistemului omogen se deosebește de matricea sistemului printr-o coloană nulă (ultima), de aceea numărul de linii nenule ale matricelor eșalon obținute din ele este același.

Aplicînd rezultatele obținute anterior, obținem fără dificultate următoarele *propoziții*:

1. Orice sistem omogen de ecuații liniare este compatibil, avînd cel puțin soluția nulă: $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.
2. Dacă numărul liniilor nenule ale matricei eșalon obținute din matricea sistemului (8) este egal cu numărul n al necunoscutele, atunci sistemul este compatibil determinat, cu soluția unică nulă: $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.
3. Dacă numărul liniilor nenule ale matricei eșalon obținute din matricea sistemului (8) este mai mic decît numărul necunoscutele, atunci sistemul este compatibil nedeterminat. În particular, aceasta are loc în cazul în care numărul ecuațiilor sistemului inițial este mai mic decît numărul necunoscutele sau dacă $m = n$ și determinantul matricei sistemului este egal cu 0.

Exercițiu rezolvat

- ↳ Să se rezolve în $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

Rezolvare:

Reducem matricea sistemului la forma eșalon:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 - R_2 \\ R_3 - \frac{4}{3}R_1 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 18 & 0 \\ 0 & -5 & -30 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 - R_3 \\ R_3 + 5R_2 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \cdot (-\frac{1}{6})} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Sistemul respectiv are forma $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

E comod să numim principale necunoscutele x_1 și x_2 . Notăm necunoscuta secundară $x_3 = \alpha$ și rezolvăm sistemul $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -6\alpha \\ x_2 = -6\alpha \end{cases}$ în necunoscutele x_1 , x_2 . Obținem soluția generală $x_1 = 8\alpha$, $x_2 = -6\alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Răspuns: $S = \{(8\alpha, -6\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$.

Exerciții propuse

A

1. Să se determine care dintre tripletele de numere sunt soluții ale sistemului de ecuații liniare

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases} \quad (\text{necunoscutele se ordonează } (x, y, z)):$$

- a) (0, 0, 0); b) (1, 1, 1); c) (0, -1, 1); d) (3, 1, 0).

2. Să se determine dacă poate fi aplicată metoda lui Cramer și să se rezolve în \mathbb{C} sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} -x + 8y + 3z = 2, \\ 2x + 4y - z = 1, \\ 2x - z = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y + 9z = 16, \\ 2x + 2y + 2z = 2, \\ x + 2y + 3z = 4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 4z = -7, \\ -2x + y + 3z = -7, \\ x + 2y - 2z = 7; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 4y + 6z = -2, \\ 2x + y + z = 2, \\ x + 3y + z = 5. \end{cases}$

3. Să se rezolve în \mathbb{C} , aplicând metoda lui Gauss, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} -x + 4y - 7z = 5, \\ x - y - 2z = -2, \\ 2y - 6z = 2; \end{cases}$	b) $\begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ 2x + y = 0, \\ -x - y + 2z = 0; \end{cases}$	c) $\begin{cases} x + y = 0, \\ x + 2z = 4, \\ 2x + y + z = 2; \end{cases}$
d) $\begin{cases} -x + y + 3z = 1, \\ x + 2y + 2z = 3, \\ 7x + y - 6z = 5; \end{cases}$	e) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y + z = 4, \\ y + z = -3; \end{cases}$	f) $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2y - z = 1. \end{cases}$

4. a) Nelu a achitat pentru 3 tartine și 2 cești de cafea 21,5 lei, iar colegul său pentru o cafea și 2 tartine a plătit 13 lei. Să se determine prețul unei tartine și al unei cești de cafea, compunând un sistem de ecuații liniare.

b) Altă dată Nelu a achitat pentru 2 chifle, un ceai și 2 prăjitură 20 lei, iar colegul său a achitat pentru o chiflă, un ceai și 3 prăjitură 22 lei. Compuneți un sistem de ecuații corespunzător acestei situații. Se pot determina prețurile produselor cumpărate? De ce?

B

5. Să se rezolve în multimea numerelor complexe, prin metoda lui Cramer, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 2x_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + ix_2 + 2x_3 = i, \\ x_2 + (2-i)x_3 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

6. Să se stabilească dacă este compatibil sistemul:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = \lambda, \\ x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

7. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemele compatibile din exercițiul 6.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul omogen (efectuând studiul în funcție de $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Exerciții și probleme recapitulative

A

1. Să se calculeze:

$$\text{a) } 3A - 2iB; \quad \text{b) } iA + 2B,$$

$$\text{unde } A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 2 & 3i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & i+1 \end{pmatrix}.$$

2. Să se afle produsele:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3);$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -3i \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 5 & -1 & 6 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Să se determine valorile parametrilor $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care sunt adevărate egalitățile:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2x-3y \\ -7x+6y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-x-11 \\ 19 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} y+3x & -1 \\ 3 & y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Să se calculeze $A^2 - 5A + 7I_2$, dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Să se reducă matricea la o matrice eșalon:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 6 & -4 \\ 5 & 2 & -7 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 1+i \end{pmatrix}.$$

6. Să se determine tipul matricei X care satisface egalitatea $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Să se calculeze determinantul matricei A :

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3i & -2i \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -3 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} a+b & b-a & b \\ b+c & c-b & c \\ c+d & a-c & a \end{pmatrix}$; f) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2i \\ 2 & 1 & 3i \\ 4 & 5 & -2i \end{pmatrix}$; g) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

8. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, aplicînd metoda lui Gauss sau metoda lui Cramer, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 = 1, \\ 2x_1 - ix_2 = i; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_2 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ 4x_1 + 8x_2 - 11x_3 = 17, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ e) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12; \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_3 = 10; \end{cases}$ h) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -10. \end{cases}$

9. Un elev are o colecție de gîndaci și păianjeni, în total 8 insecte. Gîndacii au câte 6 picioare, iar păianjenii – câte 8 picioare. Cîți gîndaci și cîți păianjeni sînt în colecție, dacă toate insectele au 54 de picioare?

10. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este de 13 cm, iar aria sa – de 30 cm^2 . Să se determine lungimile catetelor triunghiului.

11. Să se determine valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{C}$ pentru care sistemul are doar soluția nulă:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

B

12. Fie $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$. Să se determine o valoare a lui $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încît $\lambda \cdot A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$.

13. Să se afle valorile parametrilor $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ pentru care este adevărată egalitatea:

a) $\begin{pmatrix} x+1 & x+y \\ 0 & x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -x-1 \\ 0 & 9-2x \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -x & y \\ u+1 & v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 3v & 1-2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

14. Fie o matrice pătratică A de ordinul 3 cu elementele $a_{ij} \in \{0, 1\}$. Să se determine valoarea cea mai mare a $\det A$.

15. Să se determine $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Fie o matrice pătratică A , de ordinul 3, ale cărei elemente $a_{ij} \in \{-1, 1\}$.
- Să se arate că $\det A$ este un număr par.
 - Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o poate lua $\det A$.
17. Să se reducă matricea la o matrice eșalon:
- a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
18. Să se calculeze produsele AB , BA (dacă există):
- a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ -5 & -2 & 2 \\ -13 & -7 & 4 \end{pmatrix}$;
- c) $A = \begin{pmatrix} -i & 3 & 1+i \\ 0 & i & 1-i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.
19. Să se afle valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă și să se determine inversa acesteia.
20. Să se determine matricea X care verifică egalitatea $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
21. Să se calculeze determinantul matricei A :
- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
22. Se poate arăta că volumul paralelipipedului $A_1A_2A_3A_4A'_1A'_2A'_3A'_4$, unde $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A'_4(x_4, y_4, z_4)$, se calculează conform formulei:
- $$V = \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$
- Să se calculeze volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_1A'_1}$, dacă $A_1(1, 1, 1)$, $A_2(1, 2, 2)$, $A_3(0, 4, 2)$, $A'_4(5, 6, 8)$.
23. Să se rezolve în \mathbf{C} ecuația:
- a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ x & 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$.

24. Să se găsească o matrice X , $X \neq I_3$, care comută cu matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
25. Să se discute compatibilitatea sistemului $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = 4 - \alpha \\ \alpha x_1 + 4x_2 = 4, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \end{cases}$ în funcție de valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R}$.
26. Să se calculeze inversele matricelor A din exercițiul 7 (dacă există).
27. Să se calculeze inversele matricelor A din exercițiul 21 (dacă există).
28. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, aplicând metoda lui Cramer sau metoda lui Gauss, sistemul de ecuații:
- a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10; \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 7; \end{cases}$
- c) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1; \end{cases}$
- d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2; \end{cases}$
- e) $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1; \end{cases}$
- f) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$
29. Să se determine compatibilitatea (în funcție de $\lambda \in \mathbb{C}$) și să se rezolve sistemul omogen:
- a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$
- b) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0; \end{cases}$
- c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ \lambda x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$
30. În două vase se află soluție de același acid, dar de diferită concentrație: în primul vas sunt 75 l , iar în al doilea $- 50\text{ l}$ de soluție. Dacă se amestecă aceste cantități de soluție, se obține o soluție cu o concentrație de 42% de acid. Dacă se vor lua aceste soluții în cantități egale, se va obține o soluție cu o concentrație de 50% de acid. Ce cantitate de acid este în fiecare vas?
31. Distanța dintre două orașe este de 30 km . Doi bicicliști pornesc din aceste orașe unul spre celălalt. Dacă primul se pornește cu 2 ore mai devreme decât al doilea, atunci ei se vor întâlni peste $2,5$ ore după ce a plecat biciclistul al doilea. Dacă al doilea biciclist se va porni cu 2 ore mai devreme decât primul, atunci ei se vor întâlni peste 3 ore după ce a plecat primul. Care este viteza fiecărui biciclist?
32. Trei persoane au plasat capitalul disponibil cu dobînzile anuale de 4% , 5% și respectiv 6% . Peste un an, ei au obținut în total 530 u.m. dobîndă. Persoana a doua a primit o dobîndă cu 70 u.m. mai mare decât prima. Dacă tot capitalul ar fost plasat cu dobînda de 5% anual, atunci dobîndă ar fi constituit 500 u.m. Să se determine suma de bani plasată de fiecare persoană.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

A

1. Calculați:

a) $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Cu ajutorul transformărilor elementare ale liniilor, transformați matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ într-o matrice eșalon.}$$

3. Rezolvați în $C \times C \times C$, prin metoda lui Cramer, sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 5x_3 = -1. \end{cases}$$

4. Rezolvați în $C \times C \times C$ sistemul de ecuații liniare omogene

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Dacă el este compatibil nedeterminat, aflați soluția generală și o soluție particulară.

B

Timp efectiv de lucru:
90 de minute

În itemul 3 indicați litera corespunzătoare variantei corecte.

1. Efectuați operațiile:

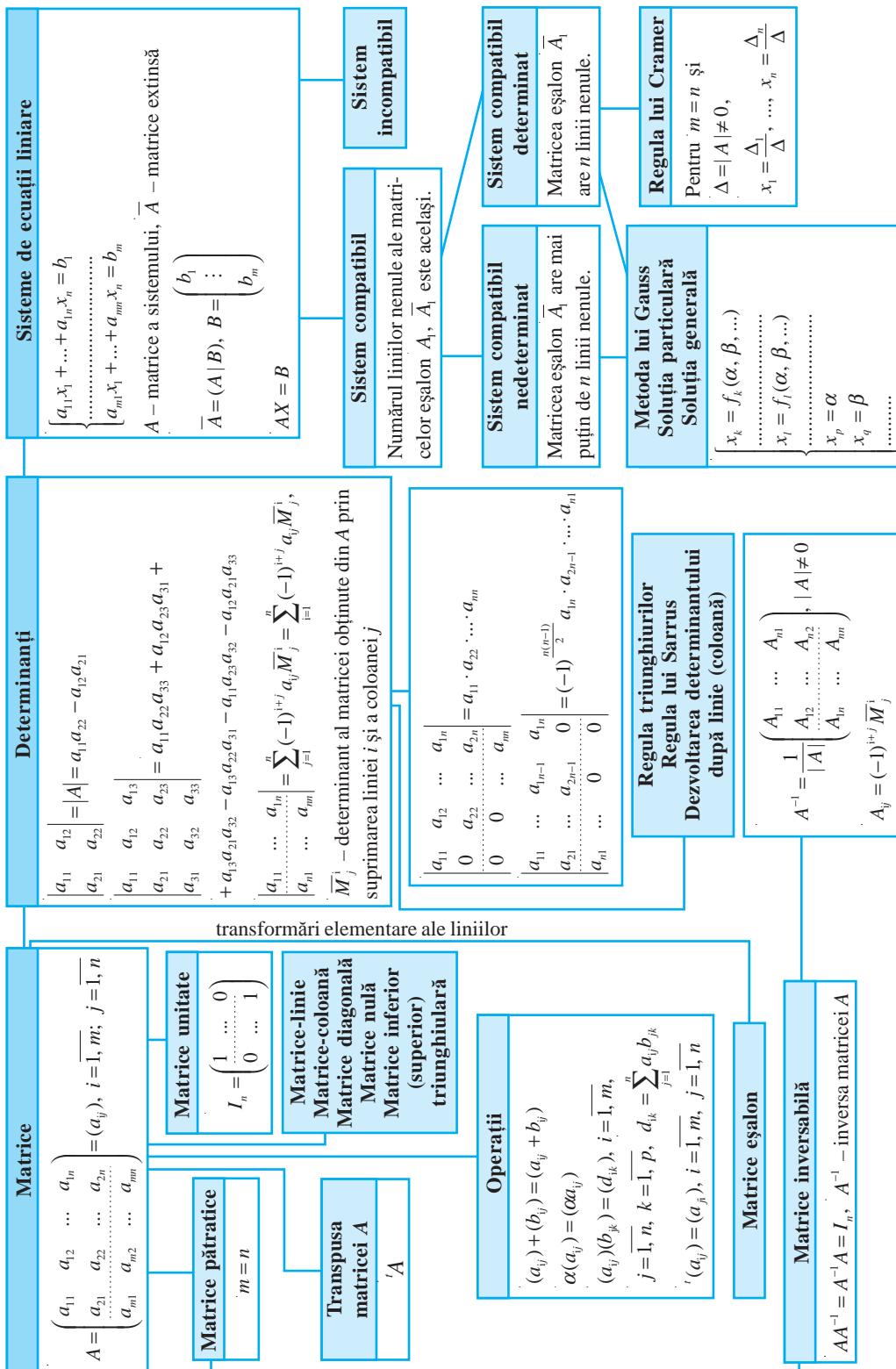
a) $i \cdot \begin{pmatrix} 3i & 2-i & 7+2i \\ 3-i & 0 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & i-1 & 7-i \\ i-1 & 2 & 3+i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-i & i-1 \\ 3i & 2+i \end{pmatrix}$.

2. Determinați o matrice eșalon echivalentă cu matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3i & 0 & 2 & -i \\ -4 & i & 1 & 5 & 2i \\ 3 & 5i & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.3. Determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ este egal cu **A** 1. **B** 0. **C** -4. **D** 6.4. Determinați inversa matricei A din itemul 3.5. Rezolvați ecuația matricială $XA = B$, matricea A fiind din itemul 3, iar $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe, prin metoda lui Cramer sau prin metoda

matricială, sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$
7. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe sistemul de ecuații liniare $AX = O$, matricea A fiind din itemul 2.



Obiective

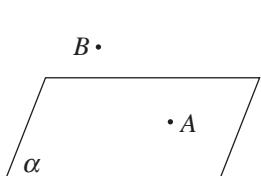
- ⇒ identificarea în diverse contexte și utilizarea axiomelor, definițiilor și teoremelor specifice geometriei în spațiu în diverse contexte;
- ⇒ identificarea în situații reale și/sau modelate și construirea dreptelor concurente, necoplanare, paralele;
- ⇒ identificarea în diverse contexte a pozițiilor relative a două drepte în spațiu, ale dreptei și planului, ale planelor;
- ⇒ construirea dreptelor ce intersectează planul, a planelor ce se intersectează și a planelor paralele;
- ⇒ aplicarea criteriilor de paralelism al dreptelor, al dreptei cu planul și a două plane în diferite contexte.

§1 Axiomele geometriei în spațiu

În geometria în spațiu, ca și în geometria în plan, noțiunile și proprietățile figurilor se stabilesc prin definiții, axiome și teoreme. În spațiu, pe lîngă noțiunile fundamentale deja cunoscute: *punct*, *dreaptă*, *distanță* și *măsură a unghiurilor*, apare și noțiunea *plan*. Prin urmare, sistemul de axiome ale geometriei în plan necesită o extindere.

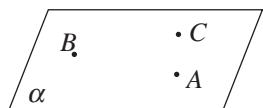
Vom completa grupul de axiome ale geometriei în plan cu trei axiome care exprimă proprietățile fundamentale ale punctelor, dreptelor și planelor în spațiu:

- S₁** Oricare ar fi planul, există puncte care aparțin acestui plan și puncte care nu-i aparțin (fig. 8.1 a)).
- S₂** Trei puncte necoliniare determină un plan și numai unul (fig. 8.1 b)).
- S₃** Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci intersecția lor este o dreaptă (fig. 8.1 c)).



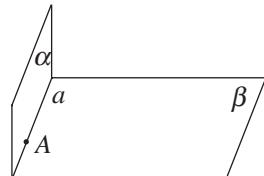
A ∈ α, B ∉ α

a)



A, B, C ∈ α

b)

(A ∈ α, A ∈ β, α ≠ β) ⇒
⇒ α ∩ β = a

c)

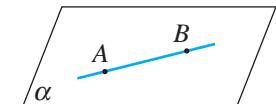
Fig. 8.1

În baza acestor axiome pot fi demonstreate următoarele teoreme:

Teorema 1. Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci orice punct al dreptei aparține acestui plan (fig. 8.2 a)).

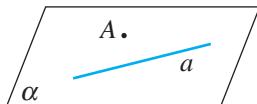
Teorema 2. O dreaptă și un punct ce nu aparține acestei drepte determină un unic plan (fig. 8.2 b)).

Teorema 3. Două drepte concurente determină un unic plan (fig. 8.2 c)).



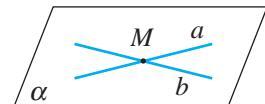
$$A, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$$

a)



$A \notin a \Rightarrow$ punctul A și dreapta a determină planul α

b)



$a \cap b = M \Rightarrow$ dreptele a și b determină planul α

c)

Fig. 8.2

Planul se notează cu literele mici ale alfabetului grecesc: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Planul determinat de o dreaptă d și un punct A se notează (A, d) sau (d, A) . Planul determinat de punctele necoliniare A, B, C se notează (ABC) .

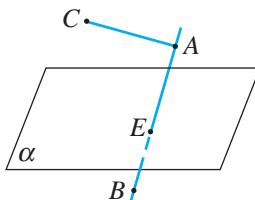
Punctele care aparțin unui plan se numesc **puncte coplanare**, în caz contrar – **necoplanare**.

Teorema 4 (de separare a spațiului). Orice plan α împarte mulțimea punctelor spațiului în două submulțimi nevide disjuncte de puncte, astfel încât pentru orice două puncte A, B din submulțimi diferențe, segmentul AB intersectează planul α , iar pentru orice două puncte C, A din aceeași submulțime, segmentul CA nu intersectează planul α (fig. 8.3).

Definiții. • Fiecare dintre submulțimile din teorema 4 se numesc **semispații deschise** determine de planul α , numit **frontiera semispațiului**.

• Reuniunea semispațiului deschis cu frontieră sa se numește **semispațiu închis**.

Se notează: $(\alpha A$ – semispațiu deschis cu frontieră α și care conține punctul A ; $[\alpha A$ – semispațiu închis cu frontieră α și care conține punctul A (fig. 8.3).



$$C \in [\alpha A, [CA] \cap \alpha = \emptyset, B \notin [\alpha A, [AB] \cap \alpha = E$$

Fig. 8.3

Probleme propuse

A

1. Este posibil ca numai trei vîrfuri ale unui paralelogram să aparțină unui plan?

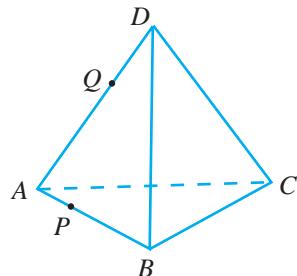
2. Centrul unui cerc și două puncte de pe cerc aparțin unui plan.

Să se determine valoarea de adevăr a propoziției:

„Orice punct al cercului aparține acestui plan”.

3. Fie $DABC$ un tetraedru, $P \in (AB)$, $Q \in (AD)$. Să se construiască după figura alăturată liniile de intersecție a planelor:

- ABD și CPQ ;
- CPQ și ABC ;
- CPQ și ADC .



4. Lungimea fiecărei muchii a tetraedrului $ABCD$ este a . Să se afle aria secțiunii APQ , dacă P este mijlocul muchiei BD , iar Q – mijlocul muchiei DC .

5. Se dau trei drepte care au un punct comun și nu sunt situate în același plan. Să se determine numărul de plane determinate de aceste drepte.

6. Se dau patru drepte care au un punct comun, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coplanare. Să se determine numărul de plane determinate de aceste drepte.

7. Fie patru puncte necoplanare. Să se afle:

- numărul de drepte determinate de aceste puncte;
- numărul de plane determinate de aceste puncte.

8. Fie cinci puncte, astfel încât oricare patru nu sunt coplanare. Să se determine:

- numărul de drepte determinate de aceste puncte;
- numărul de plane determinate de aceste puncte.

9. Poate oare o dreaptă să aibă cu un plan exact:

- două puncte comune;
- 2014 puncte comune;
- un punct comun?

10. Cîte puncte comune poate avea un plan cu:

- un segment;
- o semidreaptă;
- un cerc?

11. Trei puncte arbitrar ale unui dreptunghi aparțin unui plan. Aparține oare dreptunghiul acestui plan?

B

12. Dreptele a și b sunt paralele. Să se arate că dacă dreapta a intersectează un plan α ($a \not\subset \alpha$), atunci și dreapta b intersectează acest plan.

13. Dreptele AB și CD sunt neconcurrente. Să se arate că există un unic plan ce conține dreapta AB și care este paralel cu dreapta CD .

14. Trei drepte d_1 , d_2 și d_3 sunt concurente două cîte două în puncte diferite. Să se demonstreze că aceste drepte sunt situate în același plan.

15. Punctul A nu aparține planului determinat de punctele necoliniare B, C, D . Să se demonstreze că dreptele AD și CB nu sunt conținute de același plan.
16. Punctele A, B, C, D aparțin și planului α , și planului β . Să se demonstreze că aceste puncte sunt coliniare, dacă se știe că planele α și β sunt distincte.
17. Fie patru puncte ce nu aparțin unuia și aceluiași plan. Să se demonstreze că oricare trei puncte din cele date nu sunt coliniare.
18. Fie α și β plane care se intersectează după dreapta a , iar punctele A, B aparțin planului α și sunt separate de dreapta a . Să se arate că planul β separă punctele A și B .
19. Fie α și β plane distincte. Să se arate că există cel puțin o dreaptă neinclusă în nici unul dintre cele două plane.
20. Dreptele AB și CD nu sunt situate în același plan. Să se arate că și dreptele AC și BD nu sunt situate în același plan.

§2 | Pozițiile relative a două drepte în spațiu

Fie dreptele a și b în spațiu. Distingem următoarele cazuri posibile ale pozițiilor relative a două drepte în spațiu:

- dreptele a și b au două puncte comune diferite (în acest caz, dreptele coincid, fiindcă două puncte diferite determină o dreaptă și numai una);
- dreptele a și b au un unic punct comun (în cazul dat, dreptele se numesc **concurente** în acest punct) (fig. 8.4);
- dreptele a și b sunt situate în același plan și nu au puncte comune (fig. 8.5);
- dreptele a și b nu se află în același plan. Astfel de drepte se numesc **necoplanare** (fig. 8.6).

În cazurile a), b), c) dreptele a, b se numesc **coplanare** (fig. 8.4, 8.5).

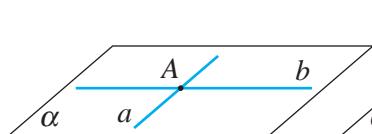


Fig. 8.4

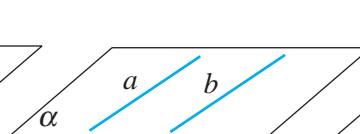


Fig. 8.5

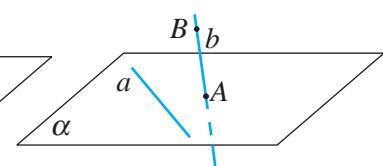


Fig. 8.6

Existența dreptelor necoplanare se demonstrează astfel:

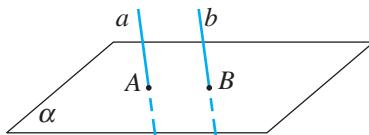
În spațiu există un plan α și un punct B ce nu aparține acestui plan. În planul α există o dreaptă a și un punct A ce nu aparține acestei drepte (fig. 8.6). Punctele distincte A și B determină dreapta b , care este necoplanară cu dreapta a .

Definiție. Două drepte în spațiu se numesc **paralele** dacă ele sunt situate în același plan și nu au puncte comune sau dacă coincid (fig. 8.5).

Observație. Dacă două drepte distincte în spațiu nu au puncte comune, aceasta încă nu înseamnă că ele sunt paralele (fig. 8.6). Pentru a confirma că două drepte distincte sunt paralele în spațiu, trebuie să verificăm dacă ele sunt situate într-un plan și nu au puncte comune.

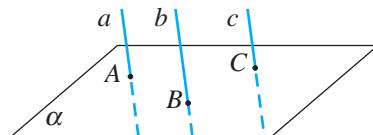
Teorema 5. Dacă una dintre două drepte distincte paralele intersectează un plan, atunci și cealaltă dreaptă intersectează acest plan (fig. 8.7).

Teorema 6. Dacă două drepte sunt paralele cu o a treia dreaptă, atunci ele sunt paralele (fig. 8.8).



$$(a \parallel b, a \cap \alpha = A) \Rightarrow b \cap \alpha \neq \emptyset$$

Fig. 8.7



$$(a \parallel b, a \parallel c) \Rightarrow b \parallel c$$

Fig. 8.8

Exercițiu. Demonstrați teoremele 5 și 6.

Probleme rezolvate

1. Fie punctele necoplanare A, B, C, D . Să se demonstreze că mijloacele segmentelor AD, DC, CB și BA sunt vîrfurile unui paralelogram.

Rezolvare:

Fie M, N, P și Q mijloacele segmentelor AD, DC, CB și respectiv BA (fig. 8.9). Atunci $[MQ]$ este linie mijlocie a triunghiului ABD , de unde rezultă că $[MQ] \parallel [DB]$, iar $[NP]$ este linie mijlocie a triunghiului BDC , deci $[NP] \parallel [DB]$. Conform teoremei 6, $[MQ] \parallel [NP]$. În mod analog se demonstrează că $[MN] \parallel [QP]$. Prin urmare, laturile opuse ale patrulaterului $MNPQ$ sunt paralele, ceea ce demonstrează că el este un paralelogram.

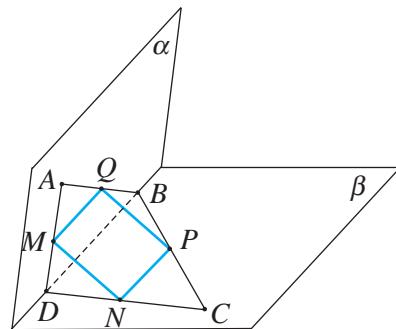


Fig. 8.9

2. Fie punctele necoplanare A, B, C, D . Punctul $E \in (AB)$, iar punctul $F \in (DC)$ (fig. 8.10). Să se arate că:

- punctele E și F sunt distincte;
- dreptele EF și AD , EF și BC , EF și AC , EF și BD sunt necoplanare.

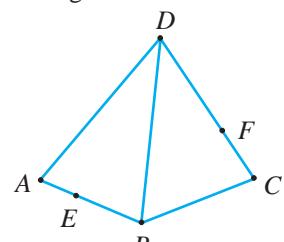


Fig. 8.10

Rezolvare:

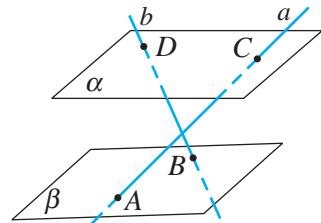
- Dacă am presupune că E și F ar coincide, ar rezulta că dreptele AB și CD sănătă concurențe în punctul E . Aceasta ar însemna că punctele A, B, C, D sănătă coplanare, ceea ce contrazice condiția problemei.
- Fie dreptele EF și AD coplanare. Atunci punctele A, E, F, D sănătă coplanare și cum $B \in (AE)$, $C \in (DF)$, rezultă că punctele A, B, C și D aparțin aceluiași plan, dar aceasta contrazice condiția problemei.

Raționamente asemănătoare se aplică la demonstrarea necoplanarității celorlalte perechi de drepte.

Probleme propuse

A

- Dreapta d intersectează dreptele distințe d_1 și d_2 . Rezultă de aici că dreptele d , d_1 și d_2 aparțin aceluiași plan?
- Dreptele a și b sănătă paralele, iar dreapta c intersectează dreapta b . Să se determine în ce relație sănătă dreptele a și c .
- Dreapta a intersectează planul α . Dreapta b este paralelă cu dreapta a . Va intersecta dreapta b planul α ?
- Prin vîrfurile unui paralelogram sănătă construite patru drepte paralele care nu sănătă situate în planul paralelogramului. Să se arate că punctele de intersecție a oricărui plan cu aceste patru drepte sănătă vîrfurile unui paralelogram.
- În figură, planele α și β sănătă paralele ($AB \nparallel DC$). Să se determine poziția relativă a dreptelor a și b .



B

- Fie două drepte paralele și una dintre ele paralelă cu un plan. Să se demonstreze că și cealaltă dreaptă este paralelă cu acest plan.
- Fie o dreaptă paralelă cu două plane care se intersectează. Să se demonstreze că această dreaptă este paralelă cu dreapta de intersecție a acestor plane.
- Dreptele a și b sănătă paralele, iar dreptele c și b sănătă necoplanare. În ce relație pot fi dreptele c și a ?
- Punctul A nu aparține dreptei d . Prin punctul A se construiesc toate dreptele necoplanare cu dreapta d . Să se determine reuniunea dreptelor construite.
- Dreptele d_1 și d_2 sănătă necoplanare, iar dreapta d este paralelă cu dreapta d_1 . În ce relație sănătă dreptele d și d_2 ?
- Intersecția planelor α și β este dreapta d . Punctul $A \in \alpha$ și $A \notin d$, punctul $B \in \beta$ și $B \notin d$. În ce relație sănătă dreptele d și AB ?

§3 Drepte și plane

Fie o dreaptă și un plan în spațiu. Distingem următoarele cazuri posibile ale pozițiilor relative ale unei drepte și unui plan în spațiu:

- dreapta are un unic punct comun cu planul (vom spune că planul și dreapta **se intersectează** sau dreapta este **secantă** cu planul) (fig. 8.11 a));
- dreapta nu are nici un punct comun cu planul (fig. 8.11 b));
- dreapta este inclusă în plan (fig. 8.11 c)).

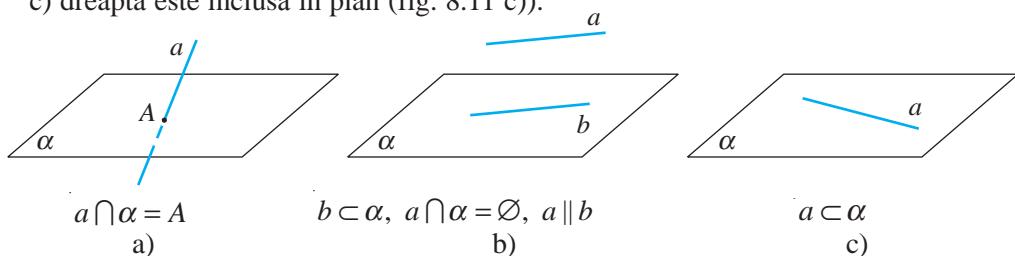


Fig. 8.11

Definiție. O dreaptă se numește **paralelă** cu un plan dacă ea nu are puncte comune cu acest plan sau dacă este inclusă în acest plan.

În figurile 8.11 b), c), dreapta a este paralelă cu planul α .

Teorema 7 (criteriul de paralelism al dreptei și planului). Pentru ca o dreaptă să fie paralelă cu un plan este necesar și suficient ca dreapta să fie paralelă cu o dreaptă din acest plan.

Demonstrație

Necesitatea. Fie dreapta a ($a \not\subset \beta$) paralelă cu planul β . Considerăm în planul β un punct A , apoi construim planul α determinat de acest punct și de dreapta a (fig. 8.12). Planele α și β se intersectează după dreapta b . Constatăm că dreptele a și b sunt paralele, deoarece, în caz contrar, ele, fiind situate în planul α , ar avea un punct comun, care ar aparține și planului β , ceea ce ar contrazice ipoteza că $a \parallel b$.

Suficiența. Fie dreapta a ($a \not\subset \beta$) paralelă cu o dreaptă b inclusă în planul β . În acest caz, dreapta a este paralelă și cu planul β . Într-adevăr, dacă vom presupune că dreapta a ar avea un punct comun, B , cu planul β , atunci acest punct ar trebui să aparțină și liniei de intersecție a planelor β și α (fig. 8.12), adică și dreptei b , dar aceasta ar contrazice ipoteza că $a \parallel b$.

Cazul $a \subset \beta$ este evident. ►

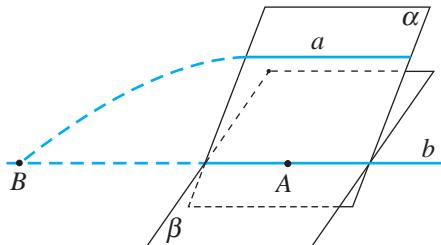


Fig. 8.12

Teorema 8. Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci intersecția acestui plan cu orice alt plan, care nu este paralel cu cel dat și trece prin dreapta dată, este o dreaptă paralelă cu dreapta dată (fig. 8.13).

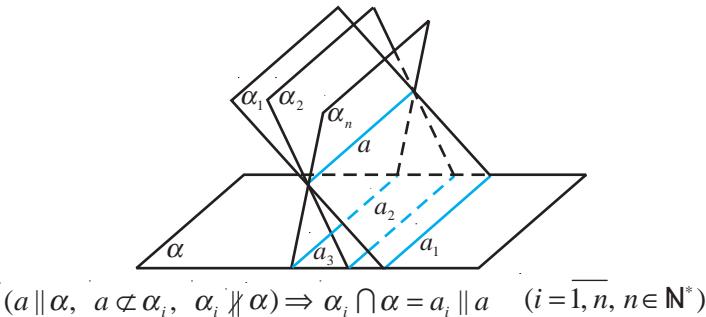


Fig. 8.13

Exercițiu. Demonstrați teorema 8.

Teorema 8' (teorema „acoperișului”). Fie dreptele paralele d_1 și d_2 . Dacă un plan ce conține dreapta d_1 este secant unui plan ce conține dreapta d_2 , atunci dreapta d de intersecție a acestor plane este paralelă cu dreptele d_1 și d_2 (fig. 8.14).

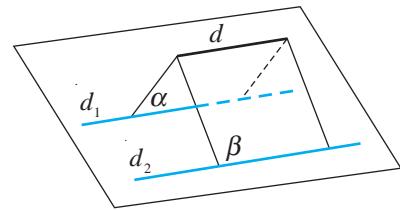


Fig. 8.14

Probleme rezolvate

1. Considerăm punctul E care nu aparține planului paralelogramului $ABCD$ și punctul F – mijlocul segmentului AE . Să se arate că dreapta FC intersectează planul BED în centrul de greutate G al triunghiului BED (fig. 8.15).

Rezolvare:

Fie planul EAC . Punctul F și mijlocul O al diagonalei AC a paralelogramului $ABCD$ aparțin acestui plan. Prin urmare, punctul G de intersecție a medianelor CF și EO ale triunghiului EAC aparține planului EAC . Cum segmentul EO este mediană și a triunghiului BED , rezultă că $(FC) \cap (BED) = G$.

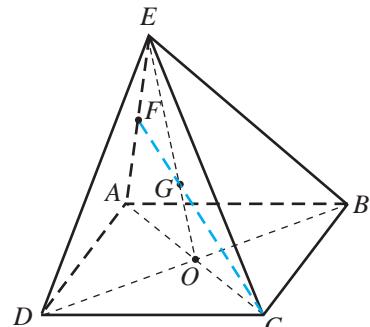


Fig. 8.15

2. Fie punctele necoplanare A, B, C, D . Punctele E, F și G aparțin segmentelor AD, DC și respectiv BC , fără a coincide cu extremitățile lor și, în plus, $\frac{DE}{EA} \neq \frac{DF}{FC}$ (fig. 8.16 a)). Să se reprezinte intersecțiile planului EFG cu planele ADC, DBC, ABC și ABD .

Rezolvare:

Evident, intersecțiile planului EFG cu planele ADC și DBC sunt dreptele EF și respectiv FG (fig. 8.16 b)).

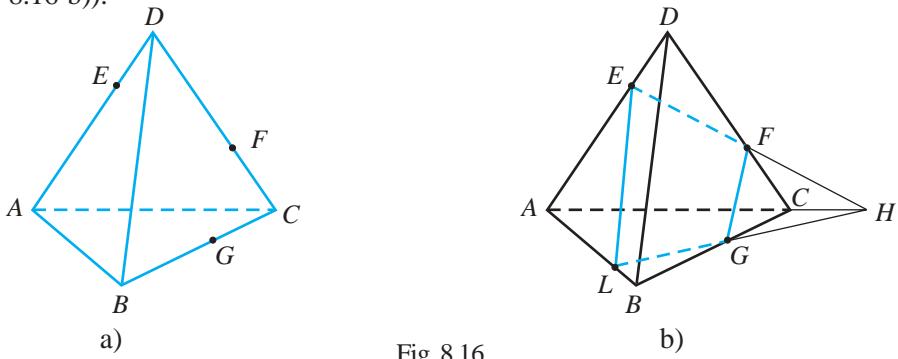


Fig. 8.16

Fie dreptele EF și AC se intersectează în punctul H . Acest punct există, deoarece $\frac{DE}{EA} \neq \frac{DF}{FC}$. Punctul H aparține planului EFG și planului ABC . Prin urmare, dreapta HG este dreapta de intersecție a planelor EFG și ABC . Fie $HG \cap AB = L$. Atunci dreapta EL este dreapta de intersecție a planelor EFG și ADB .

3. Fie d_1 și d_2 drepte concurente situate în planul α , iar d o dreaptă ce intersectează planul α într-un punct D ce nu aparține dreptelor d_1 și d_2 (fig. 8.17). Să se determine mulțimea dreptelor care intersectează dreptele d , d_1 și d_2 .

Rezolvare:

Fie O punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2 . Orice dreaptă care trece prin punctul O și printr-un punct A al dreptei d verifică condițiile problemei. De asemenea, orice dreaptă din planul α care trece prin punctul D și intersectează ambele drepte d_1 și d_2 verifică condițiile problemei. Alte drepte care ar intersecta toate dreptele d , d_1 și d_2 nu există.

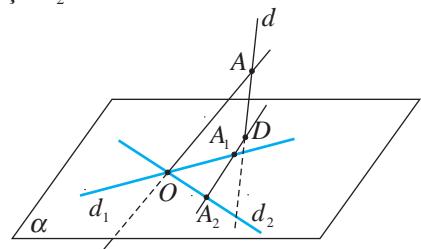


Fig. 8.17

4. Planul α este intersectat de dreptele necoplanare a și b în punctele A și B respectiv. Prin fiecare punct M al dreptei a se duce paralela cu dreapta b și se notează cu M' punctul de intersecție a acestei paralele cu planul α (fig. 8.18). Să se arate că atunci cînd punctul M descrie dreapta a , punctul M' descrie o dreaptă din planul α ce trece prin punctul A .

Rezolvare:

Fie b' dreapta care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta b (care există și este unică). Planul determinat de dreptele a și b' , concurente în A , intersectează planul α după dreapta c . Dreapta c este dreapta căutată.

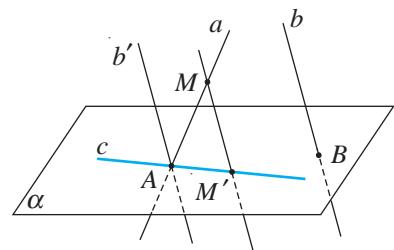


Fig. 8.18

Probleme propuse

A

1. În tetraedrul $ABCD$, punctul M este mijlocul muchiei BD , iar punctul N este mijlocul muchiei AD . Dreapta d este intersecția planului ABC cu planul determinat de dreapta MN și vîrful C . În ce relație sînt dreptele d și MN ?
2. Punctele A, B, C, D sînt necoplanare. Punctul $E \in AD$ ($AE = 2ED$), punctul $L \in AB$ ($AL = 2LB$), punctul $F \in DC$ ($DF = 2FC$), punctul $M \in CB$ ($BM = 2MC$). Determinați relația dintre dreptele EL și FM .
3. Se dau punctele necoliniare A, B, C . Un plan paralel cu dreapta AB intersectează segmentele BC și AC în punctele M și respectiv N . Să se afle lungimea segmentului MN , dacă:
 - a) $AB = 30$ cm și $MB : BC = 2 : 3$;
 - b) $AB = 16$ cm și $BM : MC = 5 : 3$;
 - c) $CM = 20$ cm și $AB : BC = 4 : 5$;
 - d) $BM = a$, $MC = c$, $AB = b$.

B

4. Punctele A, B, C, D sînt necoplanare. Pe segmentele AB, BC, CD și DA se iau punctele A_1, B_1, C_1 și respectiv D_1 , astfel încît $AA_1 : A_1B = 1 : 3$, $BB_1 : B_1C = 3 : 1$, $CC_1 : C_1D = 2 : 1$ și respectiv $DD_1 : D_1A = 1 : 2$. Să se demonstreze că punctele A_1, B_1, C_1, D_1 sînt coplanare.
5. Fie punctele A, B, C și D necoplanare. Pe segmentele AB, BC și CD se iau punctele A_1, B_1 și respectiv C_1 , astfel încît $AA_1 : A_1B = a$, $BB_1 : B_1C = b$ și $CC_1 : C_1D = c$. Planul $A_1B_1C_1$ intersectează segmentul AD în punctul D_1 . Să se afle raportul $DD_1 : D_1A$.
6. Punctele A, B, C, D sînt necoplanare. Punctul $M \in AD$ și punctul $N \in BD$. În ce relație se află dreapta MN și planul ABC , dacă se știe că $AM : MD = BN : ND$?
7. Punctele A, B, C, D sînt necoplanare. Punctul M este centrul de greutate al triunghiului ABD , iar punctul N este centrul de greutate al triunghiului BDC . Să se demonstreze că dreapta MN este paralelă cu planul ABC .

§4 Plane paralele

Fie două plane în spațiu. Distingem următoarele cazuri posibile ale pozițiilor relative a două plane în spațiu:

- a) planele se intersectează după o dreaptă (fig. 8.19 a));
- b) planele nu au nici un punct comun (fig. 8.19 b));
- c) planele coincid (fig. 8.19 c)).

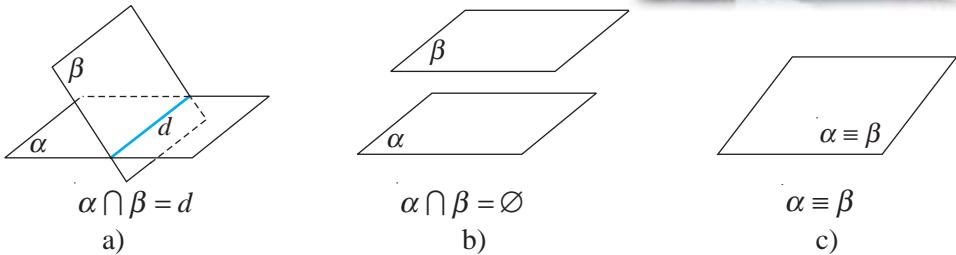


Fig. 8.19

Definiție. Două plane se numesc **paralele** dacă ele nu au puncte comune sau dacă coincid.

Teorema 9 (criteriul de paralelism al planelor). Dacă două drepte concurente situate într-un plan sunt paralele cu un alt plan, atunci planele sunt paralele.

Demonstrație

Fie dreptele concurente a și b , situate în planul α , paralele cu planul β (fig. 8.20).

Presupunem că planele α și β nu sunt paralele. Atunci intersecția lor este dreapta c . Conform teoremei 8, dreptele a și b sunt paralele cu dreapta c , dar aceasta contrazice axioma dreptelor paralele, deoarece obținem că în planul α printr-un punct trec două drepte diferite, a și b , paralele cu dreapta c , ceea ce este imposibil. Prin urmare, planele α și β sunt paralele. ►

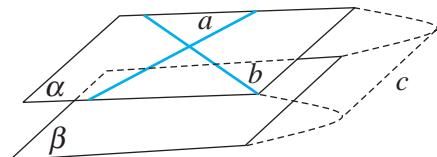
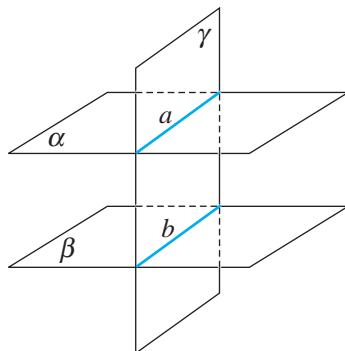


Fig. 8.20

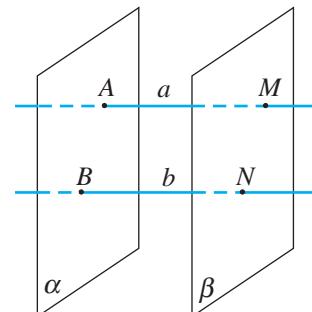
Teorema 10. Dacă două plane paralele sunt intersectate de un al treilea plan, atunci dreptele de intersecție sunt paralele (fig. 8.21 a)).

Teorema 11. Dacă două drepte paralele intersectează două plane paralele, atunci segmentele dreptelor cuprinse între aceste plane sunt congruente (fig. 8.21 b)).



$$(\alpha \parallel \beta, \gamma \cap \alpha = a, \gamma \cap \beta = b) \Rightarrow a \parallel b$$

a)



$$(a \parallel b, \alpha \parallel \beta) \Rightarrow [AM] \equiv [BN], \\ A, B \in \alpha, M, N \in \beta$$

b)

Fig. 8.21

Exercițiu. Demonstrați teoremele 10 și 11.

Probleme rezolvate

1. Segmentul AB nu intersectează planul α și este împărțit de punctele M și N în trei segmente, astfel încât $AM : MN : MN : NB = 1 : 2$. Prin punctele A, M, N și B sunt trasate drepte paralele ce intersectează planul α în punctele A_1, M_1, N_1 și respectiv B_1 (fig. 8.22). Să se afle lungimea segmentelor MM_1 și NN_1 , știind că $AA_1 = 2$ cm, $BB_1 = 16$ cm.

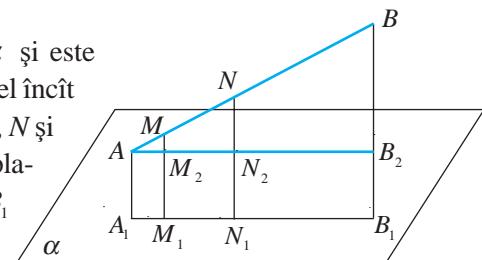


Fig. 8.22

Rezolvare:

Construim prin punctul A o dreaptă paralelă cu A_1B_1 , care intersectează dreptele MM_1 , NN_1 și BB_1 în punctele M_2 , N_2 și respectiv B_2 . Triunghiurile AM_2M și AB_2B sunt asemenea, deci $MM_2 : BB_2 = AM : AB$.

Din $AM : MN = MN : NB = 1 : 2$ rezultă că $AB = 7AM$. Atunci $MM_2 : BB_2 = 1 : 7$, $MM_2 = BB_2 : 7 = 14 : 7 = 2$.

Astfel, $MM_1 = MM_2 + M_2M_1 = 2 + 2 = 4$ (cm).

În mod analog, constatăm că $\Delta ANN_2 \sim \Delta ABB_2$.

Așadar, $NN_2 : BB_2 = AN : AB = 3AM : 7AM = 3 : 7$, de unde $NN_2 = \frac{3}{7}BB_2 = 6$ cm.

Prin urmare, $NN_1 = NN_2 + N_2N = 6 + 2 = 8$ (cm).

Răspuns: $MM_1 = 4$ cm, $NN_1 = 8$ cm.

2. Punctele A_1, A_2, A_3 sunt situate pe muchia piramidei $VABC$, astfel încât $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$. Prin aceste puncte sunt trase plane paralele cu baza piramidei, care intersectează muchiile VB și VC în punctele B_1, B_2, B_3 și respectiv C_1, C_2, C_3 (fig. 8.23). Să se afle perimetrele triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$, dacă perimetrele triunghiurilor ABC și $A_3B_3C_3$ sunt \mathcal{P} și respectiv \mathcal{P}_3 .

Rezolvare:

Segmentul A_2B_2 este linie mijlocie a trapezului $A_1A_3B_3B_1$, adică $\mathcal{P}_2 = \frac{\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_3}{2}$ (1), unde \mathcal{P}_1 și \mathcal{P}_3 sunt perimetrele triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și respectiv $A_3B_3C_3$.

În mod similar, $\mathcal{P}_1 = \frac{\mathcal{P} + \mathcal{P}_2}{2}$ (2). Din (1) și (2) obținem:

$$\mathcal{P}_2 = \frac{2\mathcal{P}_3 + \mathcal{P}}{3}, \quad \mathcal{P}_1 = \frac{2\mathcal{P} + \mathcal{P}_3}{3}.$$

Răspuns: $\mathcal{P}_1 = \frac{2\mathcal{P} + \mathcal{P}_3}{3}$, $\mathcal{P}_2 = \frac{2\mathcal{P}_3 + \mathcal{P}}{3}$.

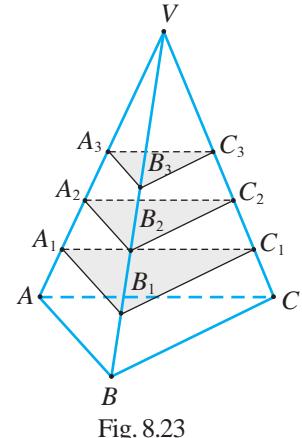


Fig. 8.23

3. Tetraedrul regulat $ABCD$ este secționat de un plan paralel cu planul feței BCD și care trece prin punctul $E \in AC$, astfel încât $AE : EC = 2 : 3$ (fig. 8.24). Să se afle aria secțiunii, dacă lungimea muchiei tetraedrului este a .

Rezolvare:

Este evident că laturile triunghiului FGE sunt paralele cu laturile feței BDC și că triunghiul FGE este echilateral.

Cum $\Delta AEF \sim \Delta ACB$, obținem:

$$\frac{BC}{FE} = \frac{AC}{AE} = \frac{AE + EC}{AE} = 1 + \frac{EC}{AE}, \quad \frac{BC}{FE} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\text{de unde } FE = \frac{2a}{5}.$$

$$\text{Astfel, } \mathcal{A}_{FGE} = \frac{(EF)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{4a^2 \cdot \sqrt{3}}{25 \cdot 4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{25}.$$

$$\text{Răspuns: } \mathcal{A}_{FGE} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{25}.$$

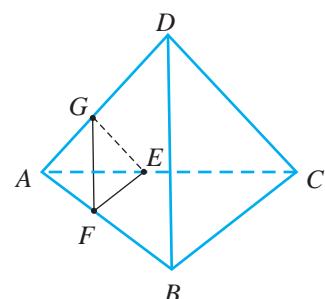


Fig. 8.24

4. Să se construiască secțiunea prismei drepte $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu planul determinat de diagonală BD_1 și de un punct $M \in (CC_1)$.

Rezolvare:

Evident că două laturi ale poligonului obținut în secțiune sunt segmentele BM și MD_1 (fig. 8.25).

Punctul $N = CD \cap D_1M$ este comun planului ABC și planului secțiunii căutate. Prin urmare, punctul $P = BN \cap AD$ este comun planului ADD_1 și planului acestei secțiuni.

Punctul $L = AA_1 \cap PD_1$ este cel de-al patrulea vîrf al poligonului obținut în secțiune.

Răspuns: Secțiunea este patrulaterul BLD_1M .

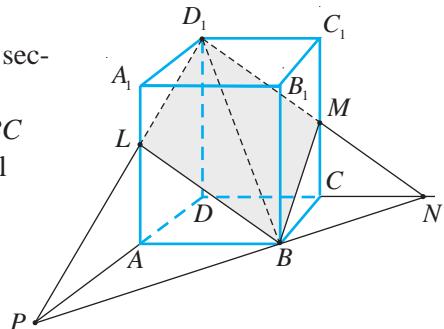


Fig. 8.25

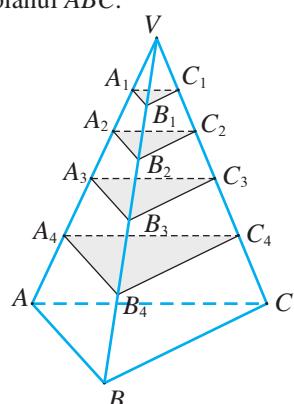
Probleme propuse

A

1. Punctele A, B, C, D sunt necoplanare. Punctele M, N, P sunt mijloacele segmentelor AD, BD și respectiv CD . Să se arate că planele MNP și ABC sunt paralele.
2. Pe muchiile tetraedrului $ABCD$ sunt luate punctele $L \in AD, P \in AD$ ($AL = LP = PD$), $M \in BD$ ($DM = 2BM$), $N \in CD$ ($ND = 2NC$).
 - a) Să se arate că planul MNL este paralel cu planul ABC .
 - b) Să se construiască punctul I_1 de intersecție a dreptei PM cu planul ABC .
 - c) Să se construiască punctul I_2 de intersecție a dreptei PN cu planul ABC .
 - d) Să se construiască intersecția planelor ABC și PMN .
3. Punctele A_1, A_2, A_3, A_4 sunt situate pe muchia AV a piramidei triunghiulare $VABC$, astfel încât $[AA_4] \equiv [A_4A_3] \equiv [A_3A_2] \equiv [A_2A_1]$. Prin aceste puncte sunt construite plane paralele cu planul bazei piramidei, care intersectează muchiile VB și VC în punctele B_1, B_2, B_3, B_4 și respectiv C_1, C_2, C_3, C_4 . Să se determine perimetrele triunghiurilor obținute în secțiuni, dacă perimetru triunghiului $A_1B_1C_1$ este de 5 cm, iar perimetru triunghiului ABC este de 40 cm.

B

- 4*. Prisma triunghiulară dreaptă $ABC A_1 B_1 C_1$ este secționată de un plan ce trece prin punctul $M \in [AA_1]$ și care este paralel cu dreptele AB_1 și AC_1 . Să se determine perimetru poligonului obținut în secțiune, dacă $AM = 1$ cm, $AA_1 = 3$ cm, $AB = AC = 4$ cm, $BC = 2$ cm.
5. Tetraedrul $ABCD$ este secționat de un plan ce trece prin punctul $M \in [AD]$ și care este paralel cu planul bazei ABC . Să se afle perimetru poligonului obținut în secțiune, dacă $AM = 5$ cm, $AD = 15$ cm, $AB = 20$ cm, $BC = 19$ cm, $AC = 18$ cm.



6. Pe muchia VA a piramidei triunghiulare $VABC$ se iau punctele A_1, A_2, A_3 , astfel încât $A_1A_2 = 2AA_1$ și $A_2A_3 = 2A_1A_2$. Prin aceste puncte sunt trasate plane paralele cu planul bazei piramidei, care intersectează muchia VB în punctele B_1, B_2, B_3 , iar muchia VC – în punctele C_1, C_2, C_3 . Să se afle perimetrele $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ și \mathcal{P}_3 ale triunghiurilor $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ și respectiv $A_3B_3C_3$, dacă se știe că perimetrul triunghiului ABC este \mathcal{P} , iar $AA_1 : VA_3 = \lambda$.
7. Fie $ABCD$ un patrilater convex și E un punct ce nu aparține planului suport al patrilaterului $ABCD$. Pe segmentele AE, BE, CE, DE se iau punctele M, N, P și respectiv R , astfel încât $2AM = 3ME, 2BN = 3NE, 2CP = 3PE, 3DR = 2RE$.
- Să se demonstreze că planul MNP este paralel cu planul suport al patrilaterului $ABCD$.
 - Să se construiască punctul I de intersecție a dreptei NR cu planul suport al patrilaterului $ABCD$.
8. Fie $ABCD$ un patrilater convex și E un punct ce nu aparține planului suport al patrilaterului $ABCD$. Punctele M, N, P sunt punctele de intersecție a medianelor triunghiurilor ABE, BCE și respectiv CDE . Să se demonstreze că planul MNP trece prin punctul Q de intersecție a medianelor triunghiului ADE .

Probleme recapitulative

A

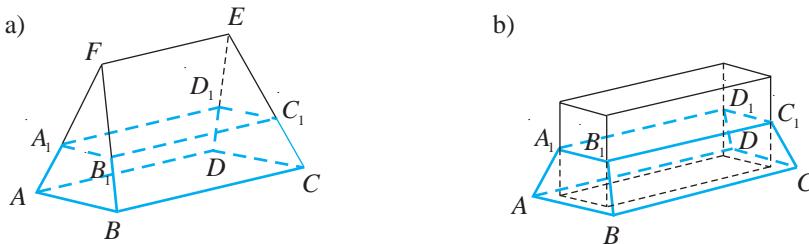
- Segmentul AB nu intersectează planul α . Prin extremitățile segmentului AB și prin mijlocul lui, punctul M , sunt trasate drepte paralele, care intersectează planul α în punctele A_1, B_1 și respectiv M_1 . Să se afle lungimea segmentului MM_1 , dacă:
a) $AA_1 = 3,2$ m, $BB_1 = 2,3$ dm; b) $AA_1 = 19$ cm, $BB_1 = 2$ dm; c) $AA_1 = 33$ cm, $BB_1 = 75$ cm.
- Segmentul AB nu intersectează planul α și este împărțit de punctele M și N în trei segmente congruente: AM, MN, NB . Prin extremitățile segmentului AB și prin punctele M și N sunt trasate drepte paralele ce intersectează planul α în punctele A_1, B_1, M_1 și respectiv N_1 . Să se afle lungimile segmentelor MM_1 și NN_1 , dacă se știe că $AA_1 = 16$ cm, $BB_1 = 4$ cm.
- Fie planele paralele α, β și un punct M . Planul β și punctul M sunt situate în semispații diferențiate de planul α . Prin punctul M sunt trasate două drepte care intersectează planul α în punctele A_1 și A_2 , iar planul β – în punctele B_1 și B_2 . Să se calculeze lungimea segmentului A_1A_2 , dacă $B_1B_2 = 20$ cm și $MA_1 : A_1B_1 = 3 : 2$.
- Punctele A, B, C, D sunt necoplanare. Punctul $L \in DC$, astfel încât $DL = 2LC$, iar punctul M este centrul de greutate al $\triangle ABD$. Să se arate că dreapta ML este paralelă cu planul ABC .

B

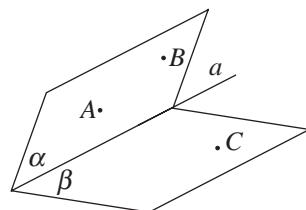
- Printr-un punct O , ce nu aparține nici una dintre planele paralele a și b , sunt construite dreptele a_1, a_2, a_3 și a_4 , care intersectează planul a în punctele A_1, A_2, A_3 și respectiv A_4 , iar planul b – în punctele B_1, B_2, B_3 și respectiv B_4 .

Să se demonstreze că $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_3}{OB_3} = \frac{OA_4}{OB_4}$.

6. Să se demonstreze că dacă orice dreaptă ce intersectează unul dintre cele două plane date intersectează și al doilea plan, atunci planele sunt paralele.
7. O dreaptă intersectează planul α în punctul A . Prin punctele B și C (B se află între A și C) ale dreptei, situate în același semispațiu limitat de planul α , sunt trasate două drepte paralele care intersectează planul α în punctele B_1 și respectiv C_1 . Să se afle lungimea segmentului BB_1 , dacă:
 - a) $CC_1 = a$ și $AC : BC = \lambda$;
 - b) $CC_1 = a$ și $AB : AC = \mu$;
 - c) $AB = l$ și $AC : CC_1 = k$;
 - d) $AC = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.
8. Punctele A, B, C, D sunt necoplanare și $AC = 12$ cm, $BD = 20$ cm. Să se determine perimetrul patrilaterului ale căruia vîrfuri sunt mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA .
9. Punctul E nu aparține planului trapezului $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Punctele M și L sunt mijloacele laturilor AB și CD ale trapezului, iar punctele N și P – mijloacele segmentelor BE și CE . Să se arate că dreptele MN și PL sunt concurente.
10. Fie punctele A, B, C, D necoplanare. Pe segmentele AC și BC se iau punctele M și respectiv N , astfel încât $AM : MC = BN : NC = m : n$. Să se afle lungimea segmentului determinat de mijloacele segmentelor AD și BD , dacă $MN = a$.
11. La reconstrucția acoperișului unei case s-a luat decizia de a ridica o mansardă. Căpriorii AF , BF , CE și DE urmează să fie tăiați în punctele A_1, B_1, C_1 și respectiv D_1 , astfel încât planul dreptunghiului $A_1B_1C_1D_1$ să fie paralel cu planul podului (fig. a)). Capetele căpriorilor se vor sprijini pe colțurile pereților mansardei (fig. b)). La ce distanță de la colțurile podului casei trebuie tăiați căpriorii, astfel încât lățimea mansardei în exterior să fie de 9 m, dacă se știe că lățimea podului casei este de 12 m, iar lungimea căpriorilor – de 8 m?



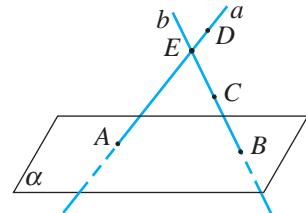
12. Tetraedrul regulat $ABCD$ este secționat de un plan ce trece prin vîrful A și prin mijloacele muchiilor BD și CD . Să se afle aria secțiunii obținute, dacă lungimea muchiei tetraedrului este $2a$.
13. Fie trei drepte necoplanare care se intersectează două câte două. Să se demonstreze că dreptele au un punct comun.
14. Se dau planele α și β , a căror intersecție este dreapta a . Punctele A și B aparțin planului α , iar punctul C aparține planului β . Să se construiască liniile de intersecție a planului ABC cu planele α și β .
15. Se dau punctele necoplanare A, B, C și D . Punctul M aparține segmentului DC . Să se construiască liniile de intersecție a planelor ADC, CBD, ABC și ABD cu planul care trece prin punctele M și A și este paralel cu dreapta BD .



16. Fie punctele necoplanare A, B, C și D și punctul E ce aparține segmentului AC , astfel încât $AE : EC = 3 : 2$. Să se construiască liniile de intersecție a planelor ADC, ADB, ABC cu planul ce trece prin punctul E și este paralel cu planul BCD .

17. Punctul E nu aparține planului paralelogramului $ABCD$. Să se demonstreze că linia de intersecție a planelor ABE și CDE este o dreaptă paralelă cu dreapta DC .

18. Prin punctul E ce nu aparține planului α sunt duse dreptele a și b , care intersectează planul α în punctele A și respectiv B . Punctul D aparține dreptei a , iar punctul C – dreptei b . Să se construiască punctul de intersecție a dreptei DC cu planul α .

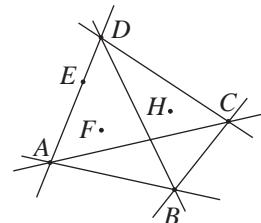


19. Fie punctele necoplanare A, B, C și D . Punctul M este mijlocul segmentului AD , iar punctul G este intersecția medianelor triunghiului ABC .

- a) Să se construiască punctul F de intersecție a dreptei MG cu planul BCD .
b) Să se demonstreze că punctele B, D, C, F sunt vîrfurile unui paralelogram.

20. Se dau punctele necoplanare A, B, C și D . Punctele E, F și H sunt situate pe dreptele AD, DC și respectiv BC , astfel încât $EF \parallel AC$ și $FH \parallel DB$. Să se construiască punctele de intersecție a planului EFH cu dreptele AB și DB .

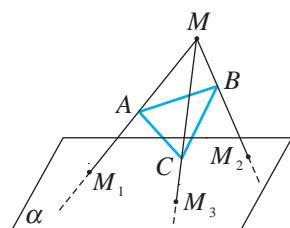
21. Fie punctele necoplanare A, B, C și D . Se știe că $E \in (AD)$, $F \in (ABD)$ și $H \in (BCD)$. Să se construiască:
a) liniile de intersecție a planului EFH cu planele ABC, ACD, ABD și BCD ;
b) punctele de intersecție a planului ABC cu dreptele EF, EH și FH ;
c) intersecția dreptei FH cu planul ADC .



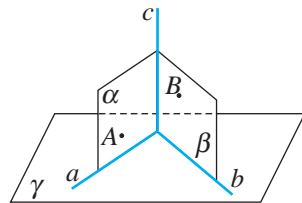
22. Se dau punctele necoplanare A, B, C și D . Să se demonstreze că dreapta a care trece prin mijloacele segmentelor AB și DC , dreapta b ce trece prin mijloacele segmentelor AD și BC și dreapta c care trece prin mijloacele segmentelor AC și DB au un punct comun.

23. Punctul E nu aparține planului paralelogramului $ABCD$. Punctul M aparține segmentului EC , iar punctul N aparține segmentului ED și se știe că $EM : MC = EN : ND$.
a) Să se construiască intersecția planelor ACE și BDE .
b) Să se demonstreze că $MN \parallel AB$.
c) Să se construiască punctul P de intersecție a planului LMN cu dreapta AD , unde L este un punct al segmentului BC .
d) Să se precizeze natura patrulaterului $NMLP$.

24. Fie planele distincte ABC și α și un punct arbitrar M ($M \notin (ABC)$ și $M \notin \alpha$), astfel încât nici una dintre dreptele AB, AC și BC nu este paralelă cu planul α . Punctele M_1, M_2 și M_3 sunt intersecțiile dreptelor MA, MB și respectiv MC cu planul α . Să se demonstreze:
a) că există în planul α punctele fixe F_1, F_2 și F_3 prin care trec dreptele M_3M_2, M_1M_3 și M_2M_1 , oricare ar fi poziția punctului M ;
b) că punctele F_1, F_2 și F_3 sunt coliniare.



25. Planele α și β , a căror intersecție este dreapta c , intersectează planul γ după dreptele a și b . Punctul A aparține planului α , iar punctul B aparține planului β , astfel încât $AB \nparallel \gamma$. Să se construiască punctul de intersecție a dreptei AB cu planul γ .



26. Fie patrulaterul convex $ABCD$ situat în planul α . Presupunem că patrulaterul $ABCD$ are laturile opuse neparalele. Punctul E nu aparține planului α . Să se traseze intersecțiile planelor:

a) EAB și EDC ; b) EAD și EBC ; c) EAC și EBD .

27. Punctele A , B , C și D sunt necoplanare. Cîte plane pot fi duse la aceeași distanță de aceste puncte?

Probă de evaluare

A

*Timp efectiv de lucru:
45 de minute*

- Prin două puncte distincte A și B , ce aparțin unuia dintre cele două plane paralele, să se construiască două drepte paralele care intersectează celălalt plan în punctele A_1 și respectiv B_1 . Determinați lungimea segmentului A_1B_1 , dacă $AB = 8$ cm. (2)
- Construiți cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ și indicați:
 - drepte paralele cu planul BCD ;
 - plane paralele cu dreapta A_1B_1 .(2)
- Punctul M este mijlocul muchiei AD a tetraedrului regulat $ABCD$ cu muchiile de lungime a . Aflați perimetrul triunghiului MNC , unde N este punctul de intersecție a dreptei BD cu planul ce trece prin dreapta MC , paralel cu dreapta AB . (3)
- Paralelogramele $ABCD$ și ABB_1A_1 sunt situate în plane diferite. Determinați lungimea segmentului B_1C , dacă $A_1D = 8$ cm. (3)

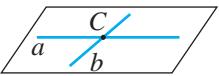
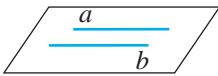
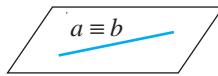
B

*Timp efectiv de lucru:
45 de minute*

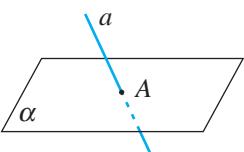
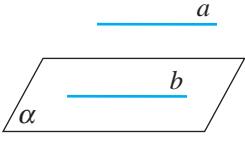
- Dreapta a este paralelă cu planul α , iar dreapta b intersectează acest plan. Stabiliti poziția relativă a dreptelor a și b . (1)
- Fie punctele necoplanare A, B, C, D . Determinați poziția față de planul ABC a dreptei:
 - EF , unde E este mijlocul segmentului AD , F – mijlocul segmentului BD ;
 - GH , unde G aparține segmentului BD , H aparține segmentului CD și $\frac{BG}{GD} = \frac{CH}{HD} = \frac{1}{3}$.(3)
- Fie piramida $SABCD$ și punctul $E \in (SD)$. Secționați această piramidă cu planul ce trece prin punctul E și care este paralel cu planul bazei $ABCD$. (3)
- Construiți secțiunea tetraedrului regulat $ABCD$, formată de planul care trece prin punctul $E \in (AD)$, astfel încât $AE : ED = 1 : 2$, și care este paralel cu planul bazei ABC . Aflați aria secțiunii obținute, dacă se știe că aria unei fețe a tetraedrului este \mathcal{A} . (3)

Pozițiile relative ale dreptelor și planelor

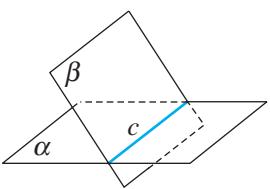
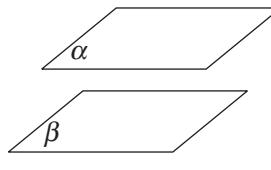
1. Pozițiile relative a două drepte

a și b coplanare		a și b necoplanare
		
$a \cap b = C$	$a \cap b = \emptyset$	$a \equiv b$

2. Pozițiile relative ale unei drepte și unui plan

a secantă cu α	a paralelă cu α
 $a \cap \alpha = A$	 $b \subset \alpha, a \parallel b, a \cap \alpha = \emptyset$

3. Pozițiile relative a două plane

α și β secante	α și β paralele
 $\alpha \cap \beta = c$	 $\alpha \cap \beta = \emptyset$

Obiective

- ⇒ recunoașterea în diverse contexte, descrierea, construirea dreptelor perpendiculare, a dreptei perpendiculare pe plan;
- ⇒ calcularea lungimilor segmentelor, măsurilor unghiurilor diedre, aplicând teorema celor trei perpendiculare;
- ⇒ utilizarea în situații reale și/sau modelate a criteriilor de perpendicularitate a două drepte, a dreptei și planului, a două plane;
- ⇒ recunoașterea, descrierea și construirea proiecțiilor ortogonale ale punctelor, segmentelor, dreptelor pe plan;
- ⇒ calcularea lungimilor proiecțiilor ortogonale ale segmentelor în contexte diverse.

§ 1 Drepte și plane perpendiculare

Lemă. Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare (fig. 9.1 a)).

Demonstrație

Fie unghiurile proprii AMB și $A_1M_1B_1$ cu $[MA] \parallel [M_1A_1]$, $[MB] \parallel [M_1B_1]$, $MA = M_1A_1$ și $MB = M_1B_1$. Considerăm cazul cînd punctul A_1 aparține semiplanului determinat de dreapta MM_1 și punctul A , iar punctul B_1 aparține semiplanului determinat de dreapta MM_1 și punctul B (fig. 9.1 c)). În aceste condiții, MAA_1M_1 și MBB_1M_1 sunt paralelograme, deci $MM_1 = AA_1 = BB_1$. Prin urmare, ABB_1A_1 de asemenea este paralelogram și $AB = A_1B_1$. Concluzia lemei rezultă din faptul că $\DeltaAMB \equiv \DeltaA_1M_1B_1$. ►

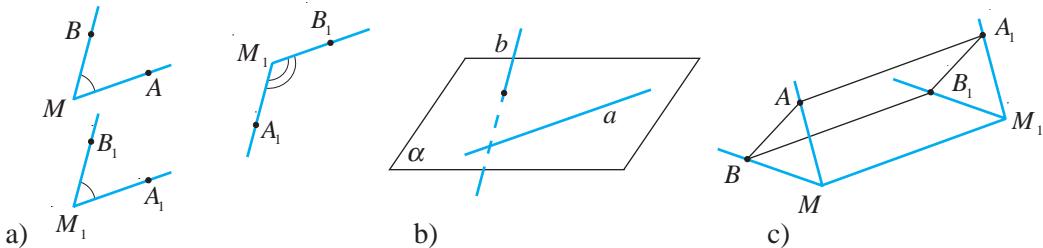


Fig. 9.1

Rezultatul obținut ne permite să vorbim despre unghiul format de două drepte necoplanare. Anume prin **unghiul format de două drepte** necoplanare a și b se înțelege un astfel de unghi BMA , încât M este un punct oarecare al spațiului, $MB \parallel b$, $MA \parallel a$ și $m(\angle BMA) \in [0^\circ, 180^\circ]$ (fig. 9.1 a), b)).

Definiție. Două drepte în spațiu se numesc **perpendiculare** dacă măsura unghiului format de ele este de 90° (fig. 9.2).

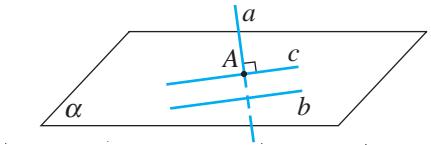


Fig. 9.2

Dreptele perpendiculare a, b se notează: $a \perp b$.

Ușor se deduce că în cubul din figura 9.3,
 $AA_1 \perp BC$, $AD_1 \perp CB_1$.

În modulul 8 am constatat că o dreaptă și un plan în spațiu pot fi sau paralele, sau secante.

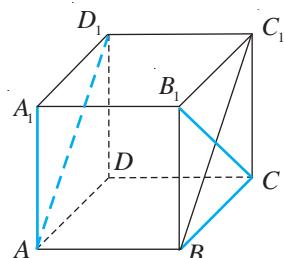


Fig. 9.3

Definiții. • Dreapta perpendiculară pe orice dreaptă dintr-un plan se numește **perpendiculară pe acest plan**. În acest caz, se mai spune că **planul este perpendicular pe dreaptă**.

• Dreapta care nu este perpendiculară pe plan și nu este paralelă cu el se numește **oblică** pe acest plan (fig. 9.4).

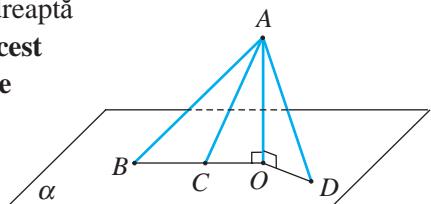


Fig. 9.4

În figura 9.4, dreapta AO este perpendiculară pe planul α , iar dreptele AB, AC, AD sunt oblice pe acest plan.

Teorema 1. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente situate într-un plan, atunci dreapta este perpendiculară pe acest plan.

Demonstrație

Fie dreptele a și b din planul α concurente în punctul O și o dreaptă c perpendiculară pe dreptele a și b (fig. 9.5).

În virtutea definiției unghiului format de două drepte în spațiu, se poate admite că dreptele c

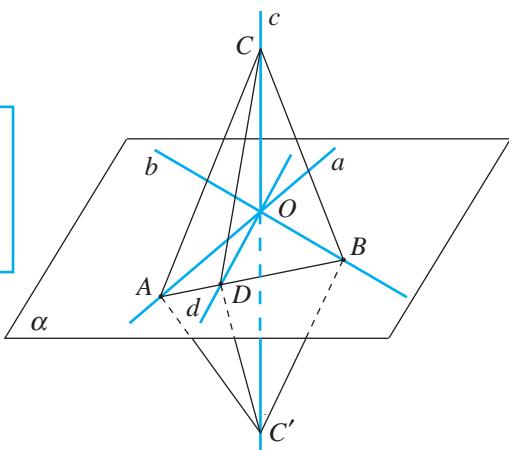


Fig. 9.5

și d conțin de asemenea punctul O . Luăm pe dreptele a și b două puncte arbitrară, A și respectiv B , diferite de O . Dreapta d intersectează $[AB]$ în punctul D . Pe dreapta c luăm punctele C și C' , astfel încât $[OC'] \equiv [CO]$ (fig. 9.5).

Cum $\Delta COA \equiv \Delta C'OA$ și $\Delta COB \equiv \Delta C'OB$ (ca triunghiuri dreptunghice cu catetele respective congruente), deducem că $[AC] \equiv [AC']$ și $[BC] \equiv [BC']$. Rezultă că $\Delta ACB \equiv \Delta AC'B$ și $\angle CAB \equiv \angle C'AB$. APLICÎND criteriul LUL, constatăm că $\Delta CAD \equiv \Delta C'AD$, deci triunghiul CDC' este isoscel. Segmentul DO este mediana corespunzătoare bazei triunghiului CDC' . Prin urmare, $[DO]$ este și înălțime, adică $c \perp d$. ►

Existența și unicitatea planului perpendicular pe o dreaptă dată, ce trece printr-un punct al acestei drepte, rezultă din

Teorema 2. Prin orice punct al unei drepte trece un unic plan perpendicular pe această dreaptă.

Exercițiu. Demonstrați teorema 2.

Problemă rezolvată

↳ Să se demonstreze că printr-un punct arbitrar A , ce nu aparține dreptei date a , trece un unic plan perpendicular pe dreapta a .

Rezolvare:

În planul $\alpha = (A, a)$ construim $AA' \perp a$ (fig. 9.6). Conform axiomei S_1 (modulul 8), există un punct B ce nu se află în planul α , care cu dreapta a determină planul β . În planul β din punctul A' construim perpendiculara $A'C$ pe dreapta a . Planul determinat de punctele A, A', C este planul care verifică condiția problemei.

Unicitatea planului α rezultă din teorema 2.

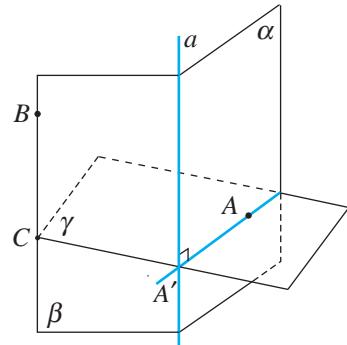


Fig. 9.6

Teorema 3. Pentru orice plan și orice punct există o unică dreaptă care trece prin punctul dat și este perpendiculară pe planul dat.

Demonstrație

Fie α un plan și A un punct arbitrar.

Demonstrăm *existența* dreptei. În planul α luăm două drepte concurente arbitrare, b și c . Construim planele β și γ , ce trec prin punctul A și sunt perpendiculare pe dreptele b și respectiv c (fig. 9.7).

Planele β și γ , având un punct comun A , se intersectează după dreapta a . Deoarece $b \perp \beta$ și $c \perp \gamma$, rezultă că $a \perp b$ și $a \perp c$. În virtutea teoremei 1, deducem că dreapta a este perpendiculară pe planul α .

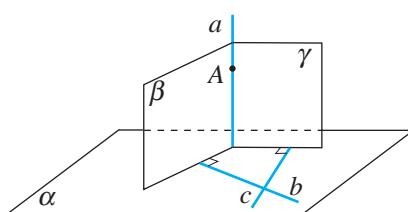


Fig. 9.7

Să demonstrăm *unicitatea* dreptei a . Presupunem că prin punctul A trece încă o dreaptă a' perpendiculară pe planul α (fig. 9.8). Atunci în planul δ , determinat de dreptele a și a' , din punctul A sînt construite două perpendiculare pe dreapta $d = \delta \cap \alpha$, ceea ce este imposibil. Contrazicerea obținută demonstrează că dreptele a și a' coincid. ►

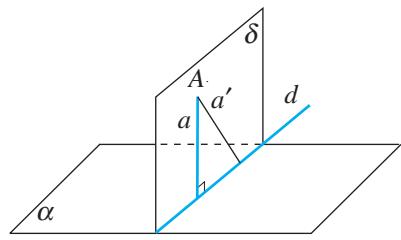


Fig. 9.8

Prezentăm unele *proprietăți ale perpendicularității dreptelor și planelor*.

Teorema 4. Dacă un plan este perpendicular pe una dintre două drepte paralele, atunci el este perpendicular și pe cealaltă dreaptă (fig. 9.9 a)).

Teorema 5. Dacă două drepte sînt perpendiculare pe același plan, atunci ele sînt paralele (fig. 9.9 b)).

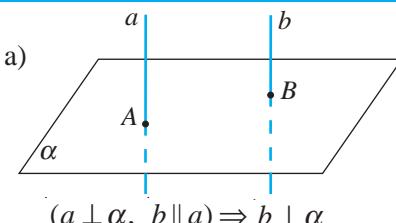
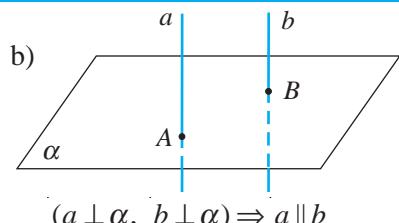


Fig. 9.9



Exercițiu. Demonstrați teoremele 4 și 5.

Probleme propuse

A

1. Dreptunghiurile $CDAB$ și $CDEF$ au o latură comună și planele suport distințe. Să se arate că $CD \perp BF$.
2. Triunghiurile CAD și BAD cu $m(\angle A) = 90^\circ$ au o catetă comună și planele suport distințe. Să se arate că AD este perpendiculară pe dreapta MN , unde M este mijlocul segmentului CD , iar N este mijlocul segmentului BD .
3. Dreapta suport a segmentului AB cu lungimea de 5 cm este perpendiculară pe planul α și îl intersectează în punctul C . În planul α se ia un punct D , astfel încât $AD = 3$ cm, $BD = 4$ cm. Să se determine lungimea segmentului CD .
4. Din vîrful A al pătratului $ABCD$ este construită perpendiculara AM pe planul pătratului. Să se determine MB , MD și MC , știind că $AB = 4$ cm, $MA = 3$ cm.
5. Din vîrful A al triunghiului ACB dreptunghic în C este construită perpendiculara AE pe planul triunghiului. Să se afle ipotenuza AB , dacă $AE = CB = a$, $EC = b$.
6. Distanțele de la punctele A și B , situate în același semispațiu mărginit de planul α , pînă la acest plan sunt egale cu a și respectiv b . Să se afle lungimea segmentului AB , dacă $A_1B_1 = c$, unde A_1 și B_1 sunt punctele de intersecție a perpendicularelor din A și respectiv B pe planul α .

7. Din vîrful A al dreptunghiului $ABCD$, pe planul dreptunghiului, este construită perpendiculara AE , astfel încât $AE = 4$ cm. Să se determine DE , CE , BE și distanța d de la punctul E la dreapta BD , dacă $AB = 6$ cm și $AD = 4$ cm.
8. Punctul D este situat la distanța de 9 cm de la vîrfurile triunghiului ABC dreptunghic în C , $AC = 8$ cm, $BC = 6$ cm. Să se determine distanța de la punctul D la planul triunghiului ABC .

B

9. Distanțele de la punctele A și B , situate în diferite semispații mărginite de planul α , pînă la acest plan sunt egale cu a și respectiv b . Să se afle lungimea segmentului AB , dacă $A_1B_1 = c$, unde A_1 și B_1 sunt punctele de intersecție a perpendicularelor ce trec prin punctele A și respectiv B pe planul α .
10. Din vîrful A al paralelogramului $ABCD$ pe planul lui este construită perpendiculara AE de lungimea c . Să se determine BE , CE , DE , dacă $AB = a$, $AD = b$ și $m(\angle BAD) = \alpha$.
11. Punctul D este egal depărtat de vîrfurile triunghiului isoscel ABC ($AB = AC$). Să se afle distanța de la punctul D la planul triunghiului ABC , dacă $BC = a$, $AD = b$, $m(\angle CAB) = \alpha$.
12. Punctul M este egal depărtat de vîrfurile poligonului $ABCDE$. Să se arate că dreptele MA , MB , MC , MD și ME formează unghiuri congruente cu planul poligonului.
13. Dreptele d_1 și d_2 sunt concurente în punctul A . Prin punctul A se construiesc planele α și β , astfel încît $d_1 \perp \alpha$, $d_2 \perp \beta$. Să se arate că linia de intersecție a planelelor α și β este perpendiculară pe planul definit de dreptele d_1 și d_2 .
14. Punctul E , ce nu aparține planului dreptunghiului $ABCD$, este egal depărtat de vîrfurile dreptunghiului. Să se arate că dreapta ce trece prin punctul O de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$ și punctul E este perpendiculară pe planul suport al dreptunghiului $ABCD$.

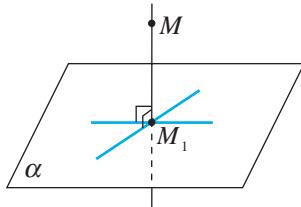
§ 2 Proiecții ortogonale.

Unghi format de o dreaptă și un plan

Definiție. Proiecție ortogonală a unui punct M pe un plan α se numește piciorul perpendicularării (punctul M_1) construit din M pe acest plan (fig. 9.10 a)).

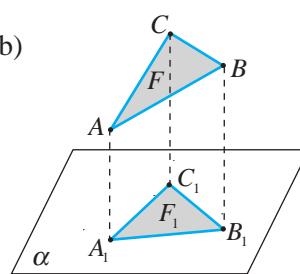
Se notează: $pr_{\alpha} M = M_1$.

a)



$$(MM_1 \perp \alpha, M_1 \in \alpha) \Rightarrow M_1 = pr_{\alpha} M$$

b)



$$F_1 = pr_{\alpha} F$$

Fig. 9.10

Proiecția ortogonală a unei figuri geometrice F pe un plan este mulțimea F_1 formată din proiecțiile ortogonale ale tuturor punctelor figurii geometrice date pe acest plan (fig. 9.10 b)).

Fie o dreaptă a și un punct M . Știm că există un unic plan α care trece prin punctul M și este perpendicular pe dreapta a . Fie M_1 punctul de intersecție a dreptei a cu planul α (fig. 9.11 a)).



Fig. 9.11

Definiție. Punctul M_1 se numește **proiecție ortogonală** a punctului M pe dreapta a , iar lungimea segmentului MM_1 se numește **distanță** de la punctul M la dreapta a (fig. 9.11 b)).

Observație. În cele ce urmează, prin proiecție se va înțelege proiecția ortogonală.

Teorema 6. Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct.

Demonstrație

Dacă dreapta a este perpendiculară pe planul α , atunci proiecția ei este punctul de intersecție a acestei drepte cu planul α .

Considerăm că dreapta a nu este perpendiculară pe planul α (fig. 9.12).

Fie A și B puncte distincte pe dreapta a . Notăm cu A_1 și B_1 proiecțiile lor pe planul α .

În baza teoremei 5, dreptele AA_1 și BB_1 sunt paralele, deci ele determină un plan β .

Planului β îi aparține și dreapta a , și dreapta $a_1 = A_1B_1$. Dacă luăm un punct arbitrar $C \in a$, constatăm că punctul $C_1 = pr_\alpha C$ aparține planului β ($CC_1 \parallel AA_1$ și $C \in a \subset \beta$), deci C_1 aparține dreptei de intersecție a planelor α și β , care este dreapta A_1B_1 .

Astfel, am demonstrat că proiecția oricărui punct al dreptei a este un punct al dreptei a_1 , adică $pr_\alpha a = a_1$. ►

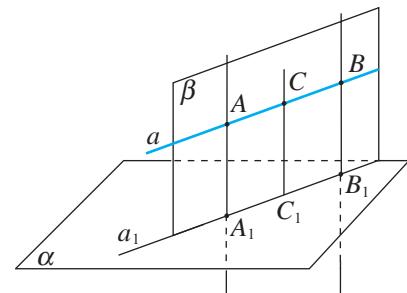


Fig. 9.12

Teorema 7 (teorema celor trei perpendiculare). Dacă proiecția a_1 pe planul α a unei drepte oblice a este perpendiculară pe o dreaptă b din planul α , atunci și dreapta a este perpendiculară pe dreapta b .

Demonstrație

Fie dreapta AA_1 perpendiculară pe planul α , $A \in a$, $A_1 \in \alpha$, deci $AA_1 \perp b \subset \alpha$ (fig. 9.13). Din enunțul teoremei rezultă că dreapta b este perpendiculară pe a_1 , adică dreapta b este perpendiculară și pe dreapta AA_1 , și pe dreapta BA_1 . Deducem că dreapta b este perpendiculară pe planul determinat de punctele A , B , A_1 . Prin urmare, dreapta b este perpendiculară și pe dreapta $AB = a$ care aparține acestui plan. ►

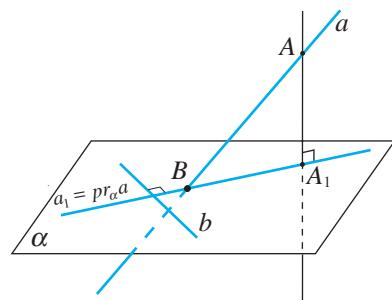


Fig. 9.13

Teorema 8 (reciproca teoremei celor trei perpendiculare). Dacă dreapta a este perpendiculară pe o dreaptă b din planul α și nu este perpendiculară pe plan, atunci proiecția a_1 a dreptei a pe planul α este perpendiculară pe dreapta b .

Demonstrație

Dreapta AA_1 (fig. 9.13) este perpendiculară pe planul α , deci $AA_1 \perp b \subset \alpha$ și din enunțul teoremei rezultă că $AB \perp b$, adică dreapta b este perpendiculară pe planul ABA_1 . Prin urmare, b este perpendiculară pe dreapta $a_1 = BA_1 = pr_\alpha a$. ►

Teorema 9. Fie un plan α , un punct A ce nu aparține planului α , un punct B ce aparține planului α și $A_1 = pr_\alpha A$. Atunci $AA_1 \leq AB$ (fig. 9.14).

Demonstrație

Într-adevăr, segmentul AA_1 este perpendicular pe planul α , deci și pe segmentul BA_1 . Rezultă că triunghiul AA_1B este dreptunghic în A_1 . Prin urmare, $AA_1 \leq AB$, egalitatea având loc numai dacă B coincide cu A_1 ($AB \perp \alpha$). ►

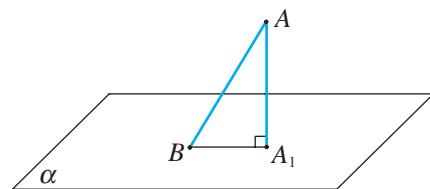


Fig. 9.14

Definiție. Distanță de la un punct la un plan se numește lungimea segmentului având o extremitate punctul dat și cealaltă – proiecția punctului pe acest plan.

În figura 9.14, lungimea segmentului AA_1 este distanța de la punctul A la planul α .

Teorema 10. Dacă între laturile triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ au loc relațiile $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[AC] \equiv [A_1C_1]$ și $BC > B_1C_1$, atunci $m(\angle BAC) > m(\angle B_1A_1C_1)$.

Din teorema 10 rezultă că măsura unghiului format de o dreaptă și proiecția ei pe un plan este mai mică decât măsura unghiului format de această dreaptă și oricare altă dreaptă din plan.

Într-adevăr, fie un plan α și o oblică a ($a \not\perp \alpha$, $a \not\parallel \alpha$), care intersectează planul în punctul A . Considerăm pe dreapta a un punct B , diferit de A , și construim $B_1 = pr_\alpha B$ (fig. 9.15).

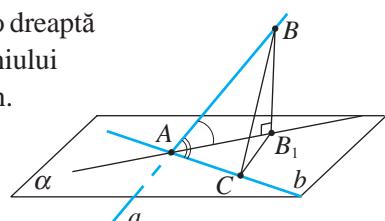


Fig. 9.15

Pe o dreaptă b din planul α ($b \neq AB_1$), ce trece prin punctul A , considerăm un punct C , astfel încât $AC = AB_1$.

Constatăm că între laturile triunghiurilor CAB și B_1AB au loc relațiile din ipoteza teoremei 10: $CA = B_1A$, $[AB]$ este latura comună și $CB > BB_1$, ca ipotenuza și respectiv cateta triunghiului CB_1B dreptunghic în B_1 . Prin urmare, $m(\angle BAC) > m(\angle BAB_1)$.

În cazul în care dreapta nu este perpendiculară pe plan este justificată următoarea

Definiție. **Unghi format de o dreaptă și un plan** se numește unghiul ascuțit format de această dreaptă și proiecția ei ortogonală pe acest plan.

În figura 9.16, unghiul φ este unghiul format de dreapta a și planul α .

Observație. Prin **unghiul format de un segment și un plan** vom înțelege unghiul format de dreapta suport a segmentului dat și acest plan.

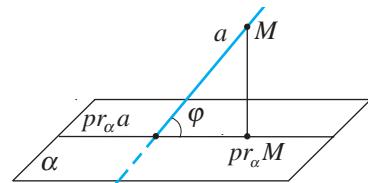


Fig. 9.16

Teorema 11. Lungimea proiecției unui segment pe un plan este egală cu produsul dintre lungimea acestui segment și cosinusul unghiului format de segment și plan.

Demonstrare

Fie un segment AB , un plan α ($[AB] \nparallel \alpha$), proiecțiile A_1 și B_1 ale punctelor A și respectiv B pe planul α și D – punctul de intersecție a dreptei AB cu planul α (fig. 9.17).

Fie C punctul de intersecție a dreptei BB_1 cu dreapta ce trece prin A paralelă cu dreapta A_1B_1 . Constatăm că triunghiul ABC este dreptunghic în C și au loc relațiile $m(\angle BAC) = m(\angle ADA_1) = \varphi$. Astfel, în triunghiul ABC avem $AC = AB \cos \varphi$ și, cum $AC = A_1B_1$, rezultă că $A_1B_1 = AB \cos \varphi$.

Fie punctele A, B situate în semispații diferite limitate de planul α (fig. 9.18).

Atunci $A_1B_1 = A_1D + DB_1$ și din triunghiurile AA_1D și BB_1D avem

$$A_1D = AD \cos \varphi, \quad DB_1 = DB \cos \varphi.$$

Prin urmare, $A_1B_1 = AD \cos \varphi + DB \cos \varphi = (AD + DB) \cos \varphi = AB \cos \varphi$.

Celelalte cazuri ($[AB] \parallel \alpha, \dots$) sunt evidente. ▶

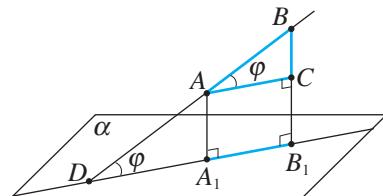


Fig. 9.17

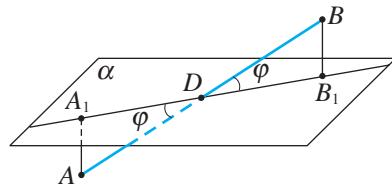


Fig. 9.18

Probleme propuse

A

- Triunghiurile isoscele ABC și ABD au baza comună AB și $C \notin (ABD)$, iar punctul M este mijlocul segmentului AB .
 - Să se arate că dreapta AB este perpendiculară pe planul MCD .
 - Să se construiască proiecția semidreptei suport a medianei MC pe planul suport al triunghiului ABD , dacă unghiul CMD este ascuțit.
 - Să se afle lungimea proiecției medianei MC pe planul ABD , dacă $MC = 4$ cm, $MD = 8$ cm, $CD = 6$ cm.
 - Să se determine distanța de la punctul D la planul ABC , folosind datele de la punctul c).
- Segmentul A_1B_1 este proiecția ortogonală a segmentului AB pe planul α . Să se afle:
 - lungimea segmentului A_1B_1 , dacă $AA_1 = 9$ cm, $BB_1 = 13$ cm, $AB = 5$ cm;
 - cosinusul unghiului format de segmentul AB și planul α .
- Distanța de la punctul A la planul α este de 3 cm. Oblicele AC și AB ($C, B \in \alpha$) la planul α au lungimile de 6 cm. Punctul M este mijlocul segmentului CB , iar $A_1 = pr_{\alpha} A$. Să se determine lungimea segmentului A_1M , dacă:
 - $m(\angle CAB) = 90^\circ$;
 - $m(\angle CAB) = 60^\circ$.
- Dintr-un punct care nu aparține unui plan sînt construite două oblice la acest plan, cu lungimile de 30 cm și 25 cm. Diferența lungimilor proiecțiilor oblicelor este egală cu 11 cm. Să se determine distanța de la punct la plan.
- Într-o încăpere, o grindă este instalată pe doi piloni, cu lungimile de 3 m și 5 m. Să se afle distanța de la podea la punctul ce împarte lungimea grindei în raportul de 2 : 3, considerînd de la pilonul mai scurt.

B

- Punctul V nu aparține planului suport al hexagonului regulat $ABCDEF$ și este egal depărtat de vîrfurile lui.
 - Să se demonstreze că dreapta ce trece prin punctul V și centrul O al hexagonului este perpendiculară pe planul suport al hexagonului.
 - Să se demonstreze că dreptele VA, VB, VC, VD, VE, VF formează cu planul suport al hexagonului şase unghiuri congruente.
- Punctul E , ce nu aparține planului suport al patrilaterului convex $ABCD$, este egal depărtat de vîrfurile lui.
 - Să se demonstreze că patrilaterul $ABCD$ este inscriptibil.
 - Să se demonstreze că perpendicularea ce trece prin punctul E pe planul suport al patrilaterului $ABCD$ trece și prin centrul cercului circumscris lui.
 - Să se demonstreze că cele patru unghiuri formate de dreptele EA, EB, EC, ED cu planul suport al patrilaterului $ABCD$ sunt congruente.
- Semidreapta $[OC$ formează unghiuri congruente cu semidreptele $[OA$ și $[OB$. Să se afle lungimea proiecției segmentului OC pe planul AOB , dacă $m(\angle AOC) = m(\angle BOC) = \alpha$, $m(\angle AOB) = 2\beta$, iar $OC = c$.

§3 Unghi format de două plane (unghi diedru)

Amintim că orice dreaptă a dintr-un plan α împarte mulțimea punctelor planului α ce nu aparțin dreptei a în două submulțimi α_1 și α_2 , care se numesc **semiplane deschise**. Dreapta a determină astfel semiplanul α_1 , cît și semiplanul α_2 . Reuniunea semiplanului deschis cu dreapta ce-l determină se numește **semiplan închis**. Planul α se numește **plan suport** și pentru semiplanul α_1 , și pentru semiplanul α_2 .

Definiție. Reuniunea a două semiplane închise, limitate de aceeași dreaptă, se numește **unghi diedru** (fig. 9.19).

Unghiul diedru al semiplanelor α_1, β_1 se notează $\angle(\alpha_1\beta_1)$.

Dreapta a se numește **muchia unghiului diedru** $\angle(\alpha_1\beta_1)$, iar semiplanele α_1 și β_1 se numesc **fețele unghiului diedru**.

Unghiul diedru format de două semiplane ce coincid se numește **unghi nul**.

Unghiul diedru format de semiplanele α_1 și β_1 a căror reuniune este un plan se numește **unghi diedru plat**.

Unghi diedru propriu se numește unghiul diedru diferit de cel nul și de cel plat.

Interiorul unghiului diedru propriu se numește intersecția semispațiului determinat de planul suport al lui α_1 , ce conține semiplanul β_1 , cu semispațiul determinat de planul suport al lui β_1 , ce conține semiplanul α_1 .

Fie $\angle(\alpha_1\beta_1)$ un unghi diedru propriu și A un punct oarecare pe muchia m a acestuia. Din punctul A , în fiecare dintre semiplanele α_1 și β_1 , construim perpendicularele a și b (fig. 9.20 a)). Astfel, am obținut un unghi plan cu vîrful în punctul A , laturile lui fiind semidreptele $[AB]$ și $[AC]$ ($C \in b, B \in a$).

Acest unghi plan poate fi obținut la intersecția unghiului diedru $\angle(\alpha_1\beta_1)$ cu un plan γ perpendicular pe muchia m a acestui unghi, ce trece prin punctul A (fig. 9.20 b)).

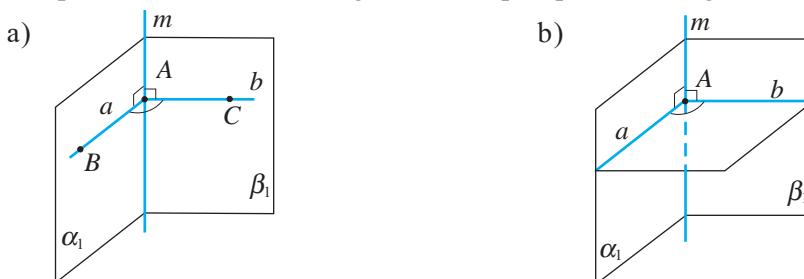


Fig. 9.20

Definiție. Intersecția unui unghi diedru cu un plan perpendicular pe muchia lui se numește **unghi liniar (unghi plan) al unghiului diedru**.

Se poate arăta că toate unghiurile liniare ale unuia și aceluiași unghi diedru sunt congruente.

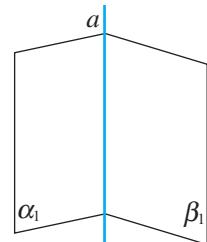


Fig. 9.19

Definiție. Măsură a unghiului diedru se numește măsura unui unghi liniar al acestuia.

Revenind la figura 9.20 a), scriem că

$$m(\angle(\alpha_1\beta_1)) = m(\angle BAC).$$

Definiții. • Semiplanele α_1 și β_1 se numesc **perpendiculare** dacă $m(\angle(\alpha_1\beta_1))=90^\circ$.
• În acest caz, planele suport respective, α și β , se numesc **plane perpendiculare**.

Se notează: $\alpha_1 \perp \beta_1$, respectiv $\alpha \perp \beta$.

Teorema 12. Două plane sunt perpendiculare dacă și numai dacă unul dintre ele conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt plan.

Demonstratie

Necesitatea. Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci dreapta suport a oricărei laturi a unghiului liniar este perpendiculară pe planul ce nu o conține.

Suficiența. Fie planul α trece prin dreapta a , perpendiculară pe planul β (fig. 9.21).

Planele α și β se intersectează după dreapta c , iar dreptele a și c se intersectează în punctul A .

În planul β , prin punctul A construim o dreaptă b perpendiculară pe dreapta c . Constatăm că unghiul BAC este unghiul liniar al unghiului diedru format de planele α și β . Cum $a \perp \beta$, rezultă că $a \perp b$. Așadar, $m(\angle(\alpha\beta))=90^\circ$, de unde $\alpha \perp \beta$. ►

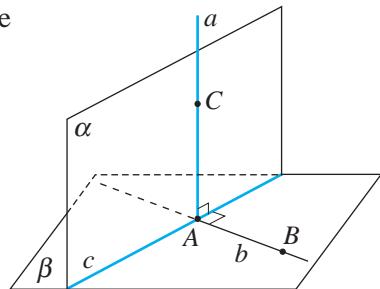


Fig. 9.21

Teorema 13. Dacă φ este măsura unghiului diedru format de planul unui triunghi ABC și un plan α , \mathcal{A}_Δ – aria triunghiului ABC , $\mathcal{A}_{pr_\alpha\Delta}$ – aria proiecției ortogonale a triunghiului ABC pe planul α , atunci $\mathcal{A}_{pr_\alpha\Delta} = \mathcal{A}_\Delta \cdot \cos \varphi$ (fig. 9.22).

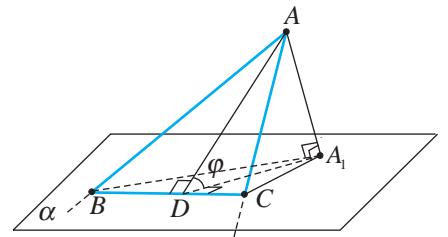


Fig. 9.22

Probleme rezolvate

1. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = BC = 8$ cm și $AC = 5$ cm. Din vîrfurile A și B se construiesc perpendicularele AA_1 și BB_1 în același semispațiu mărginit de planul ABC , astfel încât $AA_1 = 12$ cm și $BB_1 = 6$ cm (fig. 9.23). Să se determine:

- lungimea segmentului CD_1 , unde D_1 este mijlocul $[A_1B_1]$;
- distanța de la punctul C la dreapta A_1B_1 ;
- măsura unghiului diedru format de fețele ABC și A_1B_1C .

Rezolvare:

a) Distanța de la punctul C la mijlocul D_1 al segmentului A_1B_1 se calculează folosind triunghiul dreptunghic DD_1C ($AA_1 \parallel DD_1 \Rightarrow DD_1 \perp (ABC)$). Segmentul DD_1 este linie mijlocie a trapezului AA_1B_1B , deci $DD_1 = 9$ cm, iar segmentul DC este mediană a triunghiului ABC . Folosind formula de calcul al lungimii medianei unui triunghi ($m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$), obținem că $DC = \frac{1}{2}\sqrt{114}$ cm.

Aplicând teorema lui Pitagora triunghiului dreptunghic CDD_1 , obținem că $D_1C = \sqrt{DC^2 + DD_1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 114 + 81} = \sqrt{109,5}$ (cm).

b) Distanța de la punctul C la dreapta A_1B_1 este egală cu înălțimea triunghiului A_1CB_1 , construită din vîrful C . Aplicând teorema lui Pitagora triunghiului dreptunghic A_1AC , obținem că $A_1C = 13$ cm. În mod analog, în triunghiurile dreptunghice B_1BC și A_1KB_1 avem $B_1C = 10$ cm și respectiv $A_1B_1 = 10$ cm.

Distanța de la punctul C la dreapta A_1B_1 poate fi determinată astfel: $h_c = \frac{2\mathcal{A}_{A_1B_1C}}{A_1B_1}$.

Aflăm aria triunghiului A_1B_1C folosind formula lui Heron¹:

$$\mathcal{A}_{A_1B_1C} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{33}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{7}{2}} = \frac{13}{4}\sqrt{231} \text{ (cm).}$$

$$\text{Atunci } h_c = \frac{2 \cdot \frac{13}{4}\sqrt{231}}{10} = \frac{13}{20}\sqrt{231} \text{ (cm).}$$

c) Triunghiul ABC este proiecția triunghiului A_1B_1C pe planul triunghiului ABC . Prin urmare, măsura φ a unghiului diedru format de planele ABC și A_1B_1C se determină folosind relația $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{A_1B_1C} \cdot \cos \varphi$.

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{5}{4}\sqrt{231} \text{ cm}^2, \text{ deci } \cos \varphi = \frac{5}{13}, \text{ iar } \varphi = \arccos \frac{5}{13}.$$

Răspuns: a) $\sqrt{109,5}$ cm; b) $\frac{13}{20}\sqrt{231}$ cm; c) $\varphi = \arccos \frac{5}{13}$.

Observație. Problema 1 c) arată că măsura unui unghi diedru poate fi calculată fără a construi unghiuri liniare ale unghiului diedru respectiv.

2. Semidreptele necoplanare $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ cu originea comună sănătă construite astfel, încât $m(\angle AOC) = m(\angle BOC) = \alpha < 90^\circ$, $m(\angle AOB) = 2\beta$ (fig. 9.24).

a) Să se demonstreze că proiecția semidreptei $[OC]$ pe planul OAB este bisectoarea unghiului AOB .

¹ Heron din Alexandria (sec. 1 d.H.) – matematician grec.

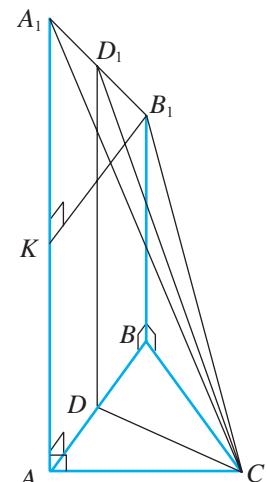
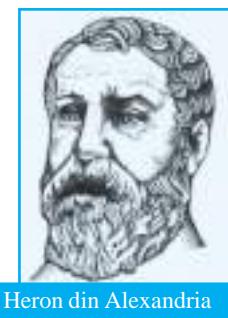


Fig. 9.23



Heron din Alexandria

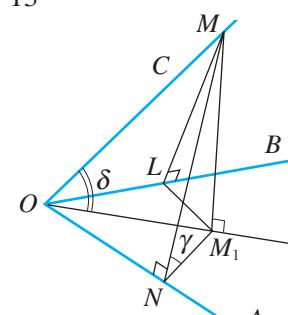


Fig. 9.24

- b) Să se determine măsura unghiului diedru care are muchia OA .
 c) Să se afle măsura unghiului format de dreapta OC și planul OAB .

Rezolvare:

a) Fie M_1 proiecția unui punct $M \in [OC]$ pe planul OAB , iar N și L punctele de intersecție a dreptelor ce trec prin punctul M și care sunt perpendiculare pe dreptele OA și respectiv OB . Dreptele NM_1 și LM_1 sunt proiecțiile dreptelor MN și respectiv ML pe planul OAB . Conform teoremei celor trei perpendiculare, $NM_1 \perp OA$ și $LM_1 \perp OB$.

Cum $\Delta ONM \stackrel{IU}{\equiv} \Delta OLM$, rezultă că $[ON] \equiv [OL]$ și $[MN] \equiv [ML]$.

Deoarece $\Delta MNM_1 \stackrel{IC}{\equiv} \Delta MLM_1$, rezultă că $[NM_1] \equiv [LM_1]$.

$\Delta ONM_1 \stackrel{CC}{\equiv} \Delta OLM_1 \Rightarrow \angle NOM_1 \equiv \angle LOM_1$, adică semidreapta $[OM_1]$ este bisectoare a unghiului AOB , c.c.t.d.

b) Din triunghiurile dreptunghice ONM , ONM_1 , MNM_1 obținem:

$$ON = OM \cos \alpha, \quad NM = OM \sin \alpha; \quad NM_1 = ON \operatorname{tg} \beta = OM \cos \alpha \operatorname{tg} \beta;$$

$$\cos \gamma = \frac{NM_1}{NM} = \frac{OM \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{OM \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta. \text{ Astfel, } \gamma = \arccos(\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta).$$

c) Din triunghiurile dreptunghice ONM_1 și MOM_1 avem:

$$OM_1 = \frac{ON}{\cos \beta} = \frac{OM \cos \alpha}{\cos \beta}, \quad \cos \delta = \frac{OM_1}{OM} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}, \text{ de unde } \delta = \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}\right).$$

Răspuns: b) $\gamma = \arccos(\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$; c) $\delta = \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}\right)$

3. Se știe că punctul M , care nu se conține în planul unui poligon, este egal depărtat de vîrfurile acestuia. Să se demonstreze că acest poligon este inscriptibil.

Rezolvare:

Fie punctul M nu aparține planului poligonului $A_1A_2A_3\dots A_n$ și $[MA_1] \equiv [MA_2] \equiv [MA_3] \equiv \dots \equiv [MA_n]$ (fig. 9.25). Punctul O este proiecția punctului M pe planul poligonului. Atunci triunghiurile OMA_1 , OMA_2 , OMA_3 , ..., OMA_n sunt dreptunghice și congruente (criteriul IC), de unde deducem că $[OA_1] \equiv [OA_2] \equiv \dots \equiv [OA_n]$. Prin urmare, punctul O din planul poligonului este egal depărtat de vîrfurile lui, adică poligonul este inscriptibil și punctul O este centrul cercului circumscris.

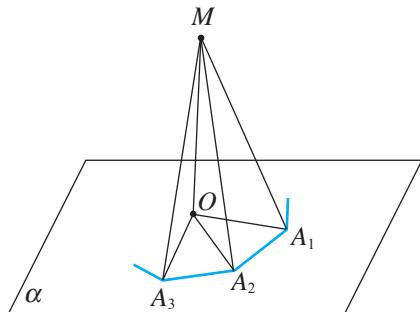


Fig. 9.25

Observație. Punctele dreptei OM sunt egale depărtate de vîrfurile poligonului $A_1\dots A_n$.

4. În una dintre fețele unghiului diedru $\angle(\alpha\beta)$ de măsură φ este dusă dreapta AD , care formează cu muchia b a unghiului diedru un unghi de măsură δ (fig. 9.26). Să se

determine măsura γ a unghiului format de dreapta AD cu cealaltă față a unghiului diedru.

Rezolvare:

Fie $\angle ABC$ unghiul liniar al unghiului diedru $\angle(\alpha\beta)$. Conform condiției, $m(\angle ABC) = \varphi$, $m(\angle ADB) = \delta$. Deoarece $AC \perp \beta$, rezultă că $\angle ADC$ este cel vizat în problemă. Din triunghiurile dreptunghice ABD , ACB și ACD avem: $AB = AD \sin \delta$,

$$AC = AB \sin \varphi = AD \sin \delta \sin \varphi, \quad AC = AD \sin \gamma.$$

De aici obținem $AD \sin \gamma = AD \sin \delta \sin \varphi$.

Prin urmare, $\sin \gamma = \sin \delta \sin \varphi$.

5. Fie punctul $A \notin \alpha$ și din acest punct sînt construite oblica AB și perpendiculara AO pe planul α , unde B este piciorul oblicei, iar O – piciorul perpendiculararei. Prin piciorul oblicei este construită în planul α dreapta BC , care formează cu proiecția oblicei un unghi de măsură δ . Fie φ și γ mărimile unghiurilor formate de oblica AB cu proiecția ei OB și respectiv cu dreapta BC (fig. 9.27). Să se arate că $\cos \gamma = \cos \varphi \cos \delta$.

Rezolvare:

Construim în planul α dreapta $OD \perp BC$. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $AD \perp BC$. Fie $AB = x$. Atunci din triunghiurile dreptunghice AOB , BDO și ADB obținem: $BO = x \cos \varphi$, $BD = BO \cos \delta = x \cos \varphi \cos \delta$, $BD = x \cos \gamma$.

De aici rezultă: $\cos \gamma = \cos \varphi \cos \delta$.

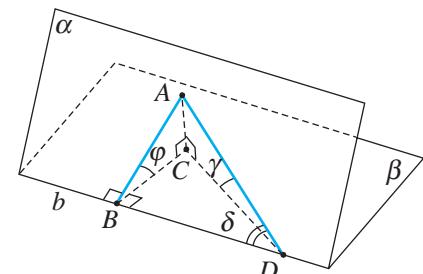


Fig. 9.26

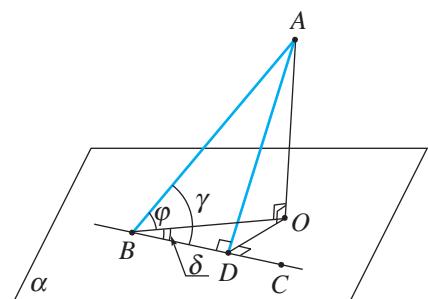


Fig. 9.27

Probleme propuse

A

- Triunghiurile echilaterale ABC și ABD au o latură comună AB și planele suport ale acestor triunghiuri formează un unghi diedru drept. Să se determine lungimea segmentului CD , dacă $AB = 2$ cm.
- Laturile triunghiului echilateral ABC sunt de 3 cm. Latura AB a triunghiului este situată în planul α . Unghiul diedru format de planul ABC și planul α are măsura de 30° . Să se afle:
 - lungimea proiecției medianei triunghiului ABC corespunzătoare vîrfului C pe planul α ;
 - distanța de la punctul C la planul α .
- Prin baza mică a unui trapez este construit un plan. Distanța de la punctul de intersecție a diagonalelor trapezului la plan este de 6 cm, iar raportul lungimilor bazelor este $3 : 2$. Să se afle distanța de la baza mare la planul construit.
- Prin una dintre laturile unui paralelogram este construit un plan. Distanța de la latura opusă pînă la plan este de 10 cm. Să se determine distanța de la punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului pînă la plan.

B

5. Triunghiul $A_1B_1C_1$ este proiecția ortogonală a ΔABC pe planul α . Să se afle cosinusul unghiului diedru format de planul ABC cu planul α , dacă $AA_1 = BB_1 = 3$ cm, $CC_1 = 8$ cm, $A_1B_1 = 13$ cm, $A_1C_1 = C_1B_1 = 12$ cm.
6. Punctul E este egal depărtat de laturile rombului $ABCD$ și nu aparține planului suport al rombului. Să se demonstreze că:
- proiecția punctului E pe planul rombului coincide cu punctul de intersecție a diagonalelor rombului;
 - cele patru unghiuri diedre formate de planele EAB , EBC , ECD , EDA cu planul α sunt congruente.
7. Fie $ABCD$ un patrulater convex și punctul E , astfel încât cele patru unghiuri diedre formate de planele EAB , EBC , ECD , EDA cu planul patrulaterului sunt congruente. Să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este circumscripțibil și că proiecția punctului E pe planul patrulaterului $ABCD$ este egal depărtată de laturile lui.
8. Triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) și triunghiul echilateral ADE se află în plane diferite și au o mediană comună, AF . Să se demonstreze că dreapta AF este perpendiculară pe planul determinat de punctele F, B, D .
9. Prin una dintre catetele triunghiului dreptunghic isoscel s-a construit un plan care formează cu cealaltă catetă un unghi de 45° . Să se afle măsura unghiului format de ipotenuză și acest plan.
10. În trapezul $ABCD$, $m(\angle BAD) = 60^\circ$. Prin baza mare AB este dus un plan care formează cu latura AD un unghi de 45° . Să se afle raportul dintre aria trapezului și aria proiecției lui pe acest plan.

Probleme recapitulative**A**

1. Dreptele AB , AC și AD sunt perpendiculare. Să se afle lungimea segmentului CD , știind că:
- $AB = 6$ cm, $BC = 14$ cm, $AD = 3$ cm;
 - $BD = 18$ cm, $BC = 32$ cm, $AD = 10$ cm;
 - $AB = m$, $BC = n$, $AD = p$;
 - $BD = s$, $BC = n$, $AD = p$.
2. Distanța de la punctul M la vîrfurile unui triunghi echilateral este b . Să se afle distanța de la punctul M la planul triunghiului, dacă latura triunghiului are lungimea a , iar $b > \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
3. Din vîrful B al trapezului isoscel $ABCD$ ($AD \parallel BC$) pe planul acestuia este construită perpendiculara BE cu lungimea de 4 cm. Să se determine distanțele d_1 și d_2 de la punctul E la dreptele CD și respectiv AD , știind că înălțimea trapezului este de 4 cm, $BC = 4$ cm și $AD = 12$ cm.
4. Din vîrful A al hexagonului regulat $ABCDEF$ pe planul acestuia este construită perpendiculara AM , astfel încât $AM = AB$. Să se afle măsura unghiurilor formate de planele:
- MDC și AEF
 - DCM și DEM .
5. Punctul D este egal depărtat de laturile triunghiului ABC . Știind că $AB = AC = 6$ cm, $BC = 4$ cm și că distanța de la punctul D la planul triunghiului este de $\sqrt{2}$ cm, să se afle distanțele de la punctul D la laturile triunghiului.
6. Un cablu trebuie întins de la un stîlp cu înălțimea de 8 m pe acoperișul unei clădiri cu înălțimea de 20 m. Distanța dintre stîlp și clădire este de 9 m. Să se determine lungimea cablului.

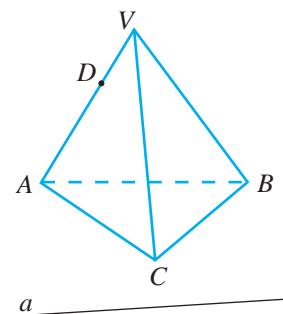
B

7. Se știe că punctul M , care nu aparține planului unui poligon, este egal depărtat de laturile poligonului. Să se demonstreze că acest poligon este circumscris unui cerc.

8. Punctul M este egal depărtat de laturile poligonului $ABCDE$.

Să se arate că unghurile diedre formate de planele AMB , BMC , CMD , DME , EMA cu planul ABC au aceeași măsură.

9. Planul α intersectează muchia AV a piramidei $VABC$ în punctul D , iar planul determinat de fața ABC intersectează planul α după dreapta a . Să se construiască secțiunea piramidei date cu planul α .

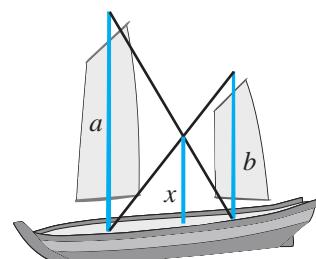


10. Dreapta a intersectează planul α , iar P este un punct situat în acest plan. Există în planul α o dreaptă ce trece prin P și care este perpendiculară pe dreapta a ?

11. Să se demonstreze că diagonala unui cub este perpendiculară pe planul ce conține extremitățile a trei muchii ce pornesc din același vîrf al cubului ca și diagonala respectivă.

12. Prin vîrful unghiului ascuțit al unui triunghi dreptunghic este construit un plan α paralel cu o catetă a acestui triunghi. Catetele sunt de 30 cm și 40 cm , iar proiecția catetei mai mari pe planul α este de $2\sqrt{31}\text{ cm}$. Să se afle lungimea proiecției ipotenuzei pe planul α .

13. Două catarge ale unui iaht sunt unite cu funii, astfel încât fiecare vîrf al unui catarg este unit cu baza celuilalt catarg. La ce distanță de la puntea iahtului se află punctul de intersecție a funiilor, dacă înălțimile catargelor sunt a și b ?



14. Punctul M este egal depărtat de vîrfurile unui hexagon regulat cu latura de lungime a . Să se determine distanța de la punctul M la planul hexagonului, dacă distanța de la punctul M la un vîrf al hexagonului este b .

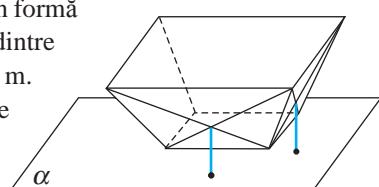
15. Punctul C nu aparține planului unghiului drept AOB și este egal depărtat de laturile unghiului. Să se afle distanța de la punctul C la planul unghiului, știind că $CO = a$, iar distanța de la punctul C la o latură a unghiului este b .

16. Din punctul A pe un plan sunt construite două oblice congruente. Măsura unghiului format de oblice este 2α , iar măsura unghiului format de proiecțiile oblicelor pe plan este 2β . Să se afle distanța de la punctul A la plan, știind că lungimea unei oblice este b .

17. Dintr-un punct situat la distanța a de la un plan sunt construite două oblice pe acest plan de aceeași lungime. Măsura unghiului format de oblice este 2α , iar măsura unghiului format de fiecare oblic și perpendiculara pe plan este β . Să se afle distanța dintre extremitățile oblicelor din planul dat.

18. Coșul de recepție a grăunțelor la o moară are patru pereți în formă de trapeze isoscele cu bazele de $0,4\text{ m}$ și $1,2\text{ m}$. Distanța dintre planul orificiului de sus și planul bazei coșului este de 2 m .

Pentru a mări rigiditatea pereților coșului, au fost sudate bare de fier de-a lungul diagonalelor fiecărei fețe și piloni verticali din punctul de intersecție a acestor bare pînă la planul bazei coșului. Să se determine înălțimea pilonilor.



Probă de evaluare

A

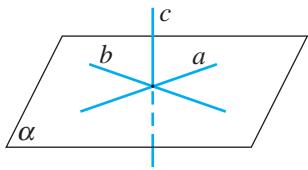
Timp efectiv de lucru:
45 de minute

- Determinați distanța de la mijlocul segmentului AB la un plan ce nu intersectează acest segment, dacă distanțele de la punctele A și B la plan sunt de 2,4 cm și respectiv 4,6 cm. (2)
- Lungimea laturii unui triunghi echilateral este de 6 cm. Un punct, care nu este conținut de planul triunghiului, se află la distanța de 3 cm de fiecare latură a triunghiului. Aflați distanța de la acest punct la planul triunghiului dat. (2)
- Punctul M este situat la distanțe egale de la vîrfurile unui dreptunghi cu dimensiunile de 4 cm și 10 cm. Determinați distanța de la punctul M la dreptele suport ale laturilor dreptunghiului, dacă distanța de la punctul M la planul dreptunghiului este de 5 cm. (3)
- Latura triunghiului echilateral ABC este de 12 cm. Dreptele MA , MB , MC formează cu planul triunghiului ABC unghiuri congruente de 30° . Aflați distanța de la punctul M la planul triunghiului ABC . (3)

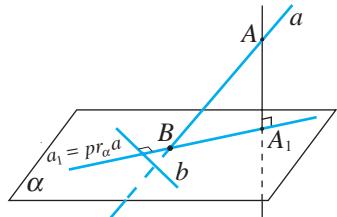
B

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

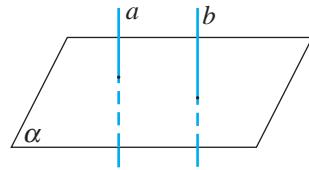
- Un segment intersectează un plan. Extremitățile segmentului sunt situate la distanțele a și b de la plan. Aflați distanța de la mijlocul segmentului la acest plan. (2)
- Prin mediana unui triunghi este construit un plan. Demonstrați că vîrfurile triunghiului, ce nu aparțin planului construit, sunt egal depărtate de acest plan. (2)
- Lungimile laturilor unui triunghi isoscel ABC sunt de 5 cm, 5 cm și 2 cm. Distanța de la punctul M la planul ABC este de 8 cm, iar proiecția lui pe planul ABC coincide cu mijlocul celei mai mari înălțimi a triunghiului. Determinați distanța de la punctul M la laturile triunghiului. (3)
- Aflați măsura unghiului format de muchia laterală și planul bazei unei piramide patrulaterale, dacă se știe că toate muchiile ei sunt congruente. (3)



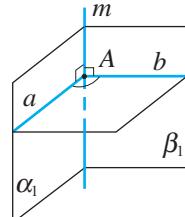
$(a \subset \alpha, b \subset \alpha, \alpha \nparallel b, c \perp a, c \perp b) \Rightarrow c \perp \alpha$



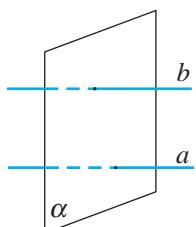
$(a \perp \alpha, AB - \text{oblică}, B \subset \alpha, A_1 \in \alpha, A_1 B \perp b) \Rightarrow AB \perp \alpha$



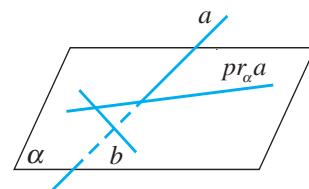
$(a \parallel b, a \perp \alpha) \Rightarrow b \perp \alpha$



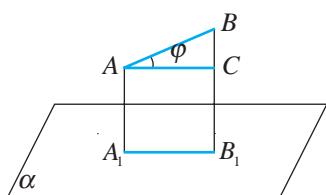
$\angle(\alpha, \beta) - \text{unghi diedru}, \alpha \cap \beta = m, (ABC) \perp m, m(\angle(\alpha, \beta)) = m(\angle BAC)$



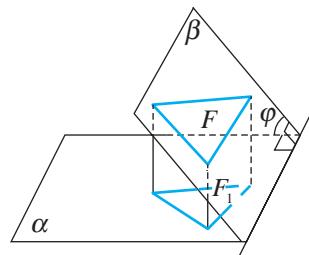
$(a \perp \alpha, b \perp \alpha) \Rightarrow a \parallel b$



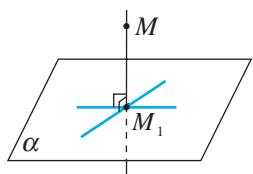
$b \subset \alpha$
1) $a \perp b \Rightarrow pr_\alpha a \perp b$
2) $b \perp pr_\alpha a \Rightarrow a \perp b$



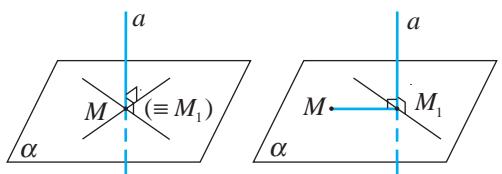
$([A_1B_1] \equiv pr_\alpha [AB], AC \parallel A_1B_1) \Rightarrow$
 \Rightarrow lungimea proiecției $[AB]$ este $AB \cos \varphi$



$(F \subset \beta, F_1 = pr_\alpha F, m(\angle(\alpha, \beta)) = \varphi) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathcal{A}_{F_1} = \mathcal{A}_F \cos \varphi$



$(MM_1 \perp \alpha, M_1 \in \alpha) \Rightarrow$ lungimea MM_1 este
egală cu distanța de la punctul M la planul α



$a \perp \alpha, M, M_1 \in \alpha, M_1 \in a, MM_1 - \text{distanța}$
de la punctul M la dreapta a

Obiective

- ⇒ recunoașterea în situații variate și utilizarea în diferite contexte a noțiunilor: *simetrie axială*, *simetrie centrală*, *simetrie față de un plan*, **translație*, **asemănare*, **rotație în spațiu*;
- ⇒ utilizarea terminologiei aferente transformărilor geometrice în diverse contexte;
- ⇒ construirea imaginilor unor figuri obținute în urma transformărilor geometrice studiate;
- ⇒ utilizarea transformărilor geometrice în rezolvări de probleme.

În clasele anterioare s-au studiat simetria axială, simetria centrală, translația, asemănarea în plan. De asemenea, a fost definită congruența triunghiurilor. Congruența figurilor mai complicate se definește cu ajutorul transformărilor geometrice, care au o aplicație largă. De exemplu, pentru a elabora un program ce permite vizualizarea pe ecranul calculatorului a unei figuri spațiale în mișcare, săt necesare transformările geometrice.

§1 Noțiunea de transformare geometrică.

Transformări izometrice

Fie X și Y mulțimi nevide de puncte din spațiu. Amintim că dacă fiecărui punct x al mulțimii X i se asociază un singur punct y al mulțimii Y , atunci este definită o *aplicație* a mulțimii X în mulțimea Y . Se notează: $f: X \rightarrow Y$ sau $X \xrightarrow{f} Y$. Punctul $y = f(x)$ se numește *imaginea* punctului $x \in X$, iar x este o *preimagine* a punctului $y \in Y$. Se mai spune că punctul x se aplică pe punctul y la aplicația f .

Exemple

1. Fie α un plan și d o dreaptă ce intersectează acest plan. Prin orice punct M al spațiului trece o singură dreaptă paralelă cu dreapta d . Fie M' punctul de intersecție a acestei drepte cu planul α (fig. 10.1).

Aplicația spațiului în planul α , care îi asociază fiecărui punct M al spațiului un punct $M' \in \alpha$, astfel încât $MM' \parallel d$, se numește *proiecțare paralelă* a spațiului pe planul α în direcția dreptei d .

2. Fie O un punct din spațiu. Aplicația spațiului în el însuși, care îi asociază fiecărui punct M diferit de O un punct M' , astfel încât punctul O este mijlocul segmentului MM' ,

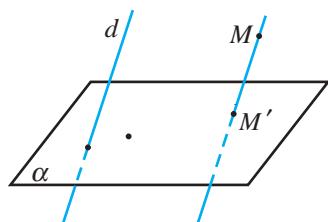


Fig. 10.1

iar punctului O – însuși punctul O , se numește **simetrie centrală** de centru O a spațiului (fig. 10.2).

Se notează: S_o .

Punctul O se numește în acest caz **centru de simetrie**.

Evident, dacă la simetria centrală, punctul M' este imaginea punctului M , atunci punctul M este imaginea punctului M' ; se spune că M și M' sînt **simetrice** față de centrul de simetrie.

Observăm că proiectarea paralelă a spațiului pe un plan nu este o aplicație bijectivă (deoarece orice punct din plan posedă mai multe preimagini), iar simetria centrală este o aplicație bijectivă a spațiului.

Definiție. Orice aplicație bijectivă a spațiului în el însuși se numește **transformare geometrică** a spațiului.

În continuare, pentru a ne exprima mai laconic, vom folosi cuvîntul „transformare” în loc de „transformare geometrică”.

Fie F o figură din spațiu și g o transformare a spațiului. Figura $F' = g(F)$, ce constă din imaginile tuturor punctelor figurii F la transformarea g , se numește **imagină** a figurii F la transformarea g .

Deoarece transformările sînt un caz particular al aplicațiilor, ele posedă toate proprietățile generale ale aplicațiilor. Astfel, compunerea transformărilor este o transformare; are loc legea asociativă a compunerii transformărilor, se poate defini restricția transformării la o figură etc.

Dacă prin transformarea g figura F se aplică pe ea însăși, adică $g(F) = F$, atunci restricția transformării g la figura F se numește **transformare de simetrie** a figurii F . Pentru concizie, vom spune că g este transformare de simetrie a figurii F .

Definiție. Transformarea g a spațiului se numește **transformare de izometrie** (sau **izometrie**) a spațiului dacă pentru orice două puncte M și N ale spațiului și imaginile lor $M' = g(M)$, $N' = g(N)$ are loc egalitatea $MN = M'N'$.

Altfel spus, izometria este aplicația spațiului în el însuși care păstrează distanțele. Izometriile se mai numesc și **deplasări** sau **mișcări** ale spațiului.

Evident, transformarea identică a spațiului, adică transformarea care aplică fiecare punct al spațiului pe el însuși, este o izometrie.

Două figuri se numesc **congruente** dacă există o izometrie care aplică una dintre aceste figuri pe cealaltă.

Teorema 1. Orice izometrie aplică trei puncte coliniare pe trei puncte coliniare. De asemenea, izometria aplică un punct situat între alte două puncte pe un punct situat între imaginile acestor două puncte.

Demonstrație

Fie A, B, C puncte coliniare distincte. Atunci unul și numai unul dintre ele este situat între celelalte două. Fie B situat între A și C . Astfel, are loc egalitatea $AB + BC = AC$.

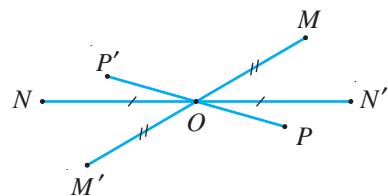


Fig. 10.2

Fie A', B', C' imaginile respective ale punctelor A, B, C la o izometrie. Din definiția izometriei rezultă egalitățile $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, iar din ele rezultă egalitatea $A'B' + B'C' = A'C'$. Adică B' este situat între A' și C' , iar aceasta înseamnă că punctele A', B', C' sunt coliniare. ►

Definiție. Punctul A se numește **punct invariant** al izometriei g dacă $g(A) = A$; dreapta d se numește **dreaptă invariantă** a lui g dacă $g(d) = d$; planul α se numește **plan invariant** al lui g dacă $g(\alpha) = \alpha$.

Dacă toate punctele unei drepte sunt puncte invariante ale izometriei g , atunci această dreaptă se numește **invariantă punct cu punct** la această izometrie.

Problema rezolvată

↳ Să se arate că dacă o izometrie nu are puncte invariante, atunci dreptele invariante ale acestei izometrii (în cazul în care există) sunt paralele.

Rezolvare:

Presupunem contrariul, fie a și b drepte invariante neparalele la izometria dată g . Deci, aceste drepte se intersectează sau sunt necoplanare. Dacă dreptele a și b se intersectează în punctul M , atunci punctul $M' = g(M)$ aparține acestor drepte (invariante), adică $g(M) = M$. Aceasta contrazice ipoteza problemei. În cazul în care dreptele a și b sunt necoplanare, există perpendiculara lor comună AB , $A \in a$, $B \in b$. Deoarece AB este cea mai mică distanță dintre dreptele a și b , rezultă că punctele A și B sunt puncte invariante la izometria g și iarăși obținem o contradicție.

Probleme propuse

A

- Să se dea exemple de transformări geometrice în spațiu din diverse domenii.
- Să se decidă dacă proiecțarea paralelă a spațiului pe un plan este o izometrie.
- Fie unghiul AOB și f o aplicație a spațiului în el însuși, astfel încât au loc următoarele două condiții:
 - imaginea oricărui punct M al spațiului, ce nu aparține unghiului AOB , este însuși acest punct M ;
 - imaginea oricărui punct ce aparține unghiului AOB este simetricul lui față de bisectoarea acestui unghi.
 Este această aplicație o transformare geometrică a spațiului? Dar o izometrie?
- În urma unei transformări geometrice a spațiului, o figură se aplică pe ea însăși. Este oare o astfel de transformare o izometrie a spațiului? Să se dea exemple.

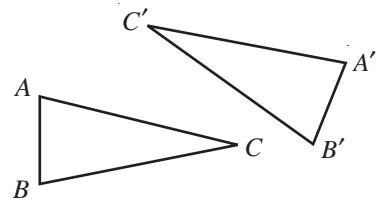
B

- Să se demonstreze că orice izometrie aplică:
 - un segment pe un segment congruent cu el;
 - un triunghi pe un triunghi congruent cu el.
- Să se demonstreze că orice izometrie aplică un unghi pe un unghi congruent cu el.
- Să se demonstreze că aplicația inversă izometriei este de asemenea o izometrie.

8. Fie $\Delta A'B'C'$ imaginea triunghiului ABC la izometria g .

Să se construiască imaginea:

- a) medianei BK ;
- b) bisectoarei BL ;
- c) înălțimii BM ;
- d) centrului de greutate G ;
- e) centrului cercului înscris I ;
- f) ortocentrului H ;
- g) centrului O al cercului circumscris triunghiului ABC la această izometrie.



9. a) Să se arate că dacă A și B sunt puncte invariante distincte ale izometriei f , atunci orice punct al dreptei AB este invariant.

b) Poate oare izometria spațiului să posede exact două puncte invariante distincte?

10. a) Să se arate că dacă A, B, C sunt puncte necoliniare invariante ale izometriei f , atunci orice punct al planului ABC este invariant.
b) Să se decidă dacă izometria spațiului posedă exact trei puncte invariante.

11. Izometria f are un punct invariant.

a) Are oare un punct invariant izometria f^{-1} ? b) Dar izometria $f \circ f$?

12. Izometria f posedă următoarea proprietate: pentru un punct A , $f(A) = B$, iar $f(B) = A$.
Să se decidă dacă izometria $f \circ f$ are puncte invariante.

§2 Simetria centrală

În § 1 am definit simetria spațiului față de un punct și am numit-o simetrie centrală.

Teorema 2. Simetria centrală a spațiului este o izometrie.

Demonstratie

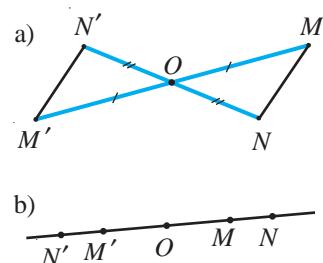
Presupunem că simetria centrală S_O aplică punctele arbitrar M și N ale spațiului pe punctele M' și respectiv N' .

Dacă punctele M, N și O sunt necoliniare (fig. 10.3 a)), afirmația teoremei rezultă din congruența triunghiurilor MON și $M'ON'$ (criteriul LUL), deci $MN = M'N'$.

Dacă punctele M, N și O sunt coliniare și, de exemplu, M este situat între O și N (fig. 10.3 b)), atunci

$$MN = ON - OM = ON' - OM' = M'N'.$$

Fig. 10.3



Analog se obține egalitatea $MN = M'N'$ și în celelalte cazuri de amplasare a punctelor M, N și O pe aceeași dreaptă. Așadar, simetria centrală păstrează distanțele dintre puncte, prin urmare, este o izometrie. ►

Definiție. Figurile F și F' se numesc **simetrice** față de punctul O dacă $S_O(F) = F'$.

În particular, dacă figura F este simetrică cu ea însăși față de punctul O , atunci F se numește **figură centrală simetrică**, iar O se numește **centru de simetrie al figurii** F . De exemplu, cercul, pătratul, sfera sunt figuri central simetrice.

Problemă rezolvată

✳ Punctul A este situat în interiorul unghiului BOC (fig. 10.4). Să se construiască segmentul cu extremitățile pe laturile acestui unghi, astfel încât mijlocul lui să fie punctul A.

Rezolvare:

Prin punctul $O' = S_A(O)$ ducem dreptele $O'C'$ și $O'B'$ paralele cu OC și respectiv OB . Segmentul DE , unde $D = O'C' \cap OB$ și $E = O'B' \cap OC$, este segmentul care trebuie construit.

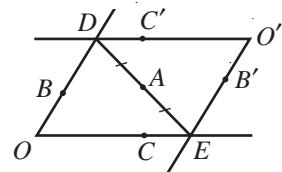


Fig. 10.4

Probleme propuse

A

- Să se dea exemple de figuri geometrice central simetrice.
- Să se stabilească dacă sunt simetrice orice două puncte ale spațiului față de un al treilea punct al spațiului.
- Cîte centre de simetrie are figura formată din două drepte paralele? Ce figură reprezintă mulțimea acestor centre?
- Să se decidă dacă sunt simetrice față de un punct două segmente necongruente.
- Pot oare să fie simetrice față de un punct două segmente concurente? Dar neconcurente?
- Punctele A, B, C, D sunt situate în spațiu, astfel încît A și C sunt simetrice față de B , iar B și D sunt simetrice față de C . Ce se mai poate spune despre amplasarea acestor puncte?
- Să se construiască simetricul unui triunghi față de:
 - un vîrf al triunghiului;
 - mijlocul unei laturi a triunghiului.
- Să se decidă dacă există puncte, drepte și plane invariante la o simetrie centrală.
- Ce aplicație reprezintă compunerea $S_o \circ S_o$?
- Poate fi un triunghi figură central simetrică?

B

- Să se demonstreze că aplicația inversă unei simetrii centrale este aceeași simetrie centrală.
- Să se demonstreze că simetria centrală aplică:
 - orice plan pe un plan paralel cu el;
 - orice două plane paralele pe două plane paralele;
 - două plane ce se intersectează după o dreaptă pe două plane ce se intersectează după imaginea dreptei respective;
 - două plane perpendiculare pe două plane perpendiculare.
- Fie punctul A și figura F , $A \notin F$. Se consideră mulțimea tuturor punctelor spațiului simetrice punctului A față de toate punctele figurii F . Să se determine această mulțime, dacă figura F este:
 - un segment;
 - o dreaptă;
 - un plan.
- Să se arate că, la o simetrie centrală, orice dreaptă și imaginea ei sunt coplanare.
- Să se arate că dacă figura $F = [AB] \cup [CD]$ este central simetrică, atunci și figura $[AC] \cup [BD]$ este central simetrică față de același centru.

§3 Simetria axială

Fie dreapta d și punctul $A \notin d$. Punctul A' se numește **simetricul** punctului A față de dreapta d dacă $AA' \perp d$, $AA' \cap d = M$ și $AM = A'M$. Punctele dreptei d se numesc simetrice cu ele însăși față de această dreaptă.

Definiție. Transformarea spațiului care aplică fiecare punct al spațiului pe simetricul său față de dreapta dată d se numește **simetrie a spațiului față de dreapta d** sau **simetrie axială de axă d** .

Se notează: S_d , $S_d(A) = A'$, $S_d(B) = B'$ (fig. 10.5).

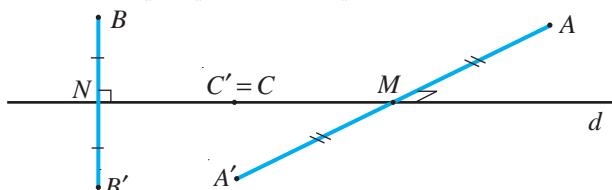


Fig. 10.5



Teorema 3. Simetria axială a spațiului este o izometrie.

Demonstratie

Presupunem că simetria axială de axă d aplică punctele arbitrarе A și B pe punctele A' și respectiv B' . Să demonstrăm că $AB = A'B'$. Dacă dreptele AB și d sunt coplanare, atunci este evident că $AB = A'B'$. Presupunem că dreptele AB și d sunt necoplanare (fig. 10.6) și $BB' \cap d = N$. Ducem prin punctul N dreapta paralelă cu AA' și construim pe ea segmentele simetrice A_1N și NA'_1 , astfel încât $A_1A'_1 = AA'$. Patrulaterul $AA_1A'_1A$ este dreptunghi și, prin urmare, $AA_1 = A'_1A$. Cum axa d este perpendiculară pe dreptele BB' și $A_1A'_1$, ea este perpendiculară și pe planul determinat de aceste drepte. De aici și din faptul că $AA_1 \parallel d \parallel A'_1A$ rezultă că $AA_1 \perp A_1B$ și $A'_1A \perp A'_1B'$. Din congruența triunghiurilor A_1NB și A'_1NB' rezultă că $BA_1 = B'A'_1$. Având catetele congruente, rezultă că triunghiurile dreptunghice AA_1B și $A'_1A'B'$ sunt congruente și deci $AB = A'B'$. ►

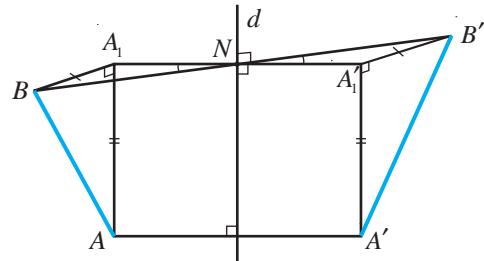


Fig. 10.6

Dacă la simetria axială S_d , figura F' este imaginea figurii date F , adică $F' = S_d(F)$, atunci aceste figuri se numesc **simetrice față de dreapta d** .

Dreapta d este o axă de simetrie a figurii F , dacă simetria axială de axă d aplică această figură pe ea însăși: $S_d(F) = F$. De exemplu, dreptele ce conțin diagonalele și mediatoarele laturilor pătratului sunt axe de simetrie ale acestuia; orice dreaptă ce trece prin centrul cercului și aparține planului cercului sau este perpendiculară pe el este o axă de simetrie a cercului.

Problemă rezolvată

Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC cu $m(\angle A) < 90^\circ$ sunt date punctele fixe P și respectiv Q (fig. 10.7). Să se determine pe latura BC punctul X_1 , astfel încât perimetru ΔPQX să fie minim.

Rezolvare:

Fie $P_1 = S_{BC}(P)$, atunci $P_1X = PX, \forall X \in (BC)$.

Perimetru ΔPQX este minim dacă suma $P_1X + XQ$ este minimă; deci $X = X_1 = BC \cap P_1Q$.

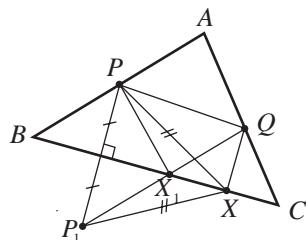


Fig. 10.7

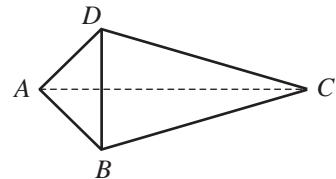
Probleme propuse

A

- Să se dea exemple de figuri geometrice care:
 - au cel puțin o axă de simetrie;
 - nu au axă de simetrie.
- Să se determine axele de simetrie ale cubului.
- Să se construiască imaginea unui cub la simetria axială față de:
 - dreapta suport a unei muchii a cubului;
 - dreapta suport a diagonalei unei fețe.
- Să se determine poziția reciprocă a axei de simetrie d și a imaginii α' a planului dat α la simetria S_d , dacă:
 - $\alpha \supset d$;
 - $d \perp \alpha$;
 - d este oblic față de α .
- Fie punctele distincte A și B . Să se indice axele tuturor simetriilor axiale care aplică A pe B . Ce figură este reuniunea tuturor acestor axe?
- Să se indice toate axele de simetrie ale:
 - unei segmente;
 - unei semidrepte;
 - unei drepte;
 - unei planuri;
 - unei paralelograme.

B

- Să se determine care poate fi poziția reciprocă la simetria axială:
 - a unei drepte și a imaginii ei;
 - a unui plan și a imaginii lui.
- Să se determine:
 - dreptele invariante ale simetriei S_d ;
 - dreptele invariante punct cu punct ale simetriei S_d .
- Să se construiască imaginea figurii reprezentate la simetria față de dreapta AB , dacă punctele A, B, C, D sunt necoplanare, ABC și ABD sunt triunghiuri isoscele cu baza comună AB .



§4 Simetria față de un plan

Fie planul α și punctele A, A' ce nu aparțin acestui plan. Punctele A și A' se numesc **simetrice față de planul α** dacă acest plan este **planul mediator** al segmentului AA' , adică planul α este perpendicular pe segmentul AA' și îl împarte în jumătate. Orice punct B al planului α se consideră simetric cu el însuși (fig. 10.8).

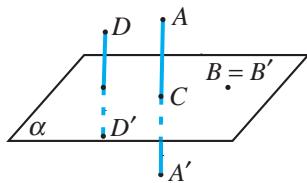


Fig. 10.8

Definiție. Transformarea spațiului care aplică orice punct al spațiului pe simetricul lui față de un plan dat α se numește **simetrie a spațiului față de planul α** .

Se notează: S_α .

Planul α se numește **plan de simetrie**.

Dacă pentru figura F are loc relația $F = S_\alpha(F)$, planul α se numește **plan de simetrie al figurii F** , iar figura F se numește **figură simetrică față de planul α** .

De exemplu, cilindrul circular drept este simetric față de orice plan ce conține axa lui.

Problemă rezolvată

Planele α și β sunt perpendiculare (fig. 10.9). Patrulaterul $ABCD$ și $AECF$ sunt romburi. Să se demonstreze că $EBFD$ este romb.

Rezolvare:

Observăm că la simetria S_α , $S_\alpha([FB]) = [BE]$, $S_\alpha([FD]) = [DE]$.

Prin urmare, $[FB] \equiv [BE]$, $[FD] \equiv [DE]$.

În mod analog, la simetria S_β ,

$S_\beta([FB]) = [FD]$, adică $[FB] \equiv [FD]$.

Astfel, patrulaterul $EBFD$ are toate laturile congruente, adică este romb.

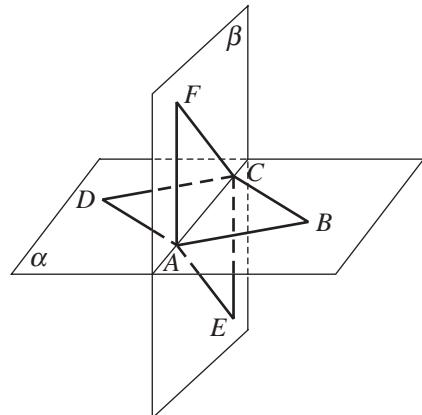


Fig. 10.9

Probleme propuse

A

1. Să se dea exemple de figuri geometrice care au plane de simetrie.
2. Să se determine dreptele care se aplică pe ele însăși la simetria față de un plan.
3. Să se indice planele de simetrie (dacă ele există) ale:
 - unui segment;
 - unei drepte;
 - unui plan;
 - reuniunii a două drepte concurente;
 - reuniunii a două drepte paralele;
 - reuniunii a două plane paralele.
4. Se știe că segmentele AB și $A'B'$ sunt simetrice față de un plan. Sunt oare coplanare sau necoplanare dreptele lor suport?
5. Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un cub. Să se reprezinte simetricul punctului A față de planul:
 - CC_1D_1 ;
 - BDD_1 ;
 - CDA_1 ;
 - BDC_1 ;
 - BCB_1 .

6. Două plane reciproc perpendiculare se intersectează după dreapta d . Punctele A și B sunt simetricele punctului C față de aceste plane. Să se afle distanța de la punctul C pînă la dreapta d , dacă $AB = 10$ m.

7. Planul α este simetricul planului β față de planul γ . Care poate fi poziția reciprocă a planelor α și β ?

B

8. Să se demonstreze că simetria spațiului față de un plan α :

- este o izometrie;
- coincide cu inversa sa, adică $S_\alpha = S_\alpha^{-1}$;
- aplică orice dreaptă pe o dreaptă și orice plan pe un plan.

9. Punctele A și B sunt situate de aceeași parte a planului α .

Să se găsească în planul α un punct M , astfel încît suma $AM + MB$ să fie minimă.

10. Punctele A și B sunt situate de părți diferite ale planului α , la distanțe diferite de planul α . Să se afle în planul α un punct M , astfel încît valoarea absolută a diferenței $AM - MB$ să fie maximă.

11. Prin dreapta d sînt duse toate planele posibile. Se consideră un punct A ce nu aparține dreptei d și mulțimea tuturor simetricelor punctului A față de aceste plane. Ce reprezintă această mulțime?

12. Să se demonstreze: compunerea a trei simetrii în raport cu trei plane reciproc perpendiculare este o simetrie centrală.



§5 Translația

Două semidrepte cu aceeași dreaptă suport se numesc **semidrepte la fel orientate** (sau **coorientate**), dacă intersecția lor este o semidreaptă, respectiv **semidrepte opus orientate**, dacă intersecția lor nu este o semidreaptă.

Semidreptele $[AC$ și $[BC$ din figura 10.10 sînt la fel orientate, iar semidreptele $[BA$ și $[AC$ – opus orientate.

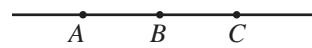
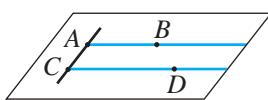


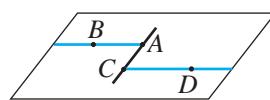
Fig. 10.10

Se notează: $[AC \uparrow\uparrow [BC]$, $[BA \uparrow\downarrow [AC]$.

Dacă dreptele suport a două semidrepte sînt drepte paralele distincte, atunci ele aparțin unui plan. Dreapta ce trece prin originile acestor semidrepte împarte planul în două semiplane. Dacă aceste semidrepte sînt situate în același semiplan, atunci ele se numesc **semidrepte la fel orientate** (fig. 10.11 a)), iar dacă sînt situate în semiplane diferite – **semidrepte opus orientate** (fig. 10.11 b)).



$[AB \uparrow\uparrow [CD]$
a)



$[AB \uparrow\downarrow [CD]$
b)

Fig. 10.11

Evident, două semidrepte la fel orientate cu a treia sănătă la fel orientate.

Definiție. Se numește **translație a spațiului determinată de perechea ordonată de puncte distincte** (A, A') transformarea spațiului care aplică fiecare punct M al spațiului pe punctul M' , astfel încât $[MM'] \uparrow\uparrow [AA']$ și $MM' = AA'$ (fig. 10.12).

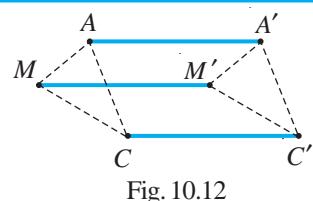


Fig. 10.12

Pentru translația determinată de perechea (A, A') se folosește notația $t_{AA'}$. Deci, $M' = t_{AA'}(M)$, $C' = t_{AA'}(C)$ etc.

Evident, dacă $t_{AA'}(M) = M'$, atunci $t_{MM'}(A) = A'$ și, în acest caz, $t_{AA'} = t_{MM'}$. Aceasta înseamnă că translația poate fi determinată de orice pereche de puncte, unul dintre care este imaginea celuilalt la această translație.

Transformarea identică a spațiului este considerată drept o translație determinată de orice pereche de puncte ce coincid: $t_{AA'}(M) = t_{BB'}(M) = M$, $\forall M$ și $\forall A, B$.

Dacă $M' = t_{AA'}(M)$ și $M \notin AA'$, atunci patrulaterul $AA'M'M$ este paralelogram.

Problema rezolvată

✳ Două sate, A și B , sănătă despartite de un rîu ale cărui maluri au forma a două drepte paralele. Unde trebuie să fie construit podul peste rîu, astfel încât lungimea drumului dintre aceste sate să fie minimă (podul se construiește perpendicular pe maluri)?

Rezolvare:

Fie vectorul \vec{a} perpendicular pe malurile rîului și modulul lui este egal cu distanța dintre maluri (fig. 10.13). Dacă $B_1 = t_{\vec{a}}(B)$, atunci punctul M , din care se va construi podul, este situat pe malul pe care se află satul A și pe segmentul AB_1 . Pentru orice alt punct $M_1 \neq M$, $AM_1 + M_1B_1 > AM + MB_1 = AB_1 = AM + NB$.

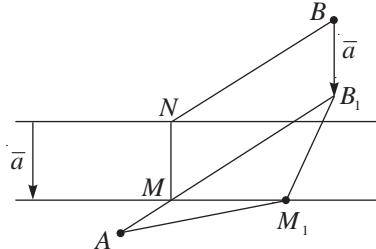


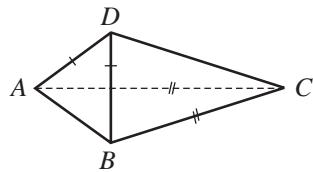
Fig. 10.13

Probleme propuse

B

- Să se construiască imaginea paralelogramului $ABCD$ la translația t_{AM} , dacă punctul M coincide cu:
 - vîrful B ;
 - vîrful C ;
 - vîrful D ;
 - intersecția diagonalelor.
- Să se construiască imaginea cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ la translația t_{AM} , dacă punctul M coincide cu:
 - vîrful B ;
 - vîrful B_1 ;
 - vîrful C_1 ;
 - mijlocul muchiei AB ;
 - centrul O al cubului.
- Trei drepte paralele distincte intersectează două plane paralele distincte în vîrfurile triunghiurilor ABC și respectiv $A_1B_1C_1$. Să se arate că aceste triunghiuri sunt congruente.

4. Punctele A, B, C, D sunt necoplanare, astfel încât triunghiurile ABD și ABC sunt isoscele cu aceeași bază AB . Să se construiască imaginea figurii $ABCD$ la translația t_{AC} .
5. Să se decidă dacă există puncte, drepte și plane invariante la o translație diferită de cea identică.
6. Să se determine translația inversă pentru t_{AB} .
7. Să se demonstreze că:
 - a) translația este o izometrie a spațiului;
 - b) translația aplică orice dreaptă pe o dreaptă paralelă cu ea, orice semidreaptă pe o semidreaptă coorientată, orice plan pe un plan paralel cu el;
 - c) compunerea a două translații este o translație.
8. Există oare o translație care aplică unul dintre cele două plane date pe celălalt, dacă aceste plane: a) se intersecțează; b) sunt paralele?
9. Să se arate că dacă laturile unui unghi sunt coorientate cu laturile unui alt unghi, atunci aceste unghiuri sunt congruente.
10. Să se arate că $S_B \circ S_A = t_{AA_1}$, unde $A_1 = S_B(A)$.
11. Să se demonstreze: compunerea a două simetrii față de două plane paralele este o translație în direcție perpendiculară pe aceste plane de la primul plan spre al doilea la distanța egală cu dublul distanței dintre aceste plane.
12. Să se demonstreze că orice translație este compoziția a două simetrii față de plane. Cum se construiesc astfel de plane?
13. Să se demonstreze: compoziția a două simetrii axiale cu axele paralele este o translație. Cum se determină această translație?



§6 Transformarea de asemănare. Omotetia

Definiție. Fie k un număr real pozitiv. Se numește **transformare de asemănare de coeficient k** (sau **asemănare de coeficient k**) a spațiului aplicația spațiului în el însuși care pentru orice două puncte A, B și imaginile lor respective A', B' satisfac condiția $A'B' = kAB$.



Observăm că orice izometrie este o asemănare de coeficient $k=1$.

Din egalitatea $A'B' = kAB$ rezultă că dacă $A \neq B$, atunci $A' \neq B'$, adică asemănarea spațiului este o aplicație bijectivă a spațiului.

Teoremă. 1) Compunerea a două asemănări de coeficienți k_1 și k_2 este o asemănare de coeficient k_1k_2 .
 2) Transformarea inversă asemănării de coeficient k este o asemănare de coeficient $\frac{1}{k}$.

Demonstrație

1) Admitem că punctele arbitrar A, B se aplică, prin asemănarea de coeficient k_1 , pe punctele A' și respectiv B' , iar acestea, la rîndul lor, prin asemănarea de coeficient k_2 , se aplică pe A'' , respectiv B'' . Atunci $A'B' = k_1 AB$ și $A''B'' = k_2 A'B'$. De aici obținem $A''B'' = k_1 \cdot k_2 AB$, adică transformarea care aplică punctele A, B respectiv pe A'', B'' este o asemănare de coeficient $k_1 k_2$.

2) La asemănarea de coeficient k , pentru punctele arbitrar A și B ale spațiului și pentru imaginile respective A' și B' are loc egalitatea $A'B' = kAB$. De aici obținem că $AB = \frac{1}{k} A'B'$, adică transformarea care aplică punctele A', B' pe punctele A și respectiv B este o asemănare de coeficient $\frac{1}{k}$. ►

Două figuri se numesc **asemenea** dacă există o transformare de asemănare a spațiului care aplică una dintre aceste figuri pe cealaltă. Congruența figurilor este un caz particular al asemănării ($k = 1$).

Definiție. Fie O un punct al spațiului și k un număr real nenul. Se numește **omotetie de centru O și de coeficient k** aplicația spațiului în el însuși care satisface condițiile:

1. Punctul O se aplică pe el însuși.
2. Dacă $M \neq O$ și M' este imaginea lui M , atunci punctele O, M și M' sunt coliniare. Punctul O este exterior segmentului MM' pentru $k > 0$ și interior acestui segment pentru $k < 0$.
3. Pentru orice punct M al spațiului și imaginea sa M' are loc egalitatea $OM' = |k| OM$ (fig. 10.14).

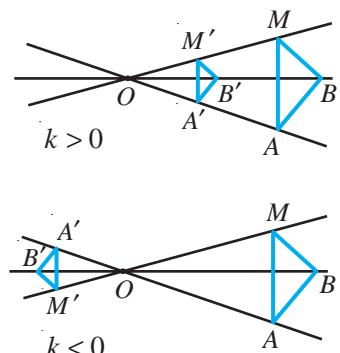


Fig. 10.14

Două figuri se numesc **figuri omotetice** dacă există o omotetie a spațiului care aplică una dintre aceste figuri pe celălaltă.

Omotetia este un caz particular al asemănării.

Problemă rezolvată

✳️ Fie cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 10.15). Să se construiască o secțiune a cubului cu un plan care este un hexagon regulat.

Rezolvare:

Planul determinat de punctele A_1, D și B taie trei fețe ale cubului după diagonalele A_1D , DB și respectiv BA_1 . Triunghiul A_1DB este echilateral. Considerăm omotetia de centru A și coeficient $k = \frac{3}{2}$. La această omotetie, imaginea planului A_1DB este planul $A_2D_2B_2$, care taie cubul după hexagonul regulat $MNPQRS$. Punctele M, N, P, Q, R, S sunt respectiv mijloacele muchiilor $DC, CB, BB_1, A_1B_1, A_1D_1, D_1D$.

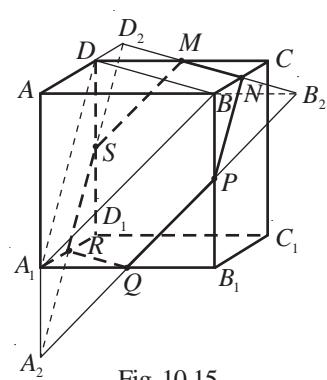
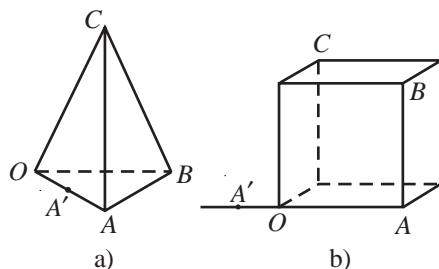


Fig. 10.15

Probleme propuse

B

- Să se dea exemple de asemănare din diverse domenii.
- Să se decidă dacă o sferă este asemenea cu un cub.
- Sînt oare asemenea un cub și fotografia sa?
- Cîte puncte invariante are o omotetie de coeficient $k \neq 1$? Dar drepte invariante?
- Lungimea muchiei unui cub este de trei ori mai mare decît lungimea muchiei altui cub. Pentru vopsirea fețelor cubului mai mic s-a folosit o cutie de vopsea. Cîte cutii de vopsea sînt necesare pentru a vopsi cubul mai mare?
- La omotetia de centru O , punctul A' este imaginea punctului A . Să se găsească imaginile punctelor B și C (cercetați cazurile a) și b) din figura alăturată).
- Trei drepte care trec printr-un punct O intersectează planele paralele α și β în punctele A, B, C și respectiv A_1, B_1, C_1 . Să se demonstreze că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt omotetice.
- Să se demonstreze că, în urma transformării de asemănare, intersecția și reuniunea a două figuri se aplică respectiv pe intersecția și reuniunea imaginilor lor.
- Considerăm o transformare de asemănare. Ce figură reprezintă imaginea:
 - cercului;
 - discului;
 - paralelogramului;
 - pătratului;
 - cubului;
 - sferei?

**§7**

Rotația în jurul unei drepte (rotația axială)



Definiție. Se numește **rotație de axă l și unghi de măsură φ** (sau **rotație în jurul dreptei l cu un unghi φ**) aplicația spațiului în el însuși la care fiecare punct al dreptei l se aplică pe el însuși, iar fiecare punct A ce nu aparține dreptei l se aplică pe punctul A' , astfel încît A și A' aparțin unui plan α perpendicular pe l , $A_0A = A_0A'$ și $m(\angle AA_0A') = \varphi$, unde $\{A_0\} = \alpha \cap l$.

Se notează: R_l^φ .

Se consideră că direcția rotației (în planul α) de la punctul A la punctul A' este aceeași pentru toate punctele A dacă privim într-un sens al dreptei l (fig. 10.16).

Dreapta l se numește **axă de rotație**, iar unghiul φ – **unghi de rotație**.

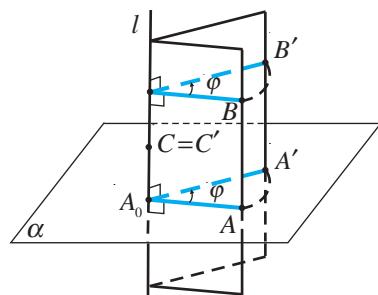


Fig. 10.16

Dacă $R_l^\varphi(F) = F$, atunci dreapta l este o axă de rotație a figurii F . Se poate arăta că rotația axială este o izometrie.

Definiție. O figură se numește **figură de rotație** dacă există o dreaptă, astfel încât orice rotație în jurul acestei drepte aplică figura pe ea însăși. O astfel de dreaptă se numește **axă a figurii**.

De exemplu, cercul, discul, sfera, cilindrul, conul sunt figuri de rotație.

Problemă rezolvată

✳ Să se determine câte axe de rotație are cubul.

Rezolvare:

Fie cubul $K = ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 10.17).

Dacă M este centrul feței $ABCD$ și N – centrul feței $A_1B_1C_1D_1$, atunci $R_{MN}^{90^\circ}(K) = R_{MN}^{180^\circ}(K) = R_{MN}^{270^\circ}(K) = R_{MN}^{360^\circ}(K) = K$. Deci, MN este axă de rotație a cubului. Cubul mai are două axe de rotație de acest tip.

Dreapta AC_1 este axă de rotație a cubului, unghiurile de rotație fiind de 120° , 240° și 360° .

Astfel de axe mai sunt DB_1 , CA_1 , DD_1 .

Cubul mai are șase axe de rotație cu unghiurile de 180° și 360° . Acestea sunt dreptele determinate de mijloacele muchiilor opuse ale cubului.

Așadar, cubul are 13 axe de rotație.

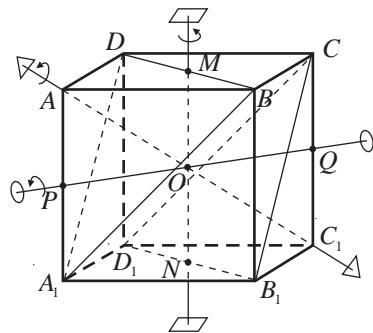


Fig. 10.17

Probleme propuse

B

- Să se arate că dacă o izometrie are cel puțin două puncte invariante distincte A și B , dar nu are puncte invariante ce nu aparțin dreptei AB , atunci această izometrie este o rotație de axă AB .
- Fie A și B două puncte distincte. Să se indice o rotație axială care aplică punctul A pe punctul B . *Ce figură formează axele tuturor rotațiilor de acest fel?
- Câte axe de rotație poate avea:
 - o sferă;
 - o sferă fără un punct;
 - o sferă fără două puncte;
 - o sferă fără trei puncte.
- Să se demonstreze că rotația în jurul unei axe este o izometrie.
- Să se arate că simetria axială este o rotație în jurul unei axe.
- Să se arate că orice dreaptă a perpendiculară pe axa de rotație se aplică la această rotație pe dreapta a' situată cu dreapta a în același plan și că unghiul format de a și a' este egal cu unghiul de rotație.
- Fie dreapta l și punctele distincte A și B , astfel încât dreptele l și AB sunt necoplanare. Să se determine pe dreapta l un punct M , astfel încât $AM + MB$ să fie minimă.

Probleme recapitulative

A

- Fie două drepte d_1, d_2 și două puncte A, C . Să se determine punctele B, D ($B \in d_1, D \in d_2$), astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram. Discuții.
- Se dau dreapta d , cercul \mathcal{C} și punctele A, C . Să se determine punctele B și D ($B \in d, D \in \mathcal{C}$), astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram. Discuții.
- Să se arate că dacă mediana BM a triunghiului ABC este și înălțime, atunci ΔABC este isoscel.
- Cerculile \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 au un punct comun M . Să se construiască o dreaptă d ce trece prin punctul M , astfel încât coardele formate de aceste cercuri pe dreapta d să fie congruente.

B

- Pe latura AB a triunghiului ascuțitunghic ABC este dat un punct fix P , iar pe laturile AC și BC – punctele mobile X și respectiv Y . Să se determine punctele X_1 și Y_1 , astfel încât perimetrul triunghiului PX_1Y_1 să fie minim.
- Pe o masă de biliard sînt două bile: una albă A și alta neagră N . Să se determine punctele de impact cu bordurile, astfel încît după impact bila albă să lovească bila neagră.
- Să se afle vîrful C al triunghiului ABC , dacă se dau vîrfurile lui A, B și dreapta suport d a bisectoarei unghiului C .
- Fie două drepte concurente d_1 și d_2 și un vector \bar{a} , care nu este coliniar cu aceste drepte. Să se determine un punct $M_1 \in d_1$ și un punct $M_2 \in d_2$, astfel încît $\overrightarrow{M_1 M_2} = \bar{a}$.
- Fie dreptele concurente d_1, d_2 și două puncte distințe A, B ce nu aparțin acestor drepte. Să se construiască paralelogramul ABB_1A_1 , astfel încît $A_1 \in d_1, B_1 \in d_2$.



Probă de evaluare

A

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

1. Indicați planele de simetrie ale figurii formate din reuniunea a două plane secante. ①
2. Indicați axele de simetrie ale figurii formate din reuniunea a două drepte paralele. ①
3. Stabiliți câte centre, axe și plane de simetrie are un cub. ②
4. Stabiliți câte centre, axe și plane de simetrie are un tetraedru regulat. ③
5. Determinați literele majuscule de tipar ale alfabetului latin care admit centru de simetrie și literele care admit axe de simetrie. ③

B

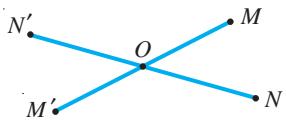
Timp efectiv de lucru:
45 de minute

1. Arătați că reuniunea a două drepte necoplanare este o figură care are trei axe de simetrie. ①
2. Arătați că orice izometrie a spațiului aplică două plane secante pe două plane secante. ①
3. Arătați că planul determinat de secțiunea diagonală a cubului este un plan de simetrie al acestuia. ②
4. Determinați care dintre următoarele figuri sunt asemenea:
 - a) două cuburi;
 - b) două tetraedre regulate;
 - c) două sfere;
 - d) doi cilindri;
 - e) două paralelipipede.
 ③
5. În planul înzestrat cu sistemul cartezian rectangular de coordonate xOy sunt reprezentate punctele $A(2, 1)$, $B(-1, 4)$, $C(-3, -1)$, $D(0, -4)$. Determinați coordonatele simetricelor acestor puncte față de:
 - a) originea O ;
 - b) punctul A ;
 - c) axele de coordonate;
 - d) dreapta AB .
 ③

Transformări geometrice ale spațiului

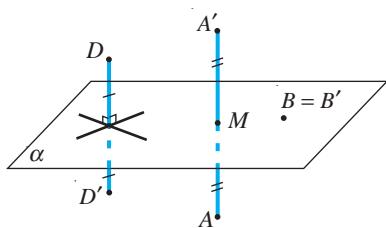


Simetria centrală: S_o



1. $S_o(O) = O$;
2. $\forall M \neq O, S_o(M) = M'$, astfel încât O este mijlocul segmentului MM' .

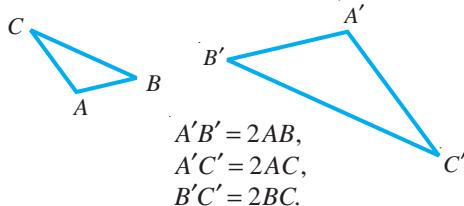
Simetria față de un plan: S_d



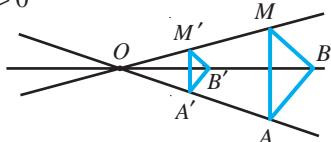
1. $\forall B \in \alpha, S_d(B) = B$;
2. $\forall A \notin \alpha, S_d(A) = A'$, astfel încât $AA' \perp d$ și punctul $M = AA' \cap d$ este mijlocul segmentului AA' .

Asemănarea de coeficient k , $k > 0$

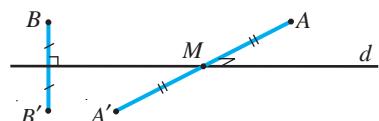
Pentru orice puncte A, B ale spațiului și imaginile lor A', B' are loc egalitatea $A'B' = k \cdot AB$.



$$k > 0$$

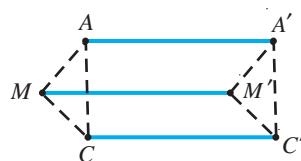


Simetria axială: S_d



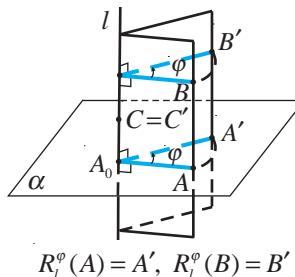
1. $\forall M \in d, S_d(M) = M$;
2. $\forall A \notin d, S_d(A) = A'$, astfel încât $AA' \perp d$, și dacă $AA' \cap d = \{M\}$, atunci M este mijlocul lui $[AA']$.

Translația determinată de perechea ordonată (A, A') de puncte distințe: $t_{AA'}$

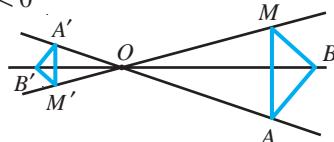


$\forall M \notin (AA'), t_{AA'}(M) = M'$, astfel încât $AA'M'M$ este paralelogram.
 $t_{AA'}(C) = C'$

Rotația în jurul dreptei l cu un unghi φ : R_l^φ



$$k < 0$$



Răspunsuri și indicații

Modulul 1. §1. A. 2. De exemplu, $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n}$. 3. a) $\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, 1, \frac{9}{8}, \frac{11}{9}$; b) crescător.

§1. B. 6. $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{9}, \frac{9}{12}, \frac{9}{15}$. 8. De exemplu, a) $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = (-1)^{2n-1} \cdot n$; b) $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = n+2$.

9. a) Crescător, mărginit; b) crescător, mărginit; c) descrescător, mărginit; d) nici descrescător, nici crescător, mărginit; e) descrescător, mărginit. 10. a) $\frac{11}{10}, \left(\frac{11}{10}\right)^2, \left(\frac{11}{10}\right)^3, \left(\frac{11}{10}\right)^4, \left(\frac{11}{10}\right)^5$; b) crescător, mărginit inferior. 12. a) $x_n = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$; b) strict crescător; c) $1 \leq x_n < \frac{3}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

13. a) $x_n = 3 \cdot 5^{n-1}$; b) strict crescător. 14. a) $x_n = 1 - 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$; b) strict crescător, mărginit superior. 15. a) $x_n = 5n - 15$, $n \in \mathbb{N}^*$, crescător, mărginit inferior; b) $x_n = 4 \cdot 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, crescător, mărginit inferior. 16. a) $x_n = a + \beta(n-1)$, $n \in \mathbb{N}^*$; b) $x_n = a \cdot \alpha^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$; c) prin calcul direct sau prin inducție se obține $x_n = a \cdot \alpha^{n-1} + \beta(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-2})$, $n \in \mathbb{N}^*$. 17. $x_n = 5n - 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

§2. A. 1. a) $x_n = 3(-1)^{n-1}$; b) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; c) $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; d) $x_n = (2n-1)^2$. 2. a) 7, 9, 11, 13; b) -3, 2, 7, 12; c) 1, 3; 1, 6; 1, 9; 2, 2; d) $\frac{2}{7}, \frac{1}{5}, \frac{4}{35}, \frac{1}{35}$. 3. a) $a_1 = 23$; b) $a_1 = 597$.

4. a) -10, -5, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{4}$; b) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 5. 23 dm. 6. 1900 de locuri. 7. 4154,28 lei.

8. 1700 m. 9. 5760 lei. 10. 512 bacterii.

§2. B. 11. 484. 12. a) $a_n = \frac{n-13}{3}$, $S_{14} = -\frac{77}{3}$; b) $a_n = \frac{5n+16}{35}$, $S_{25} = \frac{405}{7}$. 14. a) $b_n = 9 \cdot 2^{n-1}$; b) $b_n = 10 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$. 15. a) $b_1 = \frac{768}{125}$; $q = -\frac{5}{4}$; b) $b_1 = \frac{1}{2}$; $q = -\frac{1}{2}$. 16. $S_9 = 40^8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5$. 17. Indicație.

Numerele x, y, z rezultă din sistemul $xz = y^2$, $x+z = 2(y+a)$, $x(z+b) = (y+a)^2$. 18. $\frac{47 \pm \sqrt{1993}}{4}$.

19. a) $b_1 = 0,3$; b) $b_1 = -\frac{1}{21}$. 20. $S = \{55\}$. 21. Mai mică decât 2. 22. De exemplu, $180 = 12 + 24 + 48 + 96$; $180 = \frac{9}{2} + \frac{27}{2} + \frac{81}{2} + \frac{243}{2}$.

§3. B. 6. a) 0; b) 0; c) 0; d) $\frac{1}{3}$; e) 0; f) 0; g) 0; h) 1; i) $\frac{8}{3}$; j) e^{-4} ; k) -1; l) $\frac{1}{2}$; m) e^{-2} ; n) 0.

Exerciții și probleme recapitulative. **A.** 1. a) $\frac{1}{3}, 1, \frac{7}{5}, \frac{5}{3}, \frac{13}{7}$; b) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$; c) $-6, \frac{15}{2}, -\frac{20}{3}, \frac{29}{4}, -\frac{34}{5}$. 2. a) $x_n = \frac{n}{n+1}$; b) $x_n = 2n$; c) $x_n = 3 \cdot (-1)^{n-1}$; d) $x_n = \frac{1}{3^n}$.

3. De exemplu, a) 22, 24, 26, 28, 30; b) 1, -1, 1, -1, ...; c) $x_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 1$. 4. Nu este monoton.

5. a) $a_n = -4n + 2$; b) $a_n = 2n - 1$; c) $a_n = 5n - 15$; d) $a_n = 7n - 4$. 6. a) -24550; b) 4850.

7. a) $x = \frac{(a^2 - 1)^2}{2a(2-a)}$; b) $a = b$, $x \in \mathbb{R}$. 8. a) $b_n = 2 \cdot 6^{n-1}$; b) $b_n = -10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; c) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

9. a) $x_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, $q = 3$; b) $x_n = 2n + 2$, $r = 2$; c) $x_n = -4 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $q = \frac{1}{3}$; d) $x_n = 5n - 6$, $r = 5$.

10. a) $n = 10$, $S_n = 140$; b) $a_1 = 4$, $n = 8$ sau $a_1 = -2$, $n = 11$. 11. a) $q = 2$, $S_9 = 2555$;

- b) $b_1 = 3$, $S_8 = 765$. **12.** 5 ore. **13.** 313,6 m. **14.** $-1 \pm \sqrt{6}$. **15.** De exemplu, a) $x_{2k} = 1 + (-1)^{2k}$; b) $x_{2k-1} = \frac{2^{2k-1} + (-2)^{2k-1}}{2^{2k-1}}$; c) $x_{2k} = 2k \cdot \sin k\pi$; d) $x_{2k} = \cos 2k\pi$; e) $x_{3k} = \frac{6k + (-1)^{3k}}{6k}$.

- B.** **16.** 24 u.l. **19.** 243 l. **20.** 1224. **21.** $S_n = n[x^2 + (3-n)ax + a^2]$. **22.** a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $-\frac{2}{3}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{1}{2}$; g) e^{-1} ; h) e ; i) 0.

Probă de evaluare. **A.** **1.** a) $\frac{1}{3}, 1, \frac{7}{5}, \frac{5}{3}, \frac{13}{7}$; b) $0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0$. **2.** Strict descrescător.

3. $a_1 = 2$, $r = 3$ sau $a_1 = 14$, $r = -3$. **4.** $b_1 = 1$, $q = -3$. **5.** La etajul 6.

- B.** **1.** $5, -\frac{7}{2}, 3, -\frac{11}{4}, \frac{13}{5}$. **2.** $b_n = 4(-3)^{n-1}$. **3.** Strict descrescător. **5.** $a_1 = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{4}$. **6.** $b_1 = \frac{30}{7}$, $q = \frac{3}{4}$ sau $b_1 = -\frac{30}{7}$, $q = -\frac{3}{4}$. **7.** 9 inele.

Modulul 2. **§ 1.** **B.** **1. Indicație.** Arătați că $(2-r, 2+r) \cap E \neq \emptyset$, $\forall r > 0$. **2.** a) $-2, 2$;

b) $2, 4$; c) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1$. **3.** a) $x_n = 4 + \frac{1}{n}$; b) $x'_n = -1 + \frac{2}{2n+1}$, $x''_n = \frac{n}{n+1}$. **5.** a) 2; b) $\frac{3}{7}$; c) $-\frac{1}{2}$.

7. Indicație. Studiați $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$ pentru sirurile $(x'_n)_{n \geq 1}$, $x'_n \rightarrow x_0$, și $(x''_n)_{n \geq 1}$, $x''_n \rightarrow x_0$, care se determină din condiția ca funcția sinus sau funcția cosinus să ia, de exemplu, una dintre valorile 0, 1 sau -1 și aplicați observația 3 de la definiția Heine. **8.** a) $l_s(2) = 5$, $l_d(2) = 6$; b) $l_s(-1) = l_d(-1) = 1$; $l_s(1) = -\infty$, $l_d(1) = +\infty$. **9.** a) $l(0) = 1$, $\exists l(1)$; b) $l(0) = -2$, $l(2) = -4$.

10. a) $l_s(k\pi) = -1$, $l_d(k\pi) = 1 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow k\pi} f(x)$; b) $l_s(k) = k-1$, $l_d(k) = k \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow k} f(x)$.

11. a) $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; b) $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; c) $x_0 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.** a) $a=1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$; $a=-2$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$; b) $a=2$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$; $a=-3$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$. **13.** $a=1$.

§ 2. **B.** **1.** a) -1; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$; e) $+\infty$; f) $-\infty$. **2.** a) 4; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$; e) 55;

f) $-\frac{2}{5}$; g) 0; h) $+\infty$; i) -3. **3.** a) $\frac{1}{2}$; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) $e(e-1)^2$; e) $\frac{1}{2}e$; f) $+\infty$. **4.** a) $-\infty$; b) $-\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$; e) 2; f) $-\frac{1}{3}$. **5.** a) 1; b) 2; c) $(-1)^n$; d) $3 \cdot (-1)^{n+1}$.

7. Indicație. A se vedea indicația la exercițiul 7 din § 1. a) A; b) F; c) A. **8.** a) $f(\pm 0) = 0$, $f(1+0) = f(-1-0) = +\infty$, $f(1-0) = f(-1+0) = -\infty$; b) $f(1+0) = f(-1-0) = 0$, $f(1-0) = f(-1+0) = +\infty$; c) $f(-1-0) = 1$, $f(-1+0) = 0$. **9.** $m = -1$, $m = 2$. **10.** $m \in [-1, 3]$. **11.** a) 1; b) $-\infty$; c) 0; d) $-\infty$; e) $+\infty$; f) $-\infty$; g) $-\infty$; h) $-\infty$.

§ 3. **B.** **1.** a) 3; b) -3; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{2}$; e) -2; f) $\frac{3}{4}$; g) 4; h) $\frac{1}{2}$; i) $\frac{1}{16}$; j) 1; k) $\frac{1}{4}$; l) $\frac{1}{9}$; m) $\frac{3}{8}$; n) 3; o) $-\frac{2}{3}$; p) $\frac{4}{3}$; q) $\frac{5}{4}$; r) $e^{\frac{1}{2}}$; s) e^2 ; t) e^3 ; u) e^{-1} . **2.** a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{8}{3}$; c) $-\frac{5}{12}$; d) 2; e) 3; f) $-\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{2}$; h) 3; i) $\frac{1}{2}$; j) 2; k) $\frac{9}{2}$; l) $-\frac{2}{3}$; m) $\frac{1}{2}$; n) $-\frac{1}{3}$; o) -1; p) $-\frac{5}{6}$; q) $-\frac{1}{3}$; r) $-\frac{5}{2}$; s) $-\frac{9}{4}$; t) $\frac{5}{6}$; u) $\frac{3}{4}$. **3.** a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$. **4.** a) $m = -1$, $n = 4$; b) $n = 2 + \pi$, $m = -2$.

§ 4. **B.** **1.** 1) $\frac{12}{25}$; 2) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) -3; 5) 1; 6) 0; 7) $2 - \log_2 3$; 8) $\frac{3}{5}$; 9) $\frac{1}{2}$; 10) $-\infty$; 11) $\frac{5}{4}$; 12) $\frac{1}{5}$; 13) 3; 14) $-\frac{1}{2}$; 15) $\frac{1}{3}$; 16) -1; 17) -3; 18) 0; 19) e^{-2} ; 20) e^3 ; 21) $\sqrt{6}$; 22) e^5 ; 23) $\frac{2}{3}$; 24) 1;

- 25) $2^{n(n+1)}$; 26) $\frac{n(n-1)}{2}$; 27) C_{n+1}^2 ; 28) $\frac{3}{2}\ln 2$; 29) $-\frac{1}{4}$; 30) $-\frac{7}{2}$; 31) $\sqrt[3]{e}$; 32) $e^{10} \cdot \sqrt{e}$; 33) $\sqrt[3]{e}$; 34) $\sqrt[4]{e^3}$; 35) $\sqrt[3]{e^2}$. **2.** $a=1$, $b=-1$. **3.** $+\infty$, dacă $a+2b>0$; $-\infty$, dacă $a+2b<0$; $-\frac{3b}{4}$, dacă $a+2b=0$. **4.** $a=2$, $b=5$, $f(-1\pm 0)=\pm\infty$. **5.** $a=-3$, $b=-1$.

- Exerciții și probleme recapitulative.** **B.** **1.** a) $\frac{2}{5}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{7}{12}$; d) -3 ; e) -14 ; f) $-\infty$; g) $\frac{5}{28}$; h) -1 ; i) $\frac{1}{12}$; j) $-\frac{3}{4}$; k) $-\frac{3}{4}$; l) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; m) $\frac{2}{3}$; n) $-\frac{1}{4}$. **2.** a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{4}{3}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\log_{72} \frac{8}{9}$; f) $\frac{1}{3}$; g) 2; h) $\frac{2}{5}$; i) 3; j) 4; k) e^2 ; l) e^{-1} ; m) $e^{-\frac{3}{2}}$; n) $\frac{3}{5}$. **3.** a) $-\infty$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) $+\infty$; e) $+\infty$; f) 0. **4.** a) $a \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$; b) $a \in \{\pm 1, \pm 4\}$; c) $a=5$; d) $a=0$. **5.** a) $a=1$, $b=-2$; b) $a=-2$, $b=3$; c) $a=2$, $b=4$. **6.** a) $x=-1$, $x=3$; b) 600 m; c) 400 m; d) $5,7^\circ$; e) 200 m. **7.** a) 5200 m; b) 621 km 480 m; c) 10 m.

- Probă de evaluare.** **B.** **1.** C. **2.** C. **3.** a) $l_1 = 4$, $l_3 = 9$; b) $l = \frac{9}{4}$; c) $l_2 = \frac{1}{16}$; d) $S = (4, 5] \cup [8, 9)$. **4.** a) 1; b) $\frac{1}{2}$.

Modulul 3. **§1.** **B.** **2.** a), b), c) Continuă ca funcție elementară. **3.** a), b) Continuă pe $[a, b]$; c) continuă pe intervalele $[a, x_0)$ și $(x_0, b]$. **4.** a) Continuă pe intervalele $[-3, -2)$, $[-2, -1)$, $(-1, 2]$, $(2, 4]$ și $(4, 5]$; b) $f(-1) \cdot f(0) = 2 \cdot 1 = 2$, $f(2) \cdot f(4) = 1 \cdot 3 = 3$, $f(0) \cdot f(4,5) = 1 \cdot 2 = 2$.

5. a) *Indicație.* $\forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq |x-x_0| \Rightarrow \forall \varepsilon \geq 0 \exists \delta > 0$ ($\delta < \varepsilon$), astfel încât $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < \delta$; b), c) și d) similar cu a).

6. *Indicație.* Condiția $|f(x)-6| < \frac{1}{10}$ poate fi scrisă $|x^2 + x - 6| = |x-2||x+3| < \frac{1}{10}$. Cum $|x+3| \leq 7$ (deoarece $0 \leq x \leq 4$), condiția anterioară este respectată dacă $|x-2| < \frac{1}{70}$, adică pentru $\delta = \frac{1}{70}$. Funcția este continuă, însă aceasta nu rezultă din condițiile obținute. Verificați dacă $\forall \varepsilon > 0$ (și nu numai pentru $\varepsilon = \frac{1}{10}$) $\exists \delta > 0$, astfel încât $|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(2)| < \varepsilon$.

7. a), b) Continuă; c) discontinuă în $x_0 = 0$; d) discontinuă în $x_0 = 0$. **8.** $a=0$, $a=-\sqrt{2}$, $a=\sqrt{2}$. **9.** a) $x_0 = 1$; $f(1+0) - f(1-0) = -e$; b) $x_0 = -1$, $x_1 = 0$; $f(-1+0) - f(-1-0) = 2$, $f(+0) - f(-0) = 1$. **10.** a) Continuă în punctele $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; b) continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_0 = 0$ – punct de discontinuitate de speță a doua. **11.** a) Continuă; b) discontinuă în punctele $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. **12.** a) $a+be=2$, $a, b \in \mathbb{R}$; b) $a=-1$.

§2. **B.** **1.** a) Discontinuă în $x_0 = 1$; b) discontinuă în $x_0 = 1$; c) discontinuă în $x_0 = \frac{\pi}{4}$; d) discontinuă în punctele $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$. **2.** $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists x_\delta$, astfel încât $|x_\delta - x_0| < \delta$ și $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$.

3. *Indicație.* $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0 = f(0)$. Deci, f este continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **4.** a) $a=2$, $b=-1$; b) nu există. **5.** a) 2) $f \circ g$ continuă, $g \circ f$ discontinuă în $x_0 = 0$; b) 2) $f \circ g$ discontinuă în punctele $0, -1, 1$, $g \circ f$ continuă; c) 2) $f \circ g$ discontinuă în punctele $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $g \circ f$

discontinuă în $x_0 = 0$; d) 2) $f \circ g$ discontinuă în $x_0 = -1$, $g \circ f$ discontinuă în $x_0 = 1$.

6. a) $(f \circ g)(x) = (x+1)^2$ și $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$ continue; b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x-2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ discontinuă în $x_0 = 1$, $(g \circ f)(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x-2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ discontinuă în $x_0 = 0$; c) $f \circ g$ discontinuă în punctele $x_n = \ln n$, $n \in \mathbb{N}^*$; $g \circ f$ discontinuă în punctele $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$; d) $f \circ g$ discontinuă în punctele $x_m = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, și $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $g \circ f$ discontinuă în punctele $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$; e) $f \circ g$ discontinuă în punctele $x_0 = 0$ și $x_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $g \circ f$ discontinuă în punctele $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$; f) $f \circ g$ discontinuă în punctele $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$; $g \circ f$ discontinuă în punctele $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$. **7.** a) $a = 1$; b) $a = 1$; c) $a = 0$; d) $a = \frac{3}{2}$; e) $\forall a \in \mathbb{R}$. **8.** De exemplu, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, $g(x) = -f(x)$.

9. De exemplu, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$.

§ 3. B. 1. Indicație. $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{\pm}(x) = f_{\pm}(x_0)$, $\forall x_0 \in I$. **2. Indicație.** Fie (a, b) interval finit.

$\tilde{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } a < x < b \\ \alpha, & \text{dacă } x = a \\ \beta, & \text{dacă } x = b, \end{cases}$ este o funcție continuă pe $[a, b]$, deci și mărginită:

$m \leq (\tilde{f}(x)) \leq M$, $\forall x \in [a, b] \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in (a, b)$. Dacă $(a, b) = (a, +\infty)$ ($a \neq -\infty$), atunci $\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > a$, astfel încât $\beta - \varepsilon < f(x) < \beta + \varepsilon$, $\forall x \geq \Delta$. Pe intervalul (a, Δ) funcția f este mărginită: $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in (a, \Delta) \Rightarrow \min(\beta - \varepsilon, m) \leq f(x) \leq \max(\beta + \varepsilon, M)$, $\forall x \in (a, +\infty)$.

Similar pentru intervalele $(-\infty, b)$ și $(-\infty, +\infty)$. **4.** $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-a)(b-x)}$.

$$\begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ -4x+3, & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 0, & \text{dacă } x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right); \end{cases}$$

7. De exemplu: a) $f: (0, 1) \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ -2x+2, & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$ b) $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = x$;

c) $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ -2x+2, & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$ **8.** a) *Indicație.* Fie $\alpha = -1$, $\beta = 0$. Atunci

$f(-1) = -1$ și $f(0) = 1$, și funcția f nu ia pe $(-1, 0)$ valori din intervalul $(0, 1)$; b) avem $f(0,5) = -0,5$ și $f(1) = 0$, iar funcția f nu ia pe $(0,5; 1)$ valori din intervalul $(-0,5; 0)$; c) funcția f ia numai valori întregi. **9.** a) $x \in (e^{-4}, 3)$; b) $x \in (-\infty, -4)$; c) $x \in \left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, 1\right) \cup (10^{10}, +\infty)$. **10.** a) $f > 0$ pe $(-\infty, 0) \cup (a, b) \cup (c, +\infty)$ și $f < 0$ pe $(0, a) \cup (b, c)$; b) $f > 0$ pe $(1, +\infty)$ și $f < 0$ pe $(-\infty, -4) \cup (-4, 1)$. **11.** Teorema despre anularea funcției nu poate fi aplicată.

Exerciții și probleme recapitulative. **B.** **1.** $\alpha = -1$. **2.** a) $x=1$ – punct de discontinuitate de speță I; b) $x=1$ – punct de discontinuitate de speță II; c) $x=-1$ – punct de discontinuitate de speță I; d) $f(x)$ este continuă pe \mathbb{R} . **3.** $a=\frac{1}{2}$, $b=1$. **5.** a) $x=0$ este punct de discontinuitate pentru funcția f , g este continuă; b) $(f \circ g)(x)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } x=1 \\ 1, & \text{dacă } x \neq 1 \end{cases}$, $(g \circ f)(x)=\begin{cases} 4, & \text{dacă } x<0 \\ 1, & \text{dacă } x=0 \\ 1, & \text{dacă } x>0 \end{cases}$; c) $f \circ g$ este discontinuă în $x=1$; $g \circ f$ este discontinuă în $x=0$. **6.** a), b), d) Mărginile; c) nemărginită. **9.** a) $S=(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$; b) $S=(1, 4)$; c) $S=\left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup (1, +\infty)$.

Probă de evaluare. **B.** **1.** a) Poate avea loc (*Indicație*. Aplicați teorema lui Weierstrass.); b) nu poate avea loc; c), d), e), f) pot avea loc (*Indicație*. Construiți exemple.) **2.** a) Continuă; b) $x_0=1$ este punct de discontinuitate de speță înțâi. **3.** a) Mărginită; b) nemărginită. **4.** $a \in \{0,5; 1\}$.

Modulul 4. **§1. A.** **1.** a) $\Delta x=1,5$, $\Delta f=3,75$; c) $\Delta x=-0,5-\sqrt{3}$, $\Delta f=2,75$; d) $\Delta x=-4,7$, $\Delta f=17,39$. **2.** c) $f'(x)=6x^2$; d) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$. **3.** a) $f'(-1)=f'(0)=f'(0,5)=f'(10)=0,5$. **4.** a) $y=-x+4$, unghi obtuz; $y=\sqrt{3}x+(3-\sqrt{3})$, unghi ascuțit; b) $y=x+2$, unghi ascuțit; $y=-\sqrt{3}x+(3+\sqrt{3})$, unghi obtuz; c) $y=0$, unghi nul; $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{9-\sqrt{3}}{3}$, unghi ascuțit.

§1. B. **5.** b) f nu este derivabilă în punctele $x_0=-2$ și $x_1=2$. **7.** a) f nu este derivabilă în $x_0=0$; b) f este derivabilă în $x_0=0$. **8.** a) $m \in \mathbb{Z}$, $m>1$; b) $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. **9.** $n=0$, $m=\frac{2}{e}$. *Indicație*. Pentru a determina parametrii m și n , puneți condițiile de continuitate și de derivabilitate ale funcției în punctul $x_0=e$.

§2. A. **1.** a) f este derivabilă în x_0 și x_1 ; b) f este derivabilă în x_1 și nu este derivabilă în x_0 ; c) f este derivabilă în x_1 și nu este derivabilă în x_0 și x_2 . **3.** a) $y=3x-2$; b) $y=-1$; c) $y=4x+6$. **4.** a) 0° ; b) 60° .

§2. B. **6.** a) f nu este derivabilă în $x_0=-3$ și $x_1=3$; b) f nu este derivabilă în $x_0=10$. **7.** a) 1) $y=x+0,75$; 2) $y=6x-3$; 3) $y=-8x-24$; b) 1) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{(4-\pi)\sqrt{2}}{8}$; 2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$; 3) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi\sqrt{3}-6}{12}$. **8.** a) 1) Funcțiile f , g , h sunt continue pe \mathbb{R} ; 2) f este derivabilă pe multimea $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; g este derivabilă pe multimea $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; h este derivabilă pe multimea $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. **9.** a) 1) $y=3x$, $\alpha=\operatorname{arctg}3$; 2) $y=x+1$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$; b) 1) $y=-\frac{1}{3}x-1$, $\alpha=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; 2) $y=-2x+6$, $\alpha=-\operatorname{arctg}2$. **10.** b) $=4$, c) $=1$.

§3. A. **1.** a) $f'(x)=8x^7$, $D_{f'}=\mathbb{R}$; b) $f'(x)=-7x^{-8}$, $D_{f'}=\mathbb{R}_+^*$; c) $f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $D_{f'}=\mathbb{R}_+^*$; d) $f'(x)=3^x \ln 3$, $D_{f'}=\mathbb{R}$; e) $f'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2}$, $D_{f'}=\mathbb{R}$; f) $f'(x)=\frac{1}{x \ln 3}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$; g) $f'(x)=-\frac{1}{x \ln 3}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$; h) $f'(x)=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$. **2.** a) $\frac{1}{7 \ln 7}$; b) $\frac{10}{\ln 10}$; c) 120; d) $\frac{1}{14}$; e) $32 \ln 2$; f) 0. **3.** a) $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$; b) $y=x \ln 2+1$; c) $y=x \log_8 \sqrt{e} + \log_8 \frac{2}{e}$; d) $y=5x+4$.

§3. B. **4.** a) $f'(x)=1,5\sqrt{x}$, $D_{f'}=\mathbb{R}_+$; b) $f'(x)=3,4x^2$, $D_{f'}=\mathbb{R}$. **5.** a) $f'(x)=\frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$;

b) $f'_d(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0; f'_s(x) = \frac{1}{-2\sqrt{-x}}, x < 0; D_{f'} = \mathbb{R}^*$; c) $f'(x) = \frac{1}{x^2 \ln 0,4}, D_{f'} = \mathbb{R}^*$;

d) $f'_d(x) = 2^x \ln 2, x > 0; f'_s(x) = 2^{-x} \ln 2, x < 0; D_{f'} = \mathbb{R}$. 6. a) $f'_d\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, f'_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

b) $f'_d(0) = 2, f'_s(0) = -2$; c) $f'_d(0) = 3, f'_s(0) = -2$. 7. a) $y = -42x - 63$; b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$;

c) $y = \frac{3x}{27 \ln 27} + \frac{\ln 9 - 1}{\ln 3}$; d) $y = 2,5x \ln 2,5 + 2,5(1 - \ln 2,5)$. 8. $m = 1, n = 0$.

§ 4. A. 1. a) $f'(x) = 30x^5$; b) $f'(x) = \pi e^x$; c) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 9}$; d) $f'(x) = 3x^2 - 10x$;

e) $f'(x) = 14x - 3$; f) $f'(x) = \frac{2}{x \ln 5}$. 2. a) $D_f = \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}_+$;

b) $D_f = \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + 5x^4$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$; c) $f'(x) = e^x(1+x)$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$; d) $D_f = \mathbb{R}_+$,

$f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}$, $D_{f'} = \mathbb{R}_+$; e) $D_f = \mathbb{R}_+, f'(x) = -\frac{\log_3 x}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{x \ln 3}$, $D_{f'} = \mathbb{R}_+$; f) $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$,

$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; g) $D_f = \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 2)^2}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$; h) $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$;

i) $f'(x) = \frac{e^x(x-4)}{(x-3)^2}$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; j) $f'(x) = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}}$, $D_f = (-\infty; 0] \cup [0,5; +\infty)$,

$D_{f'} = (-\infty; 0) \cup (0,5; +\infty)$; k) $D_f = \mathbb{R}_+, f'(x) = -\frac{4}{x \ln 2}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$. 3. a) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; b) $\log_5 0,5 + \frac{2}{\ln 5}$.

4. a) $v(t) = -t^2 + 6t + 7$; b) 15 m/s; c) 7 s. 5. a) $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s; b) $v_1(t) = 12t + 4$, $a_1(t) = 12$;

$v_2(t) = 3t^2 + 6t + 6$, $a_2(t) = 6t + 6$; c) $v_1(1) = 16$ m/s, $v_1(2) = 26$ m/s, $a_1(1) = a_1(2) = 12$ m/s²;

$v_2(1) = 15$ m/s, $v_2(2) = 30$ m/s, $a_2(1) = 12$ m/s², $a_2(2) = 18$ m/s²; d) $v_1(t) = v_2(t)$ în momentele

$t_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ s și $t_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ s, $a_1(t) = a_2(t)$ în momentul $t = 1$ s.

§ 4. B. 6. a) $f'(x) = 25x^{24} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x$; b) $f'(x) = \cos x + \frac{1}{x \ln 0,3} - \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$;

c) $f'(x) = \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}x} + \frac{10}{x^3}$; d) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[6]{32x^5}} + 7e^x + \frac{3}{x^{10}}$; e) $f'(x) = -\sqrt{5} \sin x - 7 \cos x - \frac{4}{x}$;

f) $f'(x) = 5 \left(\frac{\sin x}{4\sqrt[4]{x^3}} + \sqrt[4]{x} \cos x \right)$; g) $f'(x) = 8x^2(3 \ln x + 1)$; h) $f'(x) = 3x^{-6}(\log_3 x - 0,2 \log_3 e)$;

i) $f'(x) = \frac{10x-15}{x^2-3x}$; j) $f'(x) = \frac{6\sqrt{2} \log_5 \operatorname{tg} x}{\sin 2x \ln 5}$; k) $f'(x) = 3 \cdot 6^{3x} \cdot \ln 6 \cdot \sin^2 4x + 4 \cdot 6^{3x} \cdot \sin 8x$;

l) $f'(x) = \frac{-6x^2 \cdot \ln x \cdot \sin(3x^2 - 1) - 2 \cdot \cos(3x^2 - 1)}{x \ln^3 x}$. 7. a) $y = \sqrt{3}x + \left(\frac{1}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \right)$; b) $y = 0$;

c) $y = \sqrt{3} \cdot x + 1 - \sqrt{3}$. 8. $a \in \mathbb{R}, b = 2, c = 1$. 9. De exemplu, a) $f(x) = 2x - \sin x + 2008$;

b) $f(x) = -e^{2x} - 100$. 10. a) $S = \{(-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$; b) $S = \{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

11. a) $S = (-\infty, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty)$; b) $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}, \frac{7\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \right)$. Indicație. Rezolvați

inecuația $\sin(6x - \pi) < \frac{1}{2}$. 12. a) $f''(x) = 12x - 10$; b) $f''(x) = -18 \sin 3x$; c) $f''(x) = 20e^{-2x}$;

d) $f''(x) = -\frac{3}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}$; e) $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$; f) $f''(x) = -\frac{x}{27\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^3}}$; g) $f''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3}$

i) $f''(x) = (\sqrt{x})^{x-1} \cdot \left[\left(\ln \sqrt{x} + \frac{x-1}{2x} \right)^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} \right]$. Indicație. Aplicați de două ori formula $(\ln x)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.

13. $-\frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{5}{x^2+1} + 3 \arctg x$. **15.** $70m$ N. **16.** 168. **17.** $n \cdot 2^{n-1}$. Indicație.

Derivați identitatea $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$ și substituiți $x=1$.

§ 5. B. **1.** a) $f(x_1) \approx -0,96$, $f(x_2) \approx -1,02$; b) $f(x_1) \approx 751,2$, $f(x_2) \approx 4,86$. **2.** a) $\approx 1,16$;

b) $\approx 0,972$; c) $\approx 6,0009$; d) $\approx 0,999$; e) $\approx 0,05$. **3.** a) $df(x) = (3x^2 + 2)dx$; b) $df(x) = \frac{dx}{(1-x)^2}$;

c) $df(x) = \cos(x+1)dx$; e) $df(x) = -2 \sin 2x dx$. **4.** a) $df(x) = (\log_2 x + \log_2 e)dx = \log_2(ex)dx$;

b) $df(x) = 2xe^{4x}(1+2x)dx$; c) $df(x) = \left[\operatorname{ctg}(x+5) - \frac{x}{\sin^2(x+5)} - \frac{1}{x} \right]dx$; d) $df(x) = \frac{9}{x}dx$.

5. a) $-\frac{2}{3}dx$; b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}dx$; c) $\frac{1}{\ln 4}dx$. **6.** a) $df(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 20x^3 + \frac{7}{x^8} \right)dx$;

b) $df(x) = \left(-2 \cdot e^{-x} \cdot \ln 3 - \frac{2x}{x^2-1} \right)dx$; c) $df(x) = \left(\frac{2 \sin x}{\cos^3 x} - \frac{2x-1}{5\sqrt[5]{(x^2-x)^4}} \right)dx$. **7.** a) $2\frac{1}{8}dx$; b) nu există; c) $\frac{1}{3}dx$; d) $28e^4dx$. **8.** a) $\approx 0,695$. Indicație. Calculați $\cos(45^\circ + 1^\circ)$. b) $\approx 1,05$. Indicație.

Calculați $\lg(10+1,2)$. c) $\approx 2,511$; d) $\approx 0,497$; e) $\approx 0,92$.

§ 6. A. **1.** a) x_0 ; b) x_0, x_2 ; c) x_2 ; d) x_2 ; e), f) în nici unul din punctele indicate. **2.** a) 1) $S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$; sănătate condițiile teoremei lui Fermat; b) 1) $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$; sănătate condițiile teoremei lui Fermat. **3.** a) Da; b) nu.

§ 6. B. **6.** a) $c=1$; b) funcția f nu este derivabilă în $x_0=2$; c) $c=0$; d) $c=\frac{\pi}{2}$. **7.** a) $a=7$, $b=-3$, $d=-1$; b) $c=-\frac{3}{14}$. **8.** Indicație. Aplicați corolarul teoremei lui Rolle. **9.** Indicație. Studiați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot 2^x - 2 \cdot x^{10} + 2$. **11.** a) $c=-0,5$; b) $c=\frac{3\sqrt{3}}{e}$; c) teorema lui Lagrange nu poate fi aplicată funcției f , deoarece ea nu este derivabilă pe $(0, 3)$; d) $c=\ln \frac{e^5-1}{5e}$.

13. $f'(x)=7$. Indicație. Aplicați corolarul 3 al teoremei lui Lagrange. **14.** a) 3; b) ∞ ; c) $-\frac{1}{3}$; d) 1; e) 0; f) 0; g) 1; h) 0. **15.** a) 0; b) 0; c) 0.

Exerciții și probleme recapitulative. **A.** **1.** **B.** **2.** **D.** **3.** a) A; b) $y=2x-1$; c) $S=\mathbb{R}^*$; e) $O(0, 0)$.

4. a) $S = \left\{ 0, 1\frac{1}{3} \right\}$; b) $S = \{e^{-1}\}$; c) $S = \{0\}$. **5.** $S = [0, +\infty)$. **6.** a) 4 s; b) 6 s.

B. **7.** a) $(\cos x)\sin(\sin x)dx$; b) $(-\sin x)\cos(\cos x)dx$; c) $\frac{1}{x \ln x}dx$. **8.** a) $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;

b) $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$; c) $S = \{0\}$. **9.** a) 1) $f_s'(0) = f_d'(0) = 0$; 2) $f_s'(3) = 0$, $f_d'(3) = 3$;

3) $f_s'(0) = 2$, $f_d'(0) = 0$. **11.** Indicație. Aplicați corolarele teoremei lui Rolle. **12.** Funcția f este continuă pe $[1, +\infty)$, dar nu este derivabilă în punctul $x_0 = 2$. **14.** $c = \frac{1}{2}$. **15.** a) Funcția f verifică

condițiile teoremei lui Rolle și $c = 2$; b) Funcția f verifică condițiile teoremei lui Rolle și $c = \frac{\pi}{2}$; c) Funcția f verifică condițiile teoremei lui Rolle și $c = \frac{12 \pm \sqrt{3}}{3}$. **16.** $\frac{2}{3}$.

Probă de evaluare. A. 1. a) $<$; b) $S = \left[\frac{1}{6}, +\infty \right)$; c) $S = \{-3, 0\}$. 2. a) \mathbb{R}_+^* ; b) F; c) $y = x + 1$.

3. a) $f'(x) = x \cdot 5^{3x} (2 + x \ln 125)$; b) $f'(x) = \frac{-x + 15}{2\sqrt{x-5}(x+5)^2}$. **4.** 1,5 s.

B. 1. a) A; b) $S = \left\{ (k+1) \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$; c) $y = 6x - (6\pi + 1)$. 2. a) \mathbb{R}_+^* ; b) $\frac{2 \log_{0,2} 6x}{x \ln 0,2} dx$;

c) $\frac{2(1 - \ln 0,2 \cdot \log_{0,2} 6x)}{x^2 \ln^2 0,2}$. 3. a) $S = \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} - 10 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;

b) $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{3} - 10 + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} - 10 + 2k\pi \right)$; $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{2\pi}{3} - 10 + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} - 10 + 2k\pi \right)$

4. $e^{-\frac{1}{2}}$. 5. a) $a = \ln 2$, $b = 0$, $d = 1$; b) $c = 0$. **6.** 1 s.

Modulul 5. § 1. A. 1. a) $(-\infty, -1] \nearrow, [-1, 1] \searrow, [1, +\infty] \nearrow$; $f(-1) = 2$ – maxim, $f(1) = -2$ – minim; b) $(-\infty, 0] \searrow, [0, +\infty] \nearrow$; $f(0) = 3$ – minim; c) $(-\infty, 1] \searrow, [1, +\infty] \nearrow$; $f(1) = -3$ – minim; d) $(-\infty, -2] \nearrow, [-2, 2] \searrow, [2, +\infty] \nearrow$; $f(-2) = 16$ – maxim; $f(2) = -16$ – minim; e) $\left(-\infty, -\frac{3}{2} \right] \nearrow, \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right] \searrow, \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right) \nearrow$; $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$ – maxim; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{27}{2}$ – minim; f) $\left(-\infty, \frac{1}{2} \right] \nearrow, \left[\frac{1}{2}, +\infty \right) \searrow$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$ – maxim.

2. a) $f(-2) = f(2) = -4$ – minime, $f(0) = 12$ – maxim; b) $f(1) = 4$ – minim; c) $f(-5) = 0$ – maxim, $f(1) = -324$ – minim; d) $f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$ – maxim, $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$ – minim; e) $f(1) = 0$ – minim, $f(-1) = 4$ – maxim; f) f este strict crescătoare.

3. a) $m = -7$, $M = 9$; b) $m = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $M = 120$.

§ 1. B. 5. a) $(-\infty, 1] \nearrow, (1, 3) \searrow, [3, +\infty] \nearrow$; b) $\left[0, \frac{1}{\sqrt{e}} \right] \searrow, \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty \right) \nearrow$; c) $(-\infty, 3] \searrow, [3, +\infty) \nearrow$;

d) $[0, +\infty) \searrow$; e) $(-\infty, -3] \searrow, [-3, -\sqrt{3}] \nearrow, [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \nearrow, [\sqrt{3}, 3] \nearrow, [3, +\infty) \searrow$; f) $(-\infty, -1] \nearrow, [1, +\infty) \nearrow$.

6. a) $a \in [1, +\infty)$; b) $a \in [-1, +\infty)$; c) $a \geq 1$. 7. a) $f(5) = -\frac{27}{4}$ – maxim; b) $f(2k\pi) = 1$,

$f(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$, $f(2k\pi + \frac{5}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, – maxime și $f(2k\pi + \pi) = -1$, $f\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$k \in \mathbb{Z}$, – minime, c) $f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1$ – maxim, $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$ – minim; d) $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{e^2}{3}$;

e) $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 4e^{-2}$ – maxime; $f(0) = 0$ – minim; f) $f(1) = 0$ – minim; $f(e^2) = 4e^{-2}$ – maxim; g) $f\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{9^{3\sqrt{6}}}{8}$ – maxim; $f(1) = 0$ – minim; h) $f(0) = 0$ – maxim; $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ – minim;

i) $f(-1) = e^{-1}$ – minim; $f(2) = 4\sqrt{e}$ – maxim. 8. a) $m = \min[f(-1), f(0), f(2)] = f(2) = -13$;

$M = \max[f(-1), f(0), f(2)] = f(0) = 3$; b) $m = \min[f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{5\pi}{6}\right)] = f(0) = f(\pi) = 1$,

$$M = \max[f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{5\pi}{6}\right), f(\pi)] = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}; \text{ c) } m = 2 - 2\ln 2, M = +\infty.$$

§ 2. B. 1. a) $y = x$; b) nu are asimptote; c) $x = 0, y = 3$. 2. a) $y = 0, x = 0$; b) $x = \pm 2$; c) $y = 0$ la $+\infty$, $x = 0$; d) $y = x$ la $+\infty$ și $-\infty$. 3. a) Concavă pe $(-\infty, -3)$ și convexă pe $(-3, +\infty)$; b) convexă pe $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ și concavă pe $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$; c) concavă pe intervalele $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, și convexă pe intervalele $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; d) concavă pe $(-\infty, 0)$ și convexă pe $(0, +\infty)$; e) convexă pe $(-\infty, 0)$ și concavă pe $(0, +\infty)$; f) concavă pe $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ și convexă pe $\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$; g) convexă pe intervalele $\left(e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}, e^{2k\pi+\frac{3\pi}{4}}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, și concavă pe intervalele $\left(e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}, e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. 4. Indicație. Determinați mai întâi punctele în care $f'' = 0$ și punctele în care f'' nu există sau este infinită, apoi discutați semnul lui f'' în vecinătatea punctelor găsite. 5. a) $y = 0, x = 0$; b) nu are asimptote; c) $x = 0, y = 1$; d) $x = -1, x = 0, x = 1, y = x$; e) $y = -1$ la $-\infty$ și $y = 1$ la $+\infty$; f) $y = 0$. 7. De exemplu, $f: \mathbb{R} \setminus \{k\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-[x]}$, $k \in \mathbb{Z}$.

§ 3. B. 3. c) $\mathcal{A}_{\max} = \frac{a^2}{2}$.

§ 4. A. 1. a) $v(0) = s'(0) = 12$ m/s. b) Peste 2 secunde. Distanța este de 16 m. 2. $R = r$, $P_{\max} = P(r) = \frac{E^2}{4r}$. 4. 4225 lei.

§ 4. B. 5. $v(t) = 3at^2 + b$; $a(t) = v'(t) = 6at$. 6. Indicație. $v(t) = 3t^2 - 12t$; $a(t) = 6t - 12$, $a(t) = 0 \Rightarrow t = 2$, $v_{\min} = v(2) = -12$. 7. Indicație. Beneficiul brut $B(x) = p(x) \cdot x - C(x)$. $x = 11$ unități, $B_{\max} = 479$ u.m.

Exerciții și probleme recapitulative. A. 1. a) $(-\infty, -4] \nearrow, [-4, 0] \searrow, [0, +\infty) \nearrow$; b) $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \nearrow, \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \searrow, \left[\frac{1}{3}, +\infty\right) \nearrow$. 2. a) $(-\infty, -1] \searrow, [-1, +\infty) \nearrow$; b) $(-\infty, 0] \nearrow, [0, 1] \searrow, [1, +\infty) \nearrow$; c) $(-\infty, -2] \searrow, \left[-2, -\frac{1}{2}\right] \nearrow, \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \nearrow$; d) $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right) \nearrow, \left[\frac{4}{5}, 2\right] \searrow, [2, +\infty) \nearrow$; e) $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \searrow, \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \nearrow, \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right) \searrow$; f) $(-\infty, 1] \searrow, [1, +\infty) \nearrow$. 3. a) $(-\infty, -1] \searrow, [-1, +\infty) \nearrow$; b) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \searrow, \left[-\frac{3}{2}, 0\right] \nearrow, \left[0, \frac{3}{2}\right] \searrow, \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \nearrow$; c) $(-\infty, -2] \nearrow, [-2, 2] \searrow, [2, +\infty) \nearrow$; d) $(-\infty, +\infty) \nearrow$; e) $(-\infty, -1] \nearrow, [-1, 1] \searrow, [1, +\infty) \nearrow$; f) $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \nearrow, \left[-\frac{2}{5}, 0\right] \searrow, [0, +\infty) \nearrow$. 4. a) $m = -3, M = 2$; b) $m = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}, M = 8$. 6. a) $a = 2$; b) $a = -\frac{3}{2}$. 7. $B_{\max} = B(39) = 4443$ lei.

B. 9. a) $(-\infty, -1] \searrow, [-1, +\infty) \nearrow$; b) $(-\infty, -1] \searrow, [-1, 1] \nearrow, [1, +\infty) \searrow$; c) $[0, e^{-\frac{1}{2}}] \searrow, [e^{-\frac{1}{2}}, +\infty) \nearrow$.

10. $m \in (-\infty, -1]$. 13. a) $m \in [0, 1]$; b) $m \in \emptyset$; c) $m \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$; d) $m = 1$. 14. a) Concavă pe $(-\infty, -1)$ și convexă pe $(-1, +\infty)$; b) concavă pe $(0, \pi)$ și convexă pe $(\pi, 2\pi)$; c) concavă pe $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ și convexă pe $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. 15. a) $x = 0$; b) $x = 0$; c), d) nu are puncte de inflexiune; e) $x = e$; f) $x = 0, x = 4$. 16. a) $x = 1$, $y = 1$ la $+\infty$ și $-\infty$; b) $x = -1, x = 1$,

y = 0 la $+\infty$ și $-\infty$; c) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}x$ la $+\infty$ și $-\infty$; d) $x = 0$, $y = 0$ la $+\infty$; e) $x = 0$, $y = 1$ la $+\infty$ și $-\infty$; f) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. **17.** a = 8, b = 2. **19.** $x = 26$, $B_{\max} = B(26) = 336$ lei.

Probă de evaluare. **A.** **1.** $(-\infty, 3] \setminus, [3, +\infty) \nearrow$. **3.** $B_{\max} = B(21) = 873$ lei.

B. **1.** $(-\infty, -1] \nearrow, [-1, 0] \searrow, [0, 1] \nearrow, [1, +\infty) \searrow$. **2.** $m = -\infty$, $M = 2\ln 2$. **4.** $V_{\max} = 1000$ u.m. și se realizează pentru impozitul de 50 u.m. pentru o unitate de produs.

Modulul 6. **§ 1.** **A.** **1.** a) $-1+2i$; b) $6-2i$; c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}-(1+\sqrt{3})i$; d) $-10-10i$; e) $6-\sqrt{3}-(3+\sqrt{2})i$; f) $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$; g) $\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$; h) $21-20i$; i) $2+2i$; j) $\frac{1}{2}i$; k) $-\frac{1}{4}i$; l) $\frac{44+5i}{318}$. **2.** a) $-i$; b) 1 ; c) 1 ; d) $-i$; e) -1 . **3.** a) $S = \left\{ \left(\frac{37}{11}, \frac{20}{11} \right) \right\}$; b) $S = \left\{ \left(-\frac{1}{7}, -\frac{2}{7} \right) \right\}$; c) $S = \left\{ \left(-\frac{7}{5}, -\frac{8}{5} \right) \right\}$; d) $S = \left\{ \left(-\frac{3+4\sqrt{3}}{3}, 8+\sqrt{3} \right) \right\}$. **4.** a) $S = \left\{ \frac{3-i\sqrt{15}}{4}, \frac{3+i\sqrt{15}}{4} \right\}$; b) $S = \left\{ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right\}$; c) $S = \left\{ \frac{-1-i\sqrt{15}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{15}}{2} \right\}$; d) $S = \left\{ \frac{-1-i\sqrt{4\sqrt{2}-1}}{2\sqrt{2}}, \frac{-1+i\sqrt{4\sqrt{2}-1}}{2\sqrt{2}} \right\}$; e) $S = \left\{ \frac{1-3i}{2}, \frac{1+3i}{2} \right\}$; f) $S = \left\{ \frac{-2-i\sqrt{31}}{5}, \frac{-2+i\sqrt{31}}{5} \right\}$; g) $S = \left\{ \frac{5-i\sqrt{127}}{4}, \frac{5+i\sqrt{127}}{4} \right\}$; h) $S = \{1-i, 1+i\}$; i) $S = \{-2-i, -2+i\}$. **5.** a) 4; b) $-52i$; c*) $76i$; d*) $117 - 44i$. **6.** a) $S = \{1+2i\}$; b) $S = \left\{ \frac{1}{5}(3-4i) \right\}$; c) $S = \left\{ -\frac{5}{3} + 5i \right\}$; d*) $S = \left\{ \frac{1}{2}(4-3i) \right\}$. **7*. a)** $S = \left\{ 1-i, -\frac{1}{3} \right\}$; b) $S = \left\{ z_1 = \frac{1}{2}((2+i)z_2 - i), z_2 \in \mathbb{C} \right\}$. **8.** a) $\{1 \pm i\}$; b) nu există; c) $\{3i\}$.

§ 1. B. **9.** a) 0; b) $\frac{1}{130}(19-3077i)$; c) $72(1+i)$; d) $\frac{1}{41}(-1+32i)$. **10.** a) $S = \{\pm i, \pm \sqrt{2}\}$; b) $S = \{\pm 2i, \pm \sqrt{3}\}$; c) $S = \{\pm i\sqrt{5}, \pm i\sqrt{7}\}$. **11.** a) $z^4 + 4$; b) $z^4 - 1$; c) $a^2 - ab + b^2$; d) $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ac)$. **14.** $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} + i\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$. **15.** $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

§ 2. B. **2.** a) $\{\pm(1-i)\}$; b) $\{\pm(2-3i)\}$; c) $\{\pm(7+i)\}$; d) $\{\pm(\sqrt{3}-i)\}$; e) $\{\pm(\sqrt{3}-i\sqrt{2})\}$; f) $\{\pm(\sqrt{2}+i\sqrt{3})\}$. **3.** a) $S = \{-1+i, -3-i\}$; b) $S = \{1+2i, -6i\}$; c) $S = \{i, -3+i\}$; d) $S = \left\{ -3+i, \frac{3-i}{2} \right\}$; e) $S = \{-1+i, 1-i\}$; f) $S = \{-7-i, 7+i\}$. **4.** $\{\pm(\beta - \alpha i)\}$. **5.** a) $5(\cos\pi + i\sin\pi)$; b) $3 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]$; c) $2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$; d) $2\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$; e) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; f) $4 \left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} \right)$; g) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$; h) $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$; i) $2^{-50}(\cos\pi + i\sin\pi)$. **6.** a) 1; b) $-64(1+i)$; c) $512(1-i\sqrt{3})$.

7. a) $\left\{ -i, \frac{\pm\sqrt{3}+i}{2} \right\}$; b) $\left\{ -3, \frac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) \right\}$; c) $\left\{ \pm\frac{1}{2}[(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)i], \pm\frac{1}{2}[(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i] \right\}$.

d) $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i) \right\}$; e) $\left\{ 2^{-\frac{1}{12}} \left(\cos \frac{1}{6} \left(\frac{-5\pi}{12} + 2k\pi \right) + i \sin \frac{1}{6} \left(\frac{-5\pi}{12} + 2k\pi \right) \right) \mid k = -2, 3 \right\}$.

8. a) i; b) $2-i, -2-i$.

§ 3. B. 1. a) $S = \left\{ \sqrt[12]{2} \left(\cos \frac{1}{72} (23\pi + 24k\pi) + i \sin \frac{1}{72} (23\pi + 24k\pi) \right) \mid k = -3, 2 \right\}$;

b) $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt[10]{2}} \left(\cos \frac{1}{60} (23\pi + 24k\pi) + i \sin \frac{1}{60} (23\pi + 24k\pi) \right) \mid k = -3, 1 \right\}$;

c) $S = \left\{ 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}\varepsilon, \sqrt[3]{6}\varepsilon^2 \mid \varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$; d) $S = \left\{ \pm 1, \pm i, \pm \frac{\sqrt[4]{8}}{2} (1 \pm i) \right\}$;

e) $S = \left\{ \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} \right) \mid k = -2, 2 \right\} \cup \left\{ \sqrt[5]{3} \left(\cos \frac{1}{5}(\pi + 2k\pi) + i \sin \frac{1}{5}(\pi + 2k\pi) \right) \mid k = -2, 2 \right\}$.

2. $S = \{0, -1, 1\}$. 4. $S = \left\{ \frac{\varepsilon_k + 1}{\varepsilon_k - 1} \mid \varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6}, k = -2, 3 \right\}$.

5. a) $S = \left\{ -i, i, \frac{-5-\sqrt{21}}{2}, \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \right\}$; b) $S = \left\{ 2 \pm \sqrt{3}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$; c) $S = \left\{ -1, \frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2} \right\}$.

Exerciții și probleme recapitulative. A. 1. a) $1-2i$; b) $2+2i$; c) $-10+10i$; d) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$; e) i ;

f) 1 ; g) i . 3. a) $S = \{\pm 3i\}$; b) $S = \{\pm 4 + 2i\}$. 4. 1. 5. a) $-4(\sqrt{3}-i)$; b) $-2-2i\sqrt{3}$. 6. a) $2+i$;

b) $\frac{127}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-\frac{11}{4}i$; d) $\frac{12}{13} + i\frac{5}{13}$. 7. $z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} + i$.

B. 8. –1. Indicație. Înmulțiți egalitatea cu $z-1$; se obține $z^4 = z$. 9. –64.

10. a) $S = \left\{ \frac{-3+\sqrt{21}}{2}i, \frac{3-\sqrt{21}}{2}i \right\}$; b) $S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} + i \right\}$; c) $S = \{1+i\}$; d) $S = \{0, \pm i\}$;

e) $S = \{1-i; 0.8-0.4i\}$. 11. a) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; b) $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

12. a) $\left\{ \sqrt[3]{4}(\cos \varphi_i + i \sin \varphi_i) \mid \varphi_i \in \left\{ \frac{2\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{14\pi}{9} \right\} \right\}$;

b) $\left\{ \sqrt[3]{\frac{3}{4}}(\cos \varphi_i + i \sin \varphi_i) \mid \varphi_i \in \left\{ \frac{7\pi}{18}, \frac{19\pi}{18}, \frac{31\pi}{18} \right\} \right\}$. 13. a) -2^6 ; b) -2^7 ; c) -2^5 . 14. $n=4k$, $k \in \mathbb{N}$.

15. Punctele M_1 și M_3 .

Probă de evaluare. A. 1. a) $\frac{5}{3} - \frac{17}{5}i$; b) $-\frac{16}{3} - \frac{109}{6}i$; c) $\frac{11}{50} - \frac{23}{50}i$. 2. $S = \left\{ \frac{2}{17}(4-i) \right\}$.

3. $S = \left\{ \left(1, \frac{1}{5} \right) \right\}$. 4. $S = \left\{ \frac{1-i\sqrt{6}}{7}, \frac{1+i\sqrt{6}}{7} \right\}$. 5. a) $2i$; b) C.

B. 1. a) $-\frac{11}{3} - \frac{8+\sqrt{3}}{2}i$; b) $93(1-i)$; c) $-\frac{23}{53} + \frac{1}{53}i$. 2. $S = \left\{ \frac{-\sqrt{7}-7i}{4}, \frac{-\sqrt{7}+7i}{4} \right\}$. 3. $x=2$, $y=3$.

5. $z_1 = -i$; $z_2 = -1-i$. 6. $2^4(1+i)$. 7. $S = \left\{ \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right), -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}i \right\}$. 8. $S = \{(i, 1+i)\}$.

- Modulul 7. § 1. A.**
1. a) $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -3 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3+i & i \\ 1+i & 2+2i \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & -2+i \\ 2i & -1+i \end{pmatrix}$;
 - e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ -3 & 6 & 3i \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2i & 0 & 14 \\ 4 & -2i & 6 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 6i & 0 & 2i \\ -2 & 4i & -1-2i \\ 10i & -2 & -6i \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 5i & 4 \\ -1+i & 5i \end{pmatrix}$;
 - j) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ i & 0 & 2 \\ 1 & -2 & i \end{pmatrix}$.
2. $x=2, y=1, z=-1, u=0$.
3. a) $AB = \begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 43 & 30 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 5 & 51 \end{pmatrix}$; b) AB nu există,
 - $BA = \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ -42 & 14 \\ -48 & 8 \end{pmatrix}$; c) $AB = \begin{pmatrix} -3 & 18 & 33 \\ 18 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 11 \\ 27 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; d) $AB = \begin{pmatrix} a+c & b+c & a+b+c \\ 2 & 2 & 3 \\ x+z & y+z & x+y+z \end{pmatrix}$,
 - $BA = \begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 1+x & 1+y & 1+z \\ a+1+x & b+1+y & c+1+z \end{pmatrix}$; e) $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}$, BA nu există; f) $AB = BA = A$.
4. a), b) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 46 & -10 \\ 32 & -8 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 13 & -21 \\ -21 & 34 \end{pmatrix}$.
5. a) $\begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -62 & -5 \end{pmatrix}$; b), e) nu există; c) $\begin{pmatrix} -46 & 39 & 96 \\ 9 & -69 & 144 \\ 27 & 27 & -63 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} a^2+bd+cg-1 & ab+bc+ch & ac+bf+ci \\ ad+ed+fg & bd+e^2+fh-1 & dc+ef+fi \\ ag+hd+ig & bg+eh+ih & cg+fh+i^2-1 \end{pmatrix}$
6. a) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$; b) nu există; c) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 12 & 22 \\ 18 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2-a & -b & 2-c \\ -1 & 1 & 1 \\ 2-x & 2-y & 2-z \end{pmatrix}$; e) nu există;
- f) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2-a & -b & -c \\ -d & 2-e & -f \\ -g & -h & 2-i \end{pmatrix}$.
8. $T_i = 1,1 \cdot T = \begin{pmatrix} 2,2 & 3,3 & 4,4 & 2,2 & 3,3 \\ 4,4 & 2,2 & 3,3 & 6,6 & 3,3 \\ 3,3 & 1,1 & 2,2 & 3,3 & 5,5 \end{pmatrix}$.
9. $M = M_1 + M_2 + M_3 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 13 & 11 & 11 \\ 19 & 11 & 9 & 5 & 12 \\ 12 & 13 & 9 & 17 & 8 \end{pmatrix}$.
- § 1. B. 10.**
- a) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 20 & -15 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 6 & -2-i & 2+3i \\ 1+i & i & 2-i \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3-3i & 9 & -3 \\ 0 & 3i & 9+3i \end{pmatrix}$;
 - e) $\begin{pmatrix} i & 0 & 3i \\ -3 & -1 & -1+4i \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} c_k & c_{k-1} \\ c_{k-1} & c_{k-2} \end{pmatrix}$, c_i – numere Fibonacci: $c_{-1}=0, c_0=1$,
 - $c_k = c_{k-1} + c_{k-2}$; h) $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} -33 & 19 & 32 \\ 4 & 47 & -1 \\ -5 & -50 & -29 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 6 & 21 & -10 & 17 \\ -1 & 54 & -51 & 30 \\ -4 & -39 & 20 & 7 \\ 26 & 19 & -2 & 71 \end{pmatrix}$ 11. a) $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 16 & 15 & 8 \\ 16 & 14 & 8 \\ 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ 13. $S = \begin{cases} 15,1 & 11,7 \\ 10,3 & 8,1 \\ 15,4 & 11,8 \end{cases} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}$

14. a) 3, dacă $\alpha \neq -9$; 2, dacă $\alpha = -9$; b) 3, dacă $\alpha \neq 5$; 2, dacă $\alpha = 5$; c) 1. 15. a) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; b) nu

este inversabilă; c) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; e) $-\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$; f) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; h) nu este inversabilă; i) $\frac{1}{2-i} \begin{pmatrix} -2+2i & 1-2i & 2-i \\ 1-2i & i & 0 \\ -i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$;

j) $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 6 \\ -1 & 2 & 7 & -10 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} \frac{24}{2} & 3 & -4 & -8 \\ -\frac{23}{2} & -1 & 2 & \frac{7}{2} \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. 17. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

§ 2. A. 1. a) -10; b) 24; c) $-a$; d) $-17i$; e) $9-10i$; f) -374 ; g) -11 ; h) -22 ; i) 4; j) -18.

2. a) $S = \left\{ \left(\frac{11}{7}, \frac{-2}{7} \right) \right\}$; b) $S = \left\{ \left(\frac{13}{23}, \frac{-2}{23} \right) \right\}$; c) $S = \left\{ \left(\frac{19}{14}, \frac{3}{14} \right) \right\}$; d) $S = \left\{ \left(\frac{21}{8}, \frac{-27}{8} \right) \right\}$;

e) $S = \left\{ \left(\frac{ac-bd}{a^2+b^2}, \frac{ad+bc}{a^2+b^2} \right) \right\}$; f) $S = \{(1, 0, 1)\}$; g) $S = \{(1, 3, 2)\}$; h) $S = \{(2, 1, 3)\}$;

i) $S = \left\{ \left(\frac{5}{3}, 0, -\frac{2}{3} \right) \right\}$; j) nu poate fi aplicată regula lui Cramer.

§ 2. B. 3. a) -20; b) 0; c) 0; d) -15; e) 36. 5. a) Se va schimba în opus; b) se va înmulți cu $(-1)^n$.

6. Se va schimba în număr complex conjugat. 7. Determinantul se va înmulți cu α^n .

8. Indicație. Dezvoltați determinantul după coloana a treia. 9. a) $x=1+i$, $y=i$;

b) $x=2+i$, $y=2-i$; c) $x=3-11i$, $y=-3-9i$, $z=1-7i$. 10. a) 4 u.p.; b) coliniare; c) $\frac{27}{2}$ u.p.;

d) 13 u.p. 11. a) Indicație. Adunați la liniile doi și trei linia întâi înmulțită cu -1. $(a-b)(c-a)(c-b)$;

b) $(x-a)^2(2a+x)$; c) $ab(a^2+b^2-cb)+c(c^3-b^2c-a^3)$. 12. a) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; d) $-\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$; e) $\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -4 & 5 & 3 \\ 12 & 2 & -9 \end{pmatrix}$; f) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ 13. $X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. 14. a) $S = \{1, 2\}$; b) $S = \{0, 3a\}$.

15. a) *Indicație.* Adunați la linia întâi linia a treia și scoateți factorul comun.

($a^2 + b^2 + c^2$)($a - b$)($a - c$)($c - b$)($a + b + c$); b) ($a - b$)($b - c$)($c - a$)($ab + ac + bc$).

§ 3. A. 1. a), b), d) nu este soluție; c) este soluție. 2. a) $S = \{(1, 0, 1)\}$; b) $S = \{(1, -3, 3)\}$;

c) $S = \{(1, 1, -2)\}$; d) $S = \{(1, 2, -2)\}$. 3. a) $S = \{(5\alpha - 1, 3\alpha + 1, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$; b) $S = \{(0, 0, 0)\}$;

c) $S = \{(0, 0, 2)\}$; d) $S = \left\{ \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{4}{5} \right) \right\}$; e) $S = \{(7, -6, 3)\}$; f) $S = \{(1 - \alpha, \alpha, 2\alpha - 1) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

4. a) 4,5 lei; 4 lei.

§ 3. B. 5. a) $S = \left\{ \left(\frac{-2+4i}{15}, \frac{1-2i}{3}, \frac{-4+3i}{15} \right) \right\}$; b) $S = \{(1, 2, -2)\}$; c) $S = \{(-1, -1, 0, 1)\}$.

6. a), d), e), f) compatibil; b), c) incompatibil. 7. a) $S = \left\{ \left(\frac{1}{5}(11-\alpha), \frac{2}{5}(-1+\alpha), \alpha \right) | \alpha \in \mathbb{C} \right\}$; soluție particulară: $(3, -2, -4)$; d) $S = \{(1, 2, -2)\}$; e) $S = \{(1, 2, 1)\}$; f) $S = \{(\lambda, 1, 0) | \lambda \neq 0\}$; $S = \{(-\alpha, 1-2\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}, \lambda = 0\}$. 8. a) $S = \{(-3\alpha, \alpha, -\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$; b) $S = \{(\alpha, 3\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$; c) $S = \{(0, 0, 0) | \lambda \neq 0\}$; d) $S = \{(-\alpha, -2\alpha, \alpha) | \lambda = 0\}$; d) $S = \{(0, 0, 0) | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exerciții și probleme recapitulative. A. 1. a) $\begin{pmatrix} 5 & i & -3 \\ -2i & 8 & 2+7i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3i & 1 & -i \\ 2 & 4i & -1+2i \end{pmatrix}$

2. a) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} i & -2i \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -5 \\ 52 \\ -33 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 11 & 9 & 13 \\ -22 & -27 & -17 \\ 29 & 32 & 26 \end{pmatrix}$.

3. a) $x = -1$, $y = 2$; b) $x = 5$, $y = 11$ sau $x = -1$, $y = 5$. 4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$. 5. a) 2; b) 3; c) 2. 6. 1×2 .

7. a) $-i$; b) 0; c) -70 ; d) -88 ; e) 0; f) $-21i$; g) 0; h) 0. 8. a) $S = \{(2, 1)\}$; b) $S = \{(i, 1)\}$; c) $S = \{(1, 1, 1)\}$; d) $S = \{(3, 2, 1)\}$; e) $S = \emptyset$; f) $S = \left\{ \left(1, \frac{1}{2} \right) \right\}$; g) $S = \{(4-t, 5-t) | t \in \mathbb{C}\}$; h) $S = \{(2, 3, -1)\}$.

9. 5 gîndaci și 3 păianjeni. 10. 5 cm și 12 cm. 11. a) $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{16}{3} \right\}$; b) $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

B. 12. $\lambda = 210$. 13. a) $x = 1$, $y = -3$; b) $x = 1$, $y = 2$, $u = 0$, $v = 3$. 14. 2. 15. $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 16. b) Cea mai mică valoare: -4 , cea mai mare: 4 . 17. a) 2; b) 2; c) 4. 18. a) BA nu există,

$AB = \begin{pmatrix} 14 & -5 & 22 & 6 \\ 7 & 10 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $AB = BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; c) AB nu există, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 4i & 0 \\ 0 & -1 & 1+i \end{pmatrix}$

19. $\frac{1}{1-\alpha^2} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & 1 \\ -\alpha & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq \pm 1$. 20. $X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. 21. a) 1; b) 36; c) -15 .

22. $\mathcal{V} = 6$ (un. cub.). **23.** a) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$; b) $S = \{-2, 0, 1 \pm i\}$. **24.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **25.** Pentru

$\alpha \neq \pm 2$, sistemul este compatibil determinat; pentru $\alpha = 2$, sistemul are o infinitate de soluții;

pentru $\alpha = -2$ sistemul este incompatibil. **26.** a) $\begin{pmatrix} 2 & -i \\ 3 & -i \end{pmatrix}$; b), e), g), h) nu există A^{-1} ;

c) $\frac{1}{70} \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 14 & -14 & 14 \\ -34 & 14 & -4 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{88} \begin{pmatrix} -6 & 20 & -15 \\ 30 & -12 & 31 \\ -20 & 8 & -6 \end{pmatrix}$; f) $\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 17 & -8 & 5 \\ -16 & 10 & -1 \\ 6i & -9i & 3i \end{pmatrix}$.

27. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{13}{36} & \frac{7}{18} & -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{7}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$;

c) $A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & -8 \\ 7 & 2 & -15 & 17 \\ 2 & -8 & 0 & 7 \\ -8 & 2 & 15 & -13 \end{pmatrix}$. **28.** a) $S = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{19-9t}{6}, \frac{11-3t}{t}, t \right) \mid t \in \mathbb{C} \right\}$;

b) $S = \{(5-3t, -5+2t, 1-t, t) \mid t \in \mathbb{C}\}$; c) $S = \{(-5+2\lambda+4t, -1+\lambda+t, \lambda, t) \mid \lambda, t \in \mathbb{C}\}$;

d) $S = \left\{ \left(\frac{1}{6} + 5t, \frac{1}{6} - \frac{7}{6}t, \frac{1}{6} + 5t, 6t \right) \mid t \in \mathbb{C} \right\}$;

e) pentru $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, $S = \left\{ \left(\frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2} \right) \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}$;

pentru $\alpha = 1$, $S = \{(1-\lambda-t, \lambda, t) \mid t, \lambda \in \mathbb{C}\}$; pentru $\alpha = -2$, $S = \emptyset$; f) pentru $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $S = \emptyset$;

pentru $\lambda = 0$, $S = \{(-0,5\lambda-6,5t-1,5; -3,5\lambda-9,5t-3,5; \lambda; t) \mid \lambda, t \in \mathbb{C}\}$.

29. a) $S = \{(-5\alpha, \alpha, t, -3\alpha+t) \mid \alpha, t \in \mathbb{C}\}$; b) pentru $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$, $S = \emptyset$;

pentru $\lambda = -2$, $S = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{C}\}$; pentru $\lambda = 1$, $S = \{(\alpha, t, -\alpha-t) \mid \alpha, t \in \mathbb{C}\}$;

c) pentru $\lambda \neq 1$, $S = \emptyset$; pentru $\lambda = 1$, $S = \{(2t, -3t, 5t, 4t) \mid t \in \mathbb{C}\}$. **30.** Vasul I – 7,5 l,

vasul II – 45 l. **31.** Ciclistul I – 5 km/h, ciclistul II – 3 km/h. **32.** Persoana I – 2000 u.m., persoana

II – 3000 u.m., persoana III – 5000 u.m.

Probă de evaluare. A. **1.** a) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 16 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$. **2.** De exemplu, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & -10 \end{pmatrix}$.

3. $S = \{(1, -1, 0)\}$. **4.** $S = \{(0, \frac{2}{3}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$; soluție particulară: (0, 2, 3).

B. **1.** a) $\begin{pmatrix} -1 & 3i & 5+6i \\ 4i & 2 & 4+2i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4+7i & 4+5i \\ 12-9i & -8+5i \\ 6-9i & -7+i \end{pmatrix}$. **2.** De exemplu, $\begin{pmatrix} 2 & 3i & 0 & 2 & -i \\ 0 & i & 4 & 8 & 3i \\ 0 & 0 & 27 & 47 & 2li \end{pmatrix}$

3. C. 4. $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{6}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$. **5.** $X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 22 & 15 & -21 \\ 16 & 14 & -18 \\ -4 & -6 & 6 \end{pmatrix}$. **6.** $S = \{(2, -3, 24, -39)\}$.

7. $S = \left\{ \left(\frac{5}{9}\alpha + \frac{1}{3}i\beta, \frac{1}{9}\beta + \frac{28}{27}i\alpha, -\frac{47}{27}\alpha - \frac{7}{9}i\beta, \alpha, \beta \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$.

Modulul 8. §1. A. **1.** Nu. **2.** F. **3.** a) PQ ; b) PC ; c) QC . **4.** $\frac{a^2}{16} \sqrt{3}$ u.p. **5.** 3 plane. **6.** 6 plane.

7. a) 6; b) 4. **8.** a) 10; b) 10. **9.** a) Nu; b) nu; c) da. **10.** a), b) Nici un punct, un punct, o mulțime infinită de puncte; c) nici un punct, un punct, două puncte, o mulțime infinită de puncte. **11.** Da, dacă punctele sunt necoliniare.

§1. B. 14. Indicație. Dreptele d_1 și d_2 , fiind concurente, definesc un plan α . Deoarece dreapta d_3 este concurentă cu d_1 și cu d_2 , rezultă că d_3 are două puncte diferite ce aparțin planului α .

15. Indicație. Dreptele AD și CB nu sunt coplanare. **16.** Indicație. Dacă două plane diferite au un punct comun, atunci toate punctele comune aparțin intersecției planelor α și β . **17.** Indicație. Dacă trei puncte ar fi coliniare, atunci cele patru puncte ar fi coplanare, ceea ce contrazice ipoteza.

18. Indicație. $a \cap AB = C \subset \beta \Rightarrow \beta$ separă punctele A și B . **19.** Indicație. $A \in \alpha$ și $A \notin \beta$, $B \in \beta$ și $B \notin \alpha \Rightarrow$ dreapta căutată este AB . **20.** Indicație. Punctul $D \notin (ABC)$.

§2. A. **1.** Nu. **2.** $a \nparallel c$. **3.** Da. **5.** Necoplanare.

§2. B. **8.** $a \nparallel c$. **9.** Mulțimea punctelor spațiului fără punctele planului (A, d) . **10.** $d \nparallel d_2$. **11.** Dreptele d și AB sunt necoplanare.

§3. A. **1.** $d \parallel MN$. **2.** $EL \parallel FM$. **3.** a) 10 cm; b) 6 cm; c) 16 cm; d) $\frac{bc}{a+c}$.

§3. B. 4. Indicație. $\Delta A_1BB_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow A_1B_1 \parallel AC$ și $\Delta D_1DC_1 \sim \Delta ADC \Rightarrow D_1C_1 \parallel AC$. **5.** Indicație.

Aplicați teorema lui Menelaus. $\frac{1}{abc}$. **6.** $MN \parallel (ABC)$. **7.** Indicație. $M_1 = DM \cap AB$, $N_1 = DN \cap BC$, atunci $\Delta DMN \sim \Delta DM_1N_1$.

§4. A. **1.** Indicație. $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$. **2.** Indicație. a) $LM \parallel AB$ și $MN \parallel BC$; b) $I_1 = PM \cap AB$; c) $I_2 = PN \cap AC$; d) $(ABC) \cap (PMN) = I_1I_2$. **3.** $\mathcal{P}_{A_2B_2C_2} = 13,75$ cm, $\mathcal{P}_{A_3B_3C_3} = 22,5$ cm, $\mathcal{P}_{A_4B_4C_4} = 31,25$ cm.

§4. B. **4.** 8 cm. **5.** 38 cm. **6.** $\mathcal{P}_1 = \frac{6\lambda+1}{7\lambda+1} \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_2 = \frac{4\lambda+1}{7\lambda+1} \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_3 = \frac{\mathcal{P}}{7\lambda+1}$. **7.** Indicație. a) $\Delta MEN \sim \Delta AEB$ și $\Delta NEP \sim \Delta BEC$; b) $I = NR \cap BD$. **8.** Indicație. $(MNP) \parallel (ABC) \Rightarrow (MNP) \cap (AED)$ este o dreaptă $d \parallel AD$ și $Q \in d$.

Probleme recapitulative. **A.** **1.** a) 17,15 dm; b) 19,5 cm; c) 54 cm. **2.** $MM_1 = 12$ cm, $NN_1 = 8$ cm. **3.** 12 cm. **4.** Indicație. Dacă M_1 este mijlocul segmentului AB , atunci $\Delta M_1DC \sim \Delta M_1DC \Rightarrow ML \parallel M_1C$.

B. **7.** a) $\frac{a}{\lambda}(\lambda-1)$; b) μa ; c) $\frac{l}{k}(a-b)$; d) $\frac{c}{a}(a-b)$. **8.** 32 cm. **10.** $\frac{m+n}{2n}a$. **11.** 2 m. **12.** $0,25a^2 \cdot \sqrt{11}$ u.p.

13. Indicație. Fie I punctul de intersecție a oricărora două drepte. Dacă am presupune că a treia dreaptă intersectează una dintre cele două într-un punct diferit de I , atunci această dreaptă ar intersecta și a doua, dar în acest caz dreptele ar fi coplanare, ceea ce contrazice ipoteza. **14.** Dreptele AB și DC , unde $D = a \cap AB$.

15. $AM, MN \parallel DB, AN \text{ și } AL \parallel DB$; a se vedea figura.

16. Indicație. Intersecția a două plane ce trec prin două drepte paralele este o dreaptă paralelă cu cele două drepte. **17.** A se vedea problema 16.

18. Punctul există dacă $AB \nparallel DC$, adică dacă $AD : DE \neq BC : CE$.

19. Indicație. Fie $BE = EC$, atunci $[MF]$ este mediană a $\triangle ADF$. Din condiție, $AG : GE = 2 : 1$, deci $[AE]$ este mediană a $\triangle ADF$. **20. Indicație.** Dacă $I = AC \cap EF$, atunci $IH \cap AB$ este unul dintre punctele de intersecție, iar $FH \cap DB$ este cel de-al doilea punct.

21. Indicație. a) $I_1 = EF \cap AB, H_1 = BC \cap HD, I_2 = EH \cap AH_1$ ($EFH \cap (ABC) = I_1 I_2$ etc.)
c) $F_1 = DF \cap AB, H_1 = DH \cap BC, F_1 H_1 \cap AC = P$, atunci $FH \cap DP$ este punctul de intersecție.

22. Indicație. Aplicați proprietatea liniei mijlocii și proprietățile paralelogramului.

23. a) Dreapta ce trece prin punctul E și centrul paralelogramului; b) $MN \parallel DC \parallel AB$; c) $LP \parallel DC$; d) $MNLP$ este trapez. **24. Indicație.** Punctele F_1, F_2 și F_3 sunt punctele de intersecție a dreptelor CB, AC și respectiv BA cu planul α . **25. Indicație.** Considerați un punct $M \in c$ ($M \notin \gamma, AM \nparallel \gamma, BM \nparallel \gamma$). Construiți $(ABM) \cap \alpha$, care este dreapta $A_1 B_1$, unde $A_1 = a \cap AM, B_1 = b \cap BM$ și punctul de intersecție este $AB \cap A_1 B_1$. **27. 4.**

Probă de evaluare. **A.** **1.** 8 cm. **2. a)** $A_1 B_1, A_1 D_1, D_1 C_1, B_1 C_1, A_1 C_1, D_1 B_1$; **b)** $(ADB), (DCC_1), (ABA_1), (D_1 A_1 B_1)$. **3.** $a(0,5 + \sqrt{3})$. **4.** 8 cm.

B. **1.** $a \nparallel b$. **2. a)** $EF \parallel (ABC)$, **b)** $GH \parallel (ABC)$. **4.** $\frac{4}{9}$.

Modulul 9. §1. A. **1. Indicație.** $CD \perp CB, CD \perp CF \Rightarrow CD \perp (CBF)$. **2.** $DA \perp CB, CB \parallel MN \Rightarrow \Rightarrow MN \perp AD$. **3.** 2,4 cm. **4.** $MB = MD = 5$ cm, $MC = \sqrt{41}$ cm. **5.** $AB = b$. **6.** $AB = \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$.

7. $DE = 4\sqrt{2}$ cm, $CE = 2\sqrt{17}$ cm, $BE = 2\sqrt{13}$ cm, $d = \frac{4}{13}\sqrt{286}$ cm. **8.** $2\sqrt{14}$ cm.

§1. B. **9.** $AB = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$. **10.** $\sqrt{a^2 + c^2}, \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \alpha}, \sqrt{b^2 + c^2}$.

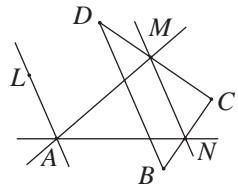
11. $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha}}$. **13. Indicație.** Dacă $d = \alpha \cap \beta$, atunci din $d_1 \perp \alpha \Rightarrow d_1 \perp d$, iar din $d_2 \perp \beta \Rightarrow d_2 \perp d \Rightarrow d \perp (d_1 d_2)$. **14. Indicație.** ΔAEC isoscel $\Rightarrow EO \perp AC$; analog ΔBED isoscel $\Rightarrow EO \perp BD$.

§2. A. **1. Indicație.** a) $AB \perp MD, AB \perp MC$; b) $pr_{(ABC)}[MC] = [MD]$; c) 2,75 cm; d) $1,5\sqrt{15}$ cm.
2. a) 3 cm; b) 0,6. **3. a)** 3 cm; b) $3\sqrt{2}$ cm. **4.** 24 cm. **5.** 3,8 m.

§2. B. **6. Indicație.** a) ΔABD isoscel, $[VO]$ – mediană; ΔBVE isoscel, $[VO]$ – mediană $\Rightarrow \Rightarrow VO \perp (ABC)$; b) $\Delta AOV \equiv \Delta BOV \equiv \Delta COV \equiv \Delta DOV \equiv \Delta EOV \equiv \Delta FOV$. **7. Indicație.** a), b) Dacă $O = pr_{(ABC)}E$, atunci $\Delta AOE \equiv \Delta BOE \equiv \Delta COE \equiv \Delta DOE \Rightarrow OA = OB = OC = OD$. **8.** $c \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$.

§3. A. **1.** $\sqrt{6}$ cm. **2. a)** $\frac{9}{4}$ cm; b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm. **3.** 15 cm. **4.** 5 cm.

§3. B. **5.** $\frac{\sqrt{1221}}{39}$. **6. Indicație.** a) Dacă $O = pr_{(ABC)}E$, iar $[EM], [EN], [EP], [EQ]$ sunt înălțimile triunghiurilor AEB, BEC, CED și respectiv DEA , atunci $OM = ON = OP = OQ$, deci punctul O este egal depărtat de laturile rombului; b) $\Delta MOE \equiv \Delta NOE \equiv \Delta POE \equiv \Delta QOE \Rightarrow \angle EMO \equiv \angle ENO \equiv \equiv \angle EPO \equiv \angle EQO$. **7.** Dacă $O = pr_{(ABC)}E$ și $[EM], [EN], [EP], [EQ]$ sunt înălțimile triunghiurilor AEB, BEC, CED și respectiv DEA , atunci $\Delta MOE \equiv \Delta NOE \equiv \Delta POE \equiv \Delta QOE$, deci $MO = NO = PO = QO$. **9.** 30° . **10.** $\sqrt{3}$.



Probleme recapitulative. A. 1. a) 13 cm; b) 30 cm; c) $\sqrt{p^2 + n^2 - m^2}$; d) $\sqrt{2p^2 + n^2 - s^2}$.

2. $\sqrt{b^2 - \frac{1}{3}a^2}$. 3. $d_1 = 2\sqrt{6}$ cm, $d_2 = 4\sqrt{2}$ cm. 4. a) 30° ; b) $\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$. 5. 2 cm. 6. 15 m.

B. 10. Indicație. Dreapta din planul α este perpendiculară pe $pr_\alpha a$. 12. 32 cm. 13. $\frac{ab}{a+b}$.

14. $\sqrt{b^2 - a^2}$. 15. $\sqrt{2b^2 - a^2}$. 16. $b \cos \alpha \sqrt{1 - \tan^2 \alpha \cot^2 \beta}$. 17. $\frac{2a \sin \alpha}{\cos \beta}$. 18. 0,5 m.

Probă de evaluare. A. 1. 3,5 cm. 2. $\sqrt{6}$ cm. 3. $5\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{29}$ cm. 4. 4 cm.

B. 1. $\frac{1}{2}|a-b|$. 3. $\sqrt{70}$ cm, $2\sqrt{16,06}$ cm. 4. 45° .

Modulul 10. § 1. A. 2. Nu este. 3. Este o transformare geometrică, dar nu este o izometrie.

4. Nu întotdeauna (de exemplu, proiectarea paralelă).

§ 1. B. 8. a) $B'K'$, unde $A'K' = K'C'$; b) $B'L'$, unde $\angle A'B'L' \equiv \angle L'B'C'$ etc. 9. Dacă $C \in [AB]$ și $f(C) = C'$, atunci $AC = AC'$, $CB = C'B$ și $AC + CB = AC' + C'B$, deci $C \equiv C'$. Analog pentru $C \notin [AB]$. 10. a) A se vedea problema 9; b) nu. 11. a) Da, dacă $f(A) = A$, atunci $f^{-1}(A) = f^{-1}(f(A)) = I(A) = A$. b) da, deoarece $(f \circ f)(A) = f(A) = A$. 12. Da, deoarece $(f \circ f)(A) = f(f(A)) = f(B) = A$.

§ 2. A. 2. Sunt simetrice. 3. O infinitate și multimea lor reprezintă o dreaptă paralelă cu dreptele date.

4. Nu. 5. Nu. 6. Sunt coliniare. 8. Da (centrul, orice dreaptă, orice plan care trece prin centrul simetriei centrale). 9. Identică. 10. Nu.

§ 2. B. 13. a) Un segment paralel cu cel dat; b) o dreaptă paralelă cu cea dată; c) un plan paralel cu cel dat.

§ 3. A. 1. a) Triunghiul isoscel, dreptunghiul; b) triunghiul cu laturi de lungimi diferite, paralelogramul. 2. Dreptele care trec prin centrele a două fețe opuse; dreptele care trec prin mijloacele a două muchii paralele ce nu aparțin aceleiași fețe. 4. a) $\alpha \equiv \alpha'$ și $d \in \alpha'$; b) $\alpha \equiv \alpha'$ și $d \perp \alpha'$; c) $d \cap \alpha' \neq \emptyset$. 5. Orice mediatore a segmentului AB . Reuniunea este planul mediator al segmentului AB . 6. a) Dreapta suport și orice mediatore a segmentului; b) dreapta suport a semidreptei; c) însăși dreapta și orice dreaptă perpendiculară pe ea; d) orice dreaptă din plan și orice dreaptă perpendiculară pe plan; e) dreapta care este perpendiculară pe planul paralelogramului și care trece prin punctul de intersecție a diagonalelor lui.

§ 3. B. 7. a) Imaginea dreptei parallele cu axa este o dreaptă paralelă cu cea dată; imaginea dreptei care intersectează axa este o dreaptă care trece prin punctul de intersecție a dreptei date cu axa și axa este dreapta suport a bisectoarelor unghiurilor opuse la vîrf formate de dreaptă și imaginea ei; imaginea dreptei neconcurrente cu axa este o dreaptă neconcurrentă cu cea dată. 8. a) Orice dreaptă perpendiculară pe axa de simetrie și însăși axa; b) axa de simetrie.

§ 4. A. 2. Orice dreaptă din plan și orice dreaptă perpendiculară pe plan. 3. a) Orice plan care conține segmentul și planul mediator al segmentului; b) orice plan care conține dreapta și orice plan perpendicular pe dreapta dată; c) însuși planul și orice plan perpendicular pe planul dat; d) planul care conține dreptele date și două plane perpendiculare pe planul definit de dreptele date și care conțin bisectoarele unghiurilor formate de dreptele date; e) planul determinat de dreptele date, planul perpendicular pe planul determinat de dreptele date, egal depărtat de la dreptele date și orice plan perpendicular pe dreptele date; f) planul egal depărtat de la planele date și orice plan perpendicular pe planele date. 4. Sunt coplanare. 6. 5 m. 7. $\alpha \parallel \beta$, dacă $\alpha \parallel \gamma$; $\alpha \nparallel \beta$, dacă $\alpha \nparallel \gamma$.

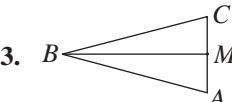
§ 4. B. **9.** Punctul M este punctul de intersecție a dreptei AB' cu planul α , unde B' este simetricul punctului B față de planul α . **10.** Punctul M este punctul de intersecție a dreptei AB' cu planul α , unde B' este simetricul punctului B față de planul α . **11.** Un cerc situat în planul care trece prin punctul A perpendicular pe dreapta d , al cărui centru este punctul de intersecție a dreptei d cu acest plan, iar raza – distanța de la punctul A la dreapta d .

§ 5. B. **5.** Puncte invariante nu există. Orice dreaptă și orice plan paralele cu dreapta determinată de un punct și imaginea lui la această translație. **6.** t_{BA} .

§ 6. B. **2.** Nu este. **3.** Nu. **4.** Un singur punct – centrul omotetiei. Orice dreaptă care trece prin centrul de omotetie. **5.** 9 cutii. **6.** a) Laturile triunghiului $A'B'C'$ sunt paralele cu laturile triunghiului ABC ; b) a se vedea **6 a).** **7.** $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. **9.** a) Un cerc; b) un disc; c) un paralelogram; d) un pătrat; e) un cub; f) o sferă.

§ 7. B. **3.** a) O infinitate de axe; b) o axă; c) o axă sau nici una; d) nici o axă. **7. Indicație.** Considerați rotația în jurul axei l care aplică punctul B pe punctul B' , astfel încât: 1) $B' \in (lA)$; 2) A și B' sunt situate de părți diferite ale dreptei l . Atunci $M = AB' \cap l$ satisfac condiția problemei.

Probleme recapitulative. **A.** **1. Indicație.** Dacă O este mijlocul $[AC]$, atunci $S_o(d_1) \cap d_2$ este un vîrf al paralelogramului căutat. **2. Indicație.** Dacă O este mijlocul $[AC]$, atunci $S_o(d) \cap \mathcal{C}$ este un vîrf al paralelogramului.

3.  $S_M(B) = B_1 \Rightarrow ABCB_1$ – paralelogram cu diagonale perpendiculare $\Rightarrow ABCB_1$ romb.

4. Dacă $S_M(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}'$ și $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}_2 = B$, atunci dreapta AB este cea căutată.

B. **1.** Dacă $P_1 = S_{AC}(P)$ și $P_2 = S_{BC}(P)$, atunci $\{X_i\} = AC \cap P_1P_2$ și $\{Y_i\} = BC \cap P_1P_2$. **6.** Punctul de impact este intersecția bordurii cu segmentul ce unește unul dintre aceste puncte cu simetricul celuilalt punct față de această bordură. **7.** Vîrful C este intersecția dreptei d și dreptei BA_1 , unde $A_1 = S_d(A)$. **8.** Dacă $d_3 = t_{\bar{a}}(d_1)$, atunci $M_2 = d_3 \cap d_2$, iar $M_1 = t_{-\bar{a}}(M_2)$. **9.** Fie $B_2 \in d_2$ și $BB_2 \parallel d_1$, $A_2 \in d_1$ și $AA_2 \parallel d_2$, $\bar{a} = \overrightarrow{AA_2}$, $\bar{b} = \overrightarrow{BB_2}$, atunci $t_{a+\bar{b}}(A) = A_1$, $t_{a+\bar{b}}(B) = B_1$.

Probă de evaluare. **A.** **1.** Planele bisectoare ale figurii date și orice plan perpendicular pe dreapta de intersecție a planelor. **2.** Dreapta situată în planele determinate de dreptele date, echidistantă față de acestea. Orice dreaptă din planul determinat de aceste drepte, perpendiculară pe acestea, și orice dreaptă perpendiculară pe planul determinat de aceste drepte, care intersectează prima axă de simetrie. **3.** Un centru, 13 axe, 9 plane. **4.** Nu are centru, 7 axe, 6 plane.

B. **1.** Fie a și b dreptele necoplanare date. Considerăm dreapta AB perpendiculară comună pe dreptele a și b (aceasta există și este unică), unde $A \in a$, $B \in b$. Fie punctul C mijlocul segmentului AB . Considerăm dreptele a_1, b_1 care trec prin punctul C , paralele cu a și respectiv b . Atunci axele de simetrie ale figurii date sunt dreapta AB și suporturile bisectoarelor unghiurilor formate de dreptele a_1 și b_1 . **4.** a) Da; b) da; c) da; d) în caz general, nu; e) în caz general, nu.

Cuprins

Cuvînt-înainte	3
Modulul 1. Siruri de numere reale	5
§ 1. Siruri numerice.	
Recapitulare și completări	5
§ 2. Progresii aritmetice. Progresii geometrice	13
§ 3. Limita unui sir.	
Siruri convergente, siruri divergente	22
Exerciții și probleme recapitulative	30
Probă de evaluare	32
Modulul 2. Limite de funcții	34
§ 1. Limita unei funcții într-un punct	34
§ 2. Operații cu limite de funcții.	
Limitele unor funcții elementare	44
§ 3. Calculul limitelor de funcții	54
§ 4. Cazuri exceptate la operații cu limite de funcții	60
Exerciții și probleme recapitulative	64
Probă de evaluare	66
Modulul 3. Funcții continue	68
§ 1. Funcții continue într-un punct.	
Funcții continue pe o mulțime	68
§ 2. Operații cu funcții continue	76
§ 3. Proprietăți ale funcțiilor continue	79
Exerciții și probleme recapitulative	85
Probă de evaluare	86
Modulul 4. Funcții derivabile	88
§ 1. Noțiunea de derivată	89
§ 2. Interpretarea geometrică a derivatei	96
§ 3. Derivatele unor funcții elementare	101
§ 4. Operații cu funcții derivabile	105
§ 5. Diferențiala unei funcții	115
§ 6. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile	118
Exerciții și probleme recapitulative	127
Probă de evaluare	129
Modulul 5. Aplicații ale derivatelor	131
§ 1. Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor	131
§ 2. Rolul derivatei a două în studiul funcțiilor.	
Asimptote	139
§ 3. Reprezentarea grafică a funcțiilor	148
§ 4. Aplicații ale derivatelor în fizică, geometrie și economie. Probleme de maxim și minim	154
Exerciții și probleme recapitulative	160
Probă de evaluare	162
Modulul 6. Numere complexe.....	164
§ 1. Operații cu numere complexe reprezentate sub formă algebrică	164
§ 2. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe. Forma trigonometrică a unui număr complex	170
§ 3. Aplicații ale numerelor complexe	178
Exerciții și probleme recapitulative	181
Probă de evaluare	183
Modulul 7. Elemente de algebră superioară	185
§ 1. Matrice	185
§ 2. Determinanți	199
§ 3. Sisteme de ecuații liniare	215
Exerciții și probleme recapitulative	226
Probă de evaluare	230
Modulul 8. Paralelismul dreptelor și planelor	232
§ 1. Axiomele geometriei în spațiu	232
§ 2. Pozițiile relative a două drepte în spațiu	235
§ 3. Drepte și plane	238
§ 4. Plane paralele	241
Probleme recapitulative	245
Probă de evaluare	248
Modulul 9. Perpendicularitatea în spațiu	250
§ 1. Drepte și plane perpendiculare	250
§ 2. Proiecții ortogonale. Unghi format de o dreaptă și un plan	254
§ 3. Unghi format de două plane (unghi diedru)	259
Probleme recapitulative	264
Probă de evaluare	266
Modulul 10. Transformări geometrice ...	268
§ 1. Noțiunea de transformare geometrică.	
Transformări izometrice	268
§ 2. Simetria centrală	271
§ 3. Simetria axială	273
§ 4. Simetria față de un plan	275
§ 5. Translația	276
§ 6. Transformarea de asemănare. Omotetia	278
§ 7. Rotația în jurul unei drepte (rotația axială)	280
Probleme recapitulative	282
Probă de evaluare	283
Răspunsuri și indicații	285