MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion Achiri Andrei Braicov Olga Şpuntenco

Matematică

Manual pentru clasa a 7-a

Cartdidact

Manualul a fost aprobat prin ordinul Ministrului Educației al Republicii Moldova (nr. 459 din 1 iunie 2012). Lucrarea este elaborată conform curriculumului disciplinar şi finanțată din Fondul Special pentru Manuale.

Şcoala/Liceul ....
Manualul nr. ....

Anul de folosire	Numele şi prenumele elevului care a primit manualul	Anul şcolar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

• Dirigintele va controla dacă numele elevului este scris corect.
• Elevii nu trebuie să facă niciun fel de însemnări în manual.
• Aspectul manualului (la primire şi la returnare) se va aprecia: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Autori: *Ion Achiri*, doctor, conferențiar universitar, IȘE
Andrei Braicov, doctor, conferențiar universitar, UST
Olga Şpuntenco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chişinău

Comisia de evaluare: *Dorin Afanas*, doctor în ştiințe fizico-matematice, conferențiar universitar, UST
Maria Efros, profesoară, grad didactic superior, Liceul de Creativitate şi Inventică „Prometeu-Prim”, Chişinău
Aliona Pogreban, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „Minerva”, Chişinău

Redactor: *Andrei Braicov*
Corector: *Aliona Zgardan, Nina Artin*
Copertă: *Sergiu Stanciu*
Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

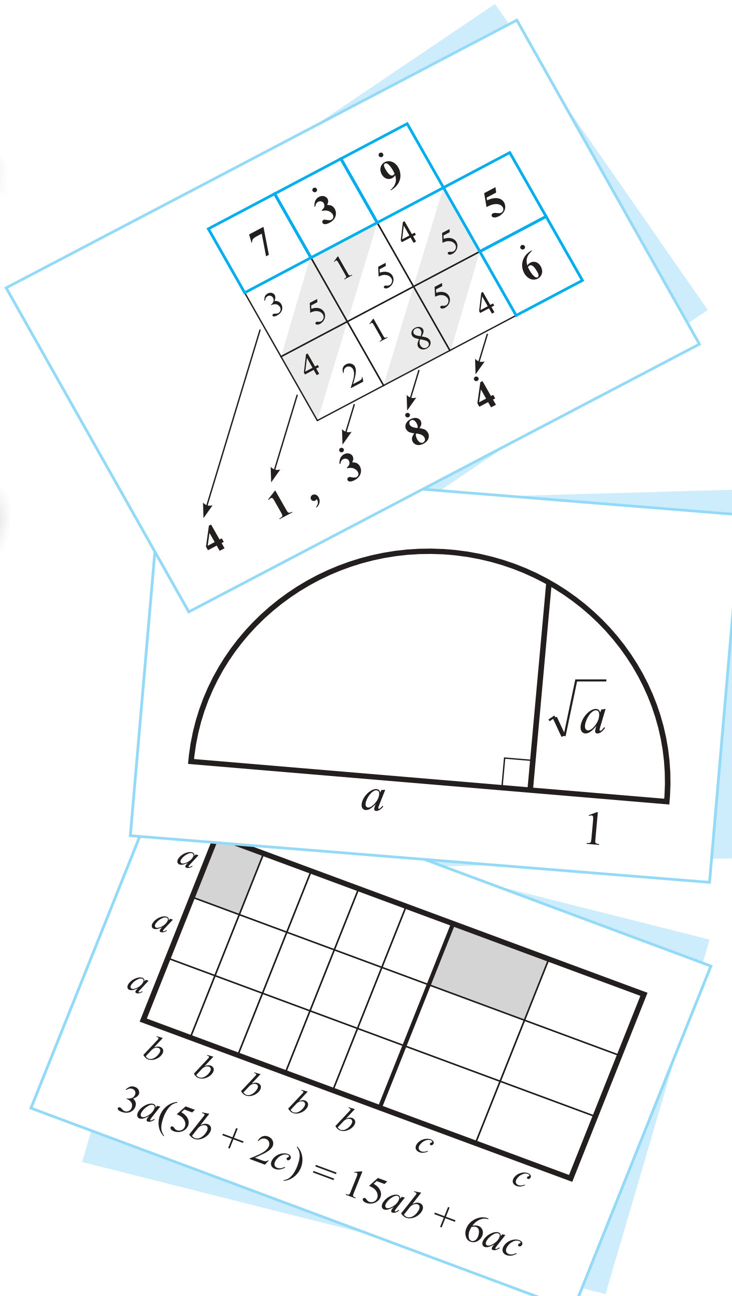
Achiri, Ion

Matematică: Manual pentru clasa a VII-a / Ion Achiri, Andrei Braicov, Olga Șpuntenco; comisia de evaluare: Dorin Afanas [et al.]; Ministerul Educației, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova. – Ed. a 2-a. – Chişinău: Cartdidact, 2018 (Tipografia Centrală). – 232 p.

ISBN 978-9975-3180-8-2

51(075.3)
A 16

ALGEBRĂ



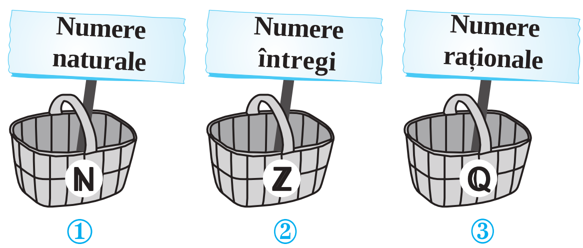
CAPITOLUL 1

Recapitulare și completări

§1. Mulțimea numerelor raționale

1.1. Numere raționale. Forme de reprezentare

1 a) Selectați numerele care se potrivesc primului coş, apoi, din cele rămase, selectați numerele potrivite pentru al doilea coş. Corespund numerele rămase coşului al treilea?



$-8\frac{1}{2}$ $\quad$ $0{,}3$ $\quad$ -3 $\quad$ 7 $\quad$ $3{,}5$ $\quad$ 4 $\quad$ $2{,}8(7)$ $\quad$ -2 $\quad$ $5{,}6$ $\quad$ $8{,}9$ $\quad$ 0 $\quad$ $\frac{2}{3}$ $\quad$ $1\frac{4}{5}$ $\quad$ 11 $\quad$ $-1{,}(3)$

b) Vom obține acelaşi rezultat dacă vom selecta mai întâi numerele care se potrivesc coşului ③? De ce?

- Un număr rațional poate fi scris sub forma $\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{Z}$, iar $n \in \mathbb{N}^*$.
- $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2 Observați modelul și scrieți sub formă zecimală numerele raționale:

$2\frac{5}{6}$, $\quad -4\frac{3}{5}$, $\quad 3\frac{2}{7}$, $\quad 1\frac{5}{8}$,

$-\frac{5}{9}$, $\quad 3\frac{16}{99}$, $\quad \frac{13}{45}$.

- $8\frac{3}{4} = ?$

Metoda 1

$\frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75;\quad 8\frac{3}{4} = 8 + \frac{3}{4} = 8 + 0{,}75 = 8{,}75.$

Metoda 2

$8\frac{3}{4} = \frac{8\cdot 4 + 3}{4} = \frac{35}{4} = 35:4 = 8{,}75.$

- $\frac{6}{7} = 6:7 = 0{,}857142\,857142\ldots = 0{,}(857142).$

3 Observați modelul și scrieți sub formă de fracție numerele raționale:

$6,8;\quad -7,(12);\quad 3,5(24);$

$11,11;\quad 8,(76);\quad -0,2(134).$

$$-2,9=-2\frac{9}{10}$$

număr cu perioadă simplă

$$4,(53)=4\frac{53}{99}$$

număr cu perioadă mixtă

$$7,\underbrace{8(15)}_{1+2=3}=7\frac{815-8}{\underbrace{990}_{2+1=3}}=7\frac{807}{990}$$

- Orice număr rațional poate fi scris univoc sub formă de fracție ireductibilă.
- Orice număr rațional poate fi scris sub formă zecimală.

1.2. Aproximări și rotunjiri

Selectați din parantezele drepte cuvântul potrivit sau cifra potrivită:

a) 2,3 este aproximarea prin [lipsă/adaos] cu o [zecime/sutime] a numărului 2,24651;

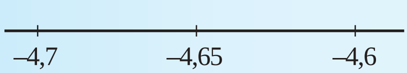
b) 2,24 este aproximarea prin [lipsă/adaos] cu o [zecime/sutime] a numărului 2,24651;

c) 2, [2/3] este rotunjirea până la [zecimi/sutimi] a numărului 2,24651;

d) 2,2 [4/5] este rotunjirea până la [zecimi/sutimi] a numărului 2,24651;

e) 2, 24 [6/7] este rotunjirea până la [sutimi/miimi] a numărului 2,24651.

- **Aproximarea prin lipsă cu o zecime** (**ALZ**) a numărului **pozitiv** a este numărul obținut după înlăturarea tuturor cifrelor de ordin mai mic decât ordinul zecimilor numărului a.
  Exemplu: ALZ(3,19) = 3,1.
- **Aproximarea prin adaos cu o zecime** (**AAZ**) a numărului **pozitiv** a este numărul cu 0,1 mai mare decât aproximarea prin lipsă cu o zecime a numărului a: AAZ = ALZ + 0,1.
  Exemplu: AAZ(3,19) = 3,2.
- **Aproximarea prin lipsă** (**prin adaos**) a numărului **negativ** a este egală cu opusul aproximării prin adaos (prin lipsă) a numărului $|a|$.
- **Rotunjirea până la zecimi** (**RZ**) a numărului a este unul din numerele ALZ, AAZ ale lui a, situat pe axă cel mai aproape de a. Dacă numărul a este mijlocul segmentului [ALZ, AAZ], atunci AAZ este rotunjirea până la zecimi a numărului a.



ALZ (4,65) = 4,6
AAZ (4,65) = 4,7
RZ (4,65) = 4,7

ALZ (–4,65) = –4,7
AAZ (–4,65) = –4,6
RZ (–4,65) = –4,6

Observație. Aproximările unui număr cu o unitate, o sutime, o miime etc. şi rotunjirile până la unități, sutimi, miimi etc. ale unui număr se definesc în mod analog definițiilor aproximărilor numărului cu o zecime şi a rotunjirii lui până la zecimi.

Exemple

Numărul a	7,28	–7,28	4,65	–4,65	14,92	–14,92
Aproximarea prin lipsă cu o zecime a numărului a	7,2	–7,3	4,6	–4,7	14,9	–15
Aproximarea prin adaos cu o zecime a numărului a	7,3	–7,2	4,7	–4,6	15	–14,9
Rotunjirea până la zecimi a numărului a	7,3	–7,3	4,7	–4,6	14,9	–14,9

Exerciții și probleme

1. Selectați numerele:
a) întregi;
b) naturale;
c) raționale;
d) raționale negative.

$9{,}3$; $\frac{19}{5}$; $0{,}4$; 173; $12{,}9$; $-8{,}(1)$; $-7{,}1(2)$; $-3\frac{9}{14}$; 0; -17; $5{,}01$; 18; $7\frac{5}{11}$; $\frac{1}{99}$; -371; -46

2. Precizați trei numere care:
a) aparțin mulțimii $\mathbb{Z}$ şi nu aparțin mulțimii $\mathbb{N}$;
b) aparțin mulțimilor $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{Z}$;
c) aparțin mulțimii $\mathbb{Q}$ şi nu aparțin mulțimii $\mathbb{Z}$;
d) aparțin mulțimilor $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$.

3. Găsiți perechile de fracții echivalente (egale):

a) $\frac{21}{14}, \frac{4}{18}, \frac{7}{2}, \frac{5}{10}, \frac{8}{36}, \frac{6}{8}, \frac{18}{24}, \frac{4}{8}$; b) $\frac{18}{27}, \frac{12}{16}, \frac{5}{8}, \frac{6}{9}, \frac{20}{32}, \frac{60}{80}, \frac{16}{28}, \frac{64}{112}$.

4. Găsiți perechile de numere egale:

a) $\frac{5}{6}$; $1\frac{1}{5}$; $-\frac{12}{5}$; $0{,}8(3)$; $-2\frac{1}{5}$; $\frac{6}{5}$; $-2{,}4$; $-2{,}(2)$; $-\frac{20}{9}$; $-2{,}2$.

b) $\frac{3}{4}$; $-\frac{21}{24}$; $-0{,}75$; $1{,}(3)$; $0{,}75$; $\frac{7}{8}$; $\frac{4}{3}$; $0{,}875$; $-\frac{7}{8}$; $-\frac{6}{8}$.

5. Selectați numerele:
a) cu perioadă simplă; b) cu perioadă mixtă.

$0{,}0(21)$; $-2431{,}49494949$; $4{,}(1234)$; $-0{,}722222$; $16{,}6363121212...$; $-3{,}(5)$; $-9{,}878787...$

6. Scrieți sub formă zecimală numerele:

a) $\frac{2}{5}, \frac{16}{3}, -2\frac{3}{8}, 1\frac{3}{7}, \frac{3}{16}, -\frac{4}{9}, \frac{25}{90}, -\frac{101}{90}$; b) $\frac{1}{8}, \frac{14}{9}, -3\frac{5}{6}, 2\frac{5}{7}, \frac{7}{18}, -\frac{7}{9}, \frac{34}{900}, \frac{21}{990}$.

7. Scrieți 4 fracții egale cu numărul: a) 0,6; b) 0,3; c) 2,4; d) 1,8.

8. Scrieți sub formă de fracție numerele:

a) 0,16; –3,14; 0,(8); –5,(7); 0,3(5); 8,21(6); –4,97(35);

b) –0,72; 5,36; –0,(42); –3,(18); 0,5(3); 12,3(45); –7,6(543).

9. Completați cu cifre sau paranteze, astfel încât să obțineți numere zecimale:
a) cu perioadă simplă, b) cu perioadă mixtă.

3,□□4□; 0,□8□□□; –41,7□□□...;

39,□27□□...; –6,3□1□□□...; 0,□9□4□□□... .

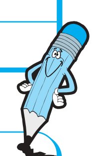
---

10. Completați cu cifre, astfel încât numărul să aibă o scriere zecimală:
a) cu perioadă simplă; b) fără perioadă; c) cu perioadă mixtă.

$\frac{13}{\square}$, $\frac{\square}{9\square}$, $\frac{\square}{3\square}$, $\frac{\square}{6}$, $\frac{7\square}{9\square}$, $\frac{34}{\square}$, $\frac{3\square}{3\square}$.

11. Copiați și completați:

Numărul	Aproximarea prin lipsă cu o			Aproximarea prin adaos cu o		
	zecime	sutime	miime	zecime	sutime	miime
0,3592						
–7,4157						
0,0735						
8,645						
–9,05						



12. Copiați și completați:

Numărul	Rotunjirea până la			
	unități	zecimi	sutimi	miimi
3,(54)				
6,2856				
0,3(56)				
–3,14285				

13. Lungimea unui segment este egală cu 2 875 463 cm. Transformați lungimea lui:
a) în decimetri, apoi rotunjiți rezultatul până la unități;
b) în metri, apoi rotunjiți rezultatul până la zecimi;
c) în kilometri, apoi rotunjiți rezultatul până la miimi.

14. Masa medie a unui bob de mazăre este egală cu 220,6 mg. Aflați masa a 100 de boabe:
a) în grame, rotunjind rezultatul până la zecimi;
b) în kilograme, rotunjind rezultatul până la miimi.

15. ***Magia numerelor!***
Scrieți sub formă zecimală numerele: $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{891}$, $\frac{1}{8991}$, $\frac{1}{89991}$. Ce observați?

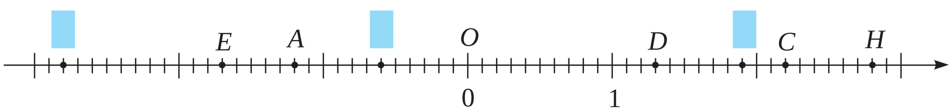
16. Aflați un număr rațional cuprins între numerele: a) 64,(98) și 65; b) $\frac{417}{500}$ și $\frac{418}{499}$.

17. Pentru ce valori ale lui n, $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $\frac{1}{n}$ se transformă într-o fracție periodică simplă: a) cu o cifră în perioadă; b) cu două cifre în perioadă?

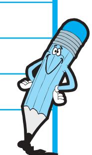
§2. Compararea și ordonarea numerelor raționale

2.1. Modulul numărului rațional

Examinați axa numerelor și tabelul, apoi completați-le cu numărul sau litera potrivită.



Punctul	Coordonata	Distanța de la punct până la originea axei
A	–1,2	1,2
		0
	1,3	
E		
		$2\frac{4}{5}$
		2,2
	2,8	
	1,9	



Ne amintim

Fie a şi b numere raționale. Distanța de la punctul $A(a)$ până la originea axei numerelor se numeşte **modulul** sau **valoarea absolută** a numărului a şi se notează cu $|a|$. Prin urmare, $|a| = \begin{cases} a, \text{ dacă } a > 0 \\ 0, \text{ dacă } a = 0 \\ -a, \text{ dacă } a < 0. \end{cases}$

Proprietățile modulului:

1° $|a| \geq 0$. 2° $|a| \geq a$. 3° $|ab| = |a| \cdot |b|$. 4° $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

• Completaţi adecvat:

Dacă $x \in \{-3;\ 21{,}4;\ \frac{5}{9};\ -7{,}(8);\ 16{,}6;\ -5{,}(5)\}$, atunci $|x| \in \{$ ____ $\}$.

2.2. Compararea şi ordonarea numerelor raţionale

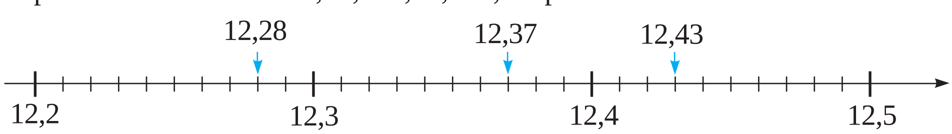
1 Examinaţi tabelul şi spuneţi în ce zi cursul dolarului a fost cel mai mic.

	1 $	1 €
Luni	12,37 lei	16,54 lei
Marţi	12,28 lei	16,57 lei
Miercuri	12,43 lei	16,48 lei

Rezolvare:

Metoda 1

Reprezentăm numerele 12,37; 12,28; 12,43 pe axa numerelor:



____ < 12,37 < ____

Metoda 2

Pasul 1

Comparăm zecile:

12,37
12,28
12,43

Acelaşi număr de zeci

Pasul 2

Comparăm unităţile:

12,37
12,28
12,43

Acelaşi număr de unităţi

Pasul 3

Comparăm zecimile:

12,37
12,28
12,43

2 < 3 < 4

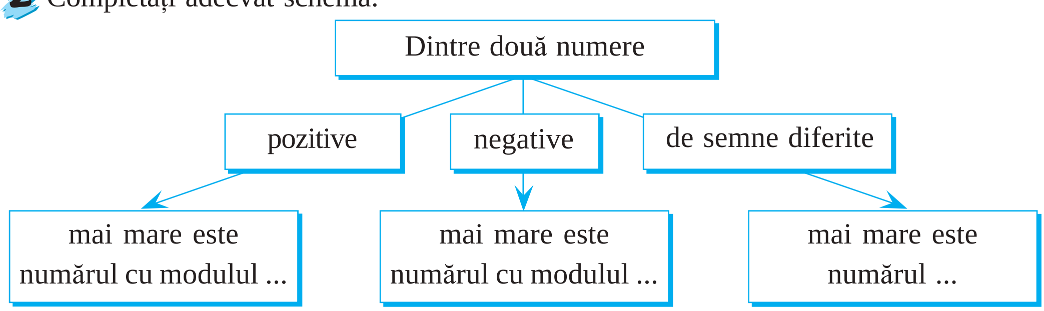
____ < 12,37 < ____

Răspuns: ____.

Dintre două numere reprezentate pe axă este mai mare numărul situat în dreapta celuilalt.

• Examinaţi tabelul problemei şi spuneţi în ce zi cursul monedei europene a fost cel mai mare.

2 Completaţi adecvat schema:



3 Scrieți prenumele participanților la proba de alergare la distanța de 200 m în ordinea descrescătoare a rezultatelor acestora:

Prenume	*Timp (sec.)*
Mihai	18,39
Petru	18,42
Ştefan	18,37
Radu	17,98
Ion	18,05
Victor	18,47

4 Observați și completați cu semnul sau numărul potrivit:

$>$ $=$ $<$

$\frac{5}{9} \bigcirc \frac{4}{9}$
$\uparrow$
$5>4$

$\frac{1}{3} \bigcirc \frac{2}{7}$
$\uparrow$
$\frac{1\cdot 7}{21} \bigcirc \frac{2\cdot \square}{21}$
$\uparrow$
$7 \bigcirc \square$

$\frac{7}{12} \bigcirc \frac{9}{16}$
$\uparrow$
$\frac{7\cdot 4}{\square} \bigcirc \frac{9\cdot \square}{48}$
$\uparrow$
$28 \bigcirc \square$

Exerciții și probleme

1. Aflați modulul numărului: a) $-12,9$; b) $1\frac{3}{4}$; c) $-71,(43)$; d) $19,5(83)$.

2. Completați adecvat:

   a) dacă $a \in \left\{-17,8;\ 0;\ \frac{9}{11};\ -21,(4);\ -\frac{9}{11}\right\}$, atunci $|a| \in \{\quad\}$;

   b) dacă $a \in \{2,93;\ -3;\ \frac{15}{4};\ 7\frac{2}{3};\ -8\}$, atunci $|a| \in \{\quad\}$.

3. Reprezentați pe axa numerelor punctele corespunzătoare numerelor cu modulul:
   a) egal cu 2,5;
   b) număr natural mai mic decât 4;
   c) număr natural mai mare decât 3 și mai mic decât 7.

4. Aflați x, dacă:

   a) $|x| = 18{,}1$; b) $-|x| = -2\frac{2}{7}$; c) $7-|x| = 17$; d) $|x-0{,}9| = 0{,}9$; e) $|x| = 0$.

5. Substituiți $\bigcirc$ cu unul dintre semnele $<$, $=$, $>$, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

   $>$ $=$ $<$

   a) $\frac{8}{15} \bigcirc \frac{7}{15}$; $-\frac{8}{15} \bigcirc -\frac{7}{15}$; $59{,}317 \bigcirc 59{,}238$; $\frac{3}{16} \bigcirc \frac{5}{18}$; $-1\frac{4}{9} \bigcirc -1,(4)$.

   b) $\frac{7}{3} \bigcirc \frac{7}{5}$; $-\frac{7}{3} \bigcirc -\frac{7}{5}$; $18,(7) \bigcirc 18{,}77$; $\frac{9}{10} \bigcirc -\frac{10}{9}$; $-\frac{9}{4} \bigcirc -3{,}25$.

6. Completați adecvat:

a) dacă $|a| \in \left\{1,3;\ 4;\ 0,(3);\ 1\frac{1}{9};\ \frac{3}{5}\right\}$ şi $a<0$, atunci $a \in \{\qquad\qquad\}$;

b) dacă $\left|\frac{a}{2}\right| \in \left\{1,7;\ \frac{1}{7};\ 2,3(4)\right\}$ şi $a<0$, atunci $a \in \{\qquad\qquad\}$.

7. Aflați $|a|$, dacă distanța dintre punctele $A(a)$ şi $B(-a)$ este egală cu 17,82.

8. *Adevărat* sau *fals*?

a) Dacă $a \neq 0$, atunci $|a| = a$.

b) Dacă $|a| = -a$, atunci $a = 0$.

c) Dacă $a = b$, atunci $|a| = |b|$.

d) Dacă $|a| = |b|$, atunci $a = b$.

9. Determinați numărul cu cel mai mare modul:

a) $5\frac{3}{4}$; $-5,72$; $5,7(3)$; $-5,(7)$; $5\frac{5}{6}$;

b) $8,(8)$; $-8\frac{7}{9}$; $8,8(7)$; $8\frac{9}{11}$; $-\frac{71}{8}$.

10. Explicitați modulul:

a) $|x+5|$, dacă $x>1$;

b) $|x-3|$, dacă $x<2$;

c) $|7-x|$, dacă $x<-1$;

d) $|8-x|$, dacă $x>8$.

Model:
$|3-x|$, $x>4$.
Dacă $x>4$, atunci $3-x<0$.
Prin urmare, $|3-x| = -(3-x) = x-3$.

11. *Adevărat* sau *fals*?

a) Dacă $a>4$, atunci $-|a|-|-a|+2|a+1|-|3a-1|-3=-3a$.

b) Dacă $a<-4$, atunci $|a|+|-a|-4|a+2|+|3a|-8=a$.

12. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:

a) $|x+3,5| = 7,3$;

b) $|18-x| = 3,24$;

c) $|3x+9| = -6$;

d) $|0,01x-0,02| = 0$.

13. Calculați valoarea expresiei:

a) $4|a-1|-6|b+1|+3$ pentru $a=-3$, $b=-0,5$;

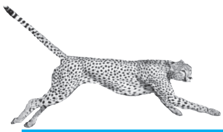
b) $0,9|a+3|-3\frac{2}{5}|a+b|-9$ pentru $a=-4$, $b=5$.

14. Reprezentând pe axa numerelor punctele $A(-7,5)$, $C\left(-8\frac{7}{15}\right)$, $D\left(\frac{31}{6}\right)$, $H(-8,(4))$, $I(-8,4)$, $K\left(-\frac{31}{4}\right)$, $R(5)$, $S(-10)$, $C(-8,(2))$, se obține numele celui care în 1623 a inventat prima maşină-automat capabilă să efectueze adunări şi scăderi. Aflați numele acestui inventator.

15. Cine se mişcă cel mai repede? Cine se mişcă cel mai încet?

Gazela aleargă 5 km în 3 min.

Cangurul sare în 2 min 1 km.



Ghepardul aleargă 900 m în 30 sec.

Struțul fuge 2 km în 90 sec.

16. Comparați numerele x şi y, dacă:

a) $\frac{x}{y}=1{,}14$ şi $x>0$;   b) $\frac{x}{y}=1\frac{2}{5}$ şi $x<0$;

c) $\frac{x}{y}=-0{,}91$ şi $x>0$;   d) $\frac{x}{y}=-0{,}83$ şi $x<0$.

17. Scrieți crescător numerele şi trageți concluzia:

a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1+3}{2+4}$;   b) $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2+1}{5+3}$;

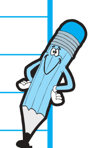
c) $\frac{2}{3}, 2, \frac{2+2}{3+1}$;   d) $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1+1}{4+5}$.

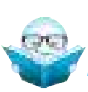
18. Aplicând concluzia exercițiului **17**, scrieți trei fracții cuprinse între:

a) $1\frac{1}{2}$ şi $1\frac{2}{3}$;   b) $5\frac{1}{4}$ şi $5\frac{1}{3}$.

19. Completați tabelul (rotunjind până la sutimi). Scrieți denumirile țărilor în ordinea crescătoare a densității populației lor.

Țara	Suprafața (km^2)	Numărul de locuitori (milioane)	Densitatea populației $\left(\frac{\text{loc.}}{\text{km}^2}\right)$
Moldova	33 800	3,64	
România	237 500	21,5	
Rusia	17 075 000	141,83	
Ucraina	603 700	46,39	
Belgia	30 500	10,63	
Franța	643 400	62	





MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

20. Completați cu numere cele 5 casete, astfel încât suma tuturor numerelor să fie pozitivă, iar suma oricăror 3 numere vecine să fie negativă.

§ 3. Operații cu numere raționale

3.1. Adunarea și scăderea numerelor raționale

1 Observați și completați adecvat:

a) $\frac{1}{7}+\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3}{21}+\frac{2\cdot 7}{21}=\frac{\square}{21}=\frac{\square}{\square}$;

b) $29{,}7163+483{,}56=\square$;

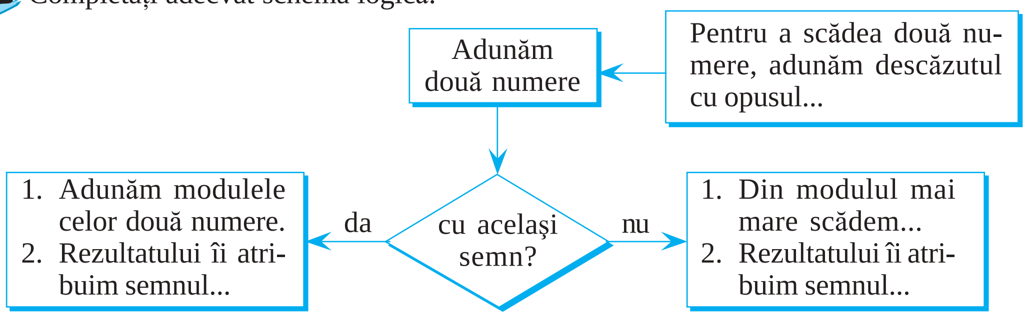
$$\begin{array}{r} 29{,}7163\ + \\ 483{,}56\boxed{00} \\ \hline \square{,}2763 \end{array}$$

c) $-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=-\frac{5}{6}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{-5+\square}{6}=-\frac{\square}{6}=-\frac{\square}{\square}$;

d) $-17{,}491-67{,}18=-17{,}491+(-67{,}18)=-(17{,}491+\square)=-\square$;

e) $\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\square}{7}=\frac{\square+\square}{14}=\frac{\square}{\square}$.

2 Completați adecvat schema logică:



3.2. Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale

1 Observați și completați cu numere potrivite:

a) $\frac{9}{10}\cdot\frac{2}{15}=\frac{9\cdot 2}{10\cdot 15}=\frac{3\cdot\square}{5\cdot 5}=\frac{\square}{\square}$;

b) $-4{,}12\cdot 3{,}8=-\square$;

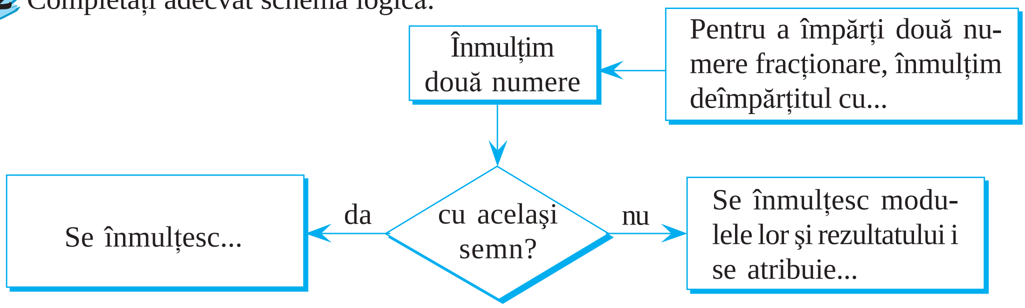
$$\begin{array}{r} 4{,}12\ \times \\ 3{,}8 \\ \hline 3296 \\ 1236 \\ \hline \square{,}656 \end{array}$$

c) $\frac{3}{8}:\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{4}{\square}\right)=-\frac{3\cdot 4}{8\cdot\square}=-\frac{\square}{\square}$;

d) $-0{,}42:(-2{,}8)=-4{,}2:(-28)=\square$.

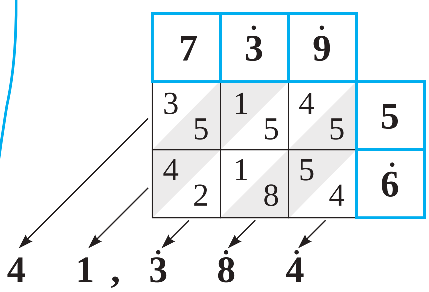
$$\begin{array}{r|l} 4{,}2 & 28 \\ \cline{2-2} -28 & 0{,}1\square \\ \cline{1-1} 140 & \\ -\square & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

2 Completați adecvat schema logică:



INTERESANT ȘI UTIL

În secolul al XV-lea în Italia era cunoscută metoda de înmulțire a numerelor cu ajutorul așa-numitei *lattice*. De exemplu, pentru a calcula 7,39 · 5,6 se proceda astfel:



① Se scria produsul dintre numerele aflate în coloana i și linia j în celula situată la intersecția coloanei i și liniei j.

② Se adunau numerele de pe fiecare fâșie oblică, scriind la rezultat cifra unităților, iar cifra zecilor adunând-o la următoarea sumă.

③ Se scria virgula după regula cunoscută.

$7{,}39 \cdot 5{,}6 = 41{,}384$

3.3. Proprietățile operațiilor aritmetice cu numere raționale

• Substituiți cu unul din cuvintele *adunare*, *înmulțire*, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

a) Operația de ______ este comutativă.

b) Operația de ______ este asociativă.

c) Operația de ______ este distributivă față de operația de ______.

d) Numărul 0 este element neutru pentru operația de ______.

e) Numărul 1 este element neutru pentru operația de ______.

Aplicăm

Utilizând proprietățile operațiilor aritmetice, să calculăm suma 301 + 302 + ... + 380.

Explicăm

$301 + 302 + ... + 380 = (301 + 380) + (302 + 379) + (303 + 378) + ... + (340 + 341) =$

$= \underbrace{681 + 681 + ... + 681}_{\text{40 de termeni}} = 40 \cdot 681 = 27240.$

• Calculați similar: a) 224 + 225 + ... + 399; b) 110 + 111 + ... + 400.

Exerciții și probleme

În exercițiile **1–7** efectuați calculele.

1. a) $\frac{5}{12}+\frac{9}{12}$; b) $\frac{4}{15}-\frac{7}{15}$; c) $\frac{2}{21}+\frac{1}{7}$;
d) $\frac{3}{16}-\frac{9}{24}$; e) $-\frac{7}{9}+\frac{8}{10}$; f) $-\frac{11}{12}-1\frac{2}{5}$.

2. a) $18{,}349+26{,}945$; b) $3{,}647-8{,}55$; c) $-19{,}71+6{,}853$;
d) $-6{,}42(8)+17{,}19$; e) $-5{,}009-8,(45)$; f) $12345{,}6789+98765{,}4321$.

3. a) $4\frac{1}{7}+2{,}72$; b) $15{,}94-15\frac{9}{11}$; c) $-2\frac{2}{3}+3,(7)$; d) $-8{,}0(8)-5\frac{7}{9}$.

4. a) $\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{5}$; b) $\frac{36}{44}\cdot\frac{11}{12}$; c) $3\frac{12}{16}\cdot\frac{4}{10}$; d) $2\frac{1}{4}\cdot 1\frac{23}{45}$.

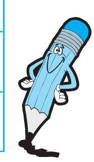
5. a) $\frac{7}{16}:\frac{9}{16}$; b) $-\frac{11}{28}:\frac{33}{56}$; c) $3\frac{3}{4}:\left(-2\frac{11}{12}\right)$; d) $(-24):\left(-5\frac{7}{13}\right)$.

6. a) $4{,}18\cdot 3{,}5$; b) $-6{,}04\cdot 2{,}95$; c) $1{,}23\cdot(-4{,}56)$; d) $-6{,}54\cdot(-3{,}21)$.

7. a) $1{,}962:0{,}9$; b) $-19{,}21:3{,}4$; c) $47\frac{17}{20}:(-6{,}38)$; d) $-64{,}8:\left(-6\frac{3}{4}\right)$.

8. Completați tabelul alăturat cu numere raționale, astfel încât pe fiecare linie, coloană și diagonală să obțineți aceeași sumă.

0,4	$\frac{9}{10}$	
	0,5	$\frac{7}{10}$
$\frac{4}{5}$		



9. Calculați:

a) $\left[3{,}8(3)-2,(54)\cdot\frac{11}{28}\right]:2,(3)$;

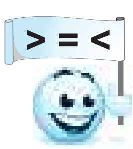
b) $[0,(5)+1,(75)+0{,}3(6)]:\left(\frac{1}{4}+2\frac{5}{13}+\frac{109}{156}\right)+0{,}19(60)$;

c) $123456{,}789\cdot 8+0{,}009-(12345{,}678\cdot 80+0{,}09)$;

d) $\left[0{,}278:13{,}9+(2-0{,}47):\frac{3}{20}\right]:102{,}2+3{,}4\cdot 1\frac{4}{17}$.

10. ***Curios și... periculos!***

Comparați și... NU trageți concluzia:



a) $\frac{11}{7}+\frac{11}{4} \bigcirc \frac{11}{7}\cdot\frac{11}{4}$; $\frac{11}{8}+\frac{11}{3} \bigcirc \frac{11}{3}\cdot\frac{11}{8}$; $\frac{5}{2}+\frac{5}{3} \bigcirc \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3}$;

b) $1\cdot\frac{1}{2} \bigcirc 1-\frac{1}{2}$; $3\cdot\frac{3}{4} \bigcirc 3-\frac{3}{4}$; $11\cdot\frac{11}{12} \bigcirc 11-\frac{11}{12}$;

$5\cdot\frac{5}{6} \bigcirc 5-\frac{5}{6}$; $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} \bigcirc \frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

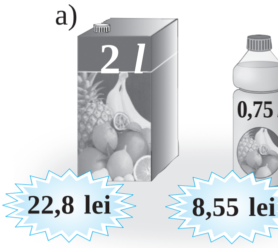
11. Completați cu numere potrivite:

a) $2\frac{2}{5}$ m = ▢ cm, $4\frac{1}{8}$ kg = ▢ g, $3\frac{5}{6}$ min = ▢ s;

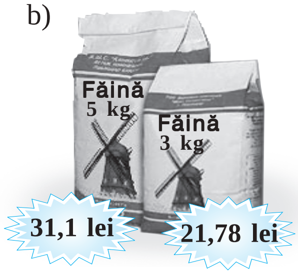
b) $9\frac{1}{4}$ t = ▢ kg, $\frac{4}{9}$ m = ▢ cm, $7\frac{2}{3}$ h = ▢ min.

12. Care produs este mai convenabil de cumpărat?

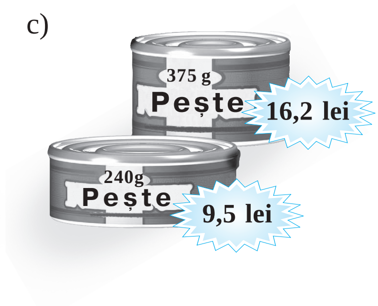
a)



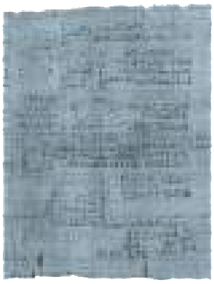
b)



c)



13. Aflați a 2012-a zecimală a fracției $\frac{7}{11}$.



14. Papirusul Rhind (datat în jurul anului 1650 î.H.) conține informații despre descompunerea fracțiilor în fracții elementare, de exemplu:

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}.$$

Aflați numitorul x al ultimei fracții elementare.

15. Ce număr trebuie scăzut din numărătorul fracției $\frac{537}{463}$ și adunat cu numitorul ei, astfel încât să obținem o fracție echivalentă cu fracția $\frac{1}{9}$?

16. Aflați cea mai mare fracție cu valoarea mai mică decât 0,(3), știind că suma dintre numărătorul și numitorul ei este egală cu 101.

17. Aflați toate fracțiile pozitive cu numărătorul și numitorul mai mici decât 100, care pot fi „simplificate” cu aceeași cifră. De exemplu: $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$.

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

18. Suma celor cinci numere de pe fiecare linie, coloană și diagonală trebuie să fie aceeași. Pentru aceasta trebuie folosite trei numere naturale diferite, ori de câte ori este necesar. Care sunt aceste trei numere?

	7		27	13
6	20			32
22	23	16	9	10
				14
19	9	20		

§4. Ridicarea la putere cu exponentul număr natural a unui număr rațional

1 Banca „Dinbanleu” oferă 20% dobândă anuală compusă pentru sume depuse pe un termen de cel puțin 3 ani. Ce sumă va fi pe cont peste 3 ani, dacă depunem 625 lei? Dar peste 4 ani?

Explicăm

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

Peste 1 an	$625 + \frac{1}{5} \cdot 625 = 625\left(1 + \frac{1}{5}\right) = 625 \cdot \frac{6}{5} \leftarrow S_1$
Peste 2 ani	$S_1 + \frac{1}{5} \cdot S_1 = S_1\left(1 + \frac{1}{5}\right) = 625 \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right)^2 = 625 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 \leftarrow S_2$
Peste 3 ani	$S_2 + \frac{1}{5} \cdot S_2 = S_2\left(1 + \frac{1}{5}\right) = 625 \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right)^3 = 625 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^3$ (lei) $\leftarrow S_3$
Peste 4 ani	$\square$ (lei)

Calculăm: $625 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 625 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} = 625 \cdot \frac{216}{125} = 1080$ (lei).

$625 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^4 = \square$.

Răspuns: 1080 lei; $\square$ lei.

Dacă $a \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, atunci $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}} = a^n$

exponentul puterii

puterea

baza puterii

$a^0 = 1,\ a \neq 0;\quad a^1 = a;\quad 0^0$ nu are sens.

2 Calculați și trageți concluzia:

a) $2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32 = 2^{\square}$;

b) $(2 \cdot 5)^4 = 10^4 = \square = 2^4 \cdot \square^4$;

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \square = \frac{\square^5}{3^5}$;

d) $\frac{4^5}{4^2} = \square = 4^{\square}$;

e) $(3^2)^3 = 9^3 = \square = 3^{\square} = 3^{2 \cdot \square}$;

f) $(-1)^{10} = \square$;

g) $(-1)^{15} = \square$.

Reguli de calcul cu puteri

Pentru orice numere raționale nenule a, b şi orice numere naturale m şi n, unde $m \geq n$:

1°	$1^m = 1$	4°	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	7°	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$
2°	$(-1)^{2m} = 1$	5°	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	8°	$(a^m)^n = a^{mn}$
3°	$(-1)^{2m+1} = -1$	6°	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	9°	$\lvert a \rvert^2 = a^2$

• Formulați verbal regulile de calcul cu puteri.

Exerciții și probleme

1. Calculați:

a) $\left(\dfrac{8}{11}\right)^2$; b) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$; c) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^4$; d) $\left(-\dfrac{5}{6}\right)^3$; e) $\left(1\dfrac{6}{7}\right)^2$.

2. Calculați:

a) $2{,}3^2$; b) $(-0{,}5)^3$; c) $(-2{,}1)^4$; d) $13{,}72^0$; e) $\lvert -2 \rvert^3$.

3. Completați cu numere potrivite:

a) $0{,}9^5 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}9^{\square}$; b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\square} \cdot \dfrac{4}{9} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^7$; c) $(-6{,}1)^{11} : 6{,}1^{10} = \square$;

d) $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{\square} : \left(\dfrac{3}{5}\right)^{\square} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^3$; e) $\left|-\dfrac{3}{5}\right|^2 \cdot \left(-\dfrac{3}{5}\right)^3 = -\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\square}$.

4. Calculați:

a) $\left(1\dfrac{1}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^2 + \left(1\dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{10}\right)^2$; b) $\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3\right]^6 : 0{,}5^{12} - \dfrac{1}{32}$.

5. Calculați:

a) 1^{2007}; b) $(-1)^{2007}$; c) 1^{44}; d) $(-1)^{44}$;

e) $(-1)^3 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)$; f) $(-1)^{15} \cdot 1^{27} \cdot (-1)^{32}$; g) $\dfrac{(-1)^7}{(-1)^8}$; h) $((-1)^5)^{20}$.

6. O bancă oferă 10% dobândă anuală compusă.

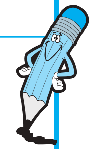
a) Ce sumă va fi în cont peste 3 ani, dacă depunem 1000 lei?

b) Ce sumă va fi în cont peste 4 ani, dacă depunem 5000 lei?

7. Un perete dreptunghiular are dimensiunile 4,2 m şi 6,72 m. O placă de faianță are dimensiunile 28 cm şi 21 cm. De câte plăci de faianță este nevoie pentru a acoperi peretele (distanța dintre fiecare două plăci vecine nu se va lua în considerare)?

8. Copiați și completați tabelul (rotunjiți până la sutimi).

Numele angajatului	Nr. de zile lucrate	Plata pentru o zi (lei)	Asigurarea medicală 3,5%	Impozit pe venit 7%	Contribuție individuală la asigurarea socială 6%	Spre achitare
Ion Moraru	22	200				
Vasile Olaru	21	250				
Alina Albu	23	220				
Gheorghe Ursu	23	180				



9. Calculați aplicând proprietăți ale operațiilor aritmetice:

a) $(2{,}18\cdot 6{,}791+2{,}18\cdot 3{,}209)\cdot 3{,}14-1{,}8\cdot 3{,}14$;

b) $-9{,}25\cdot\dfrac{(16{,}2\cdot 3^2+16{,}2-28{,}8)\cdot 0{,}25}{9{,}25}$.

10. Aflați valoarea lui x din egalitatea:

a) $[(3^{10}\cdot 3^5)^2:81+3\cdot(9^3)^4]:x=3^{25}$; b) $\dfrac{2^{2007}}{4^{1004}}=\dfrac{x}{0{,}5}$.

11. Reprezentați numărul ca produs de două puteri cu același exponent (baza puterii să fie număr natural, diferită de 1):
a) 1 000 000; b) 32 000 000; c) 24 300 000.

Model: $144=3^2\cdot 4^2$.

12. Aflați ultima cifră a numărului:
a) 2^{2012}; b) 3^{2012}; c) 4^{2012}.

13. Aflați numărul natural n din egalitatea $2^{2n}-4=3(4+4^2+\ldots+4^{2011})$.

14. *Numere mari!*

Pentru distanțe foarte mari se utilizează unitatea de măsură *an-lumină*. Un *an-lumină* este distanța străbătută de lumină într-un an.

a) Luând în considerare că viteza luminii este egală cu 298 000 km/s și că anul are, în medie, 365,25 zile, calculați lungimea unui *an-lumină* în kilometri.

b) Galaxia cea mai apropiată de Sistemul Solar este Norul Andromedei, care se află la distanța de $2{,}25\cdot 10^6$ *ani-lumină*. Exprimați această distanță în kilometri.

c) Cea mai apropiată de Pământ este steaua Proxima Centauri, aflată la 4,2 *ani-lumină*. Exprimați această distanță în kilometri.

15. *Este interesant!*

Un googol este cel mai mare număr natural care are nume. Câte cifre are numărul 0,125 googol dacă 1 googol = 10^{100}?

§5. Ecuații în mulțimea numerelor raționale

1 Mihai a cumpărat de la o casă de schimb valutar 60 dolari. Care este cursul dolarului față de leul moldovenesc, dacă, plătind cu o bancnotă de 1000 lei, Mihai a primit rest 257 lei şi 20 bani?

Explicăm

Notăm cu x cursul dolarului, adică prețul în lei al unui dolar. Obținem

$$\boxed{60 \cdot x + 257{,}2 = 1000}$$

ecuație cu necunoscuta x

257 lei şi 20 bani sau 257,2 lei

Rezolvăm ecuația:

$$60x = \underbrace{1\,000 - 257{,}2}_{\text{costul dolarilor}} \qquad x = \frac{\square}{60} \qquad x = \square \text{ (lei)} \;\leftarrow \text{prețul dolarului}$$

Numărul $\square$ este **soluția** ecuației $60x + 257{,}2 = 1000.$

Răspuns: $\square$ lei.

În procesul rezolvării problemei am „trecut” de la ecuația inițială la o altă ecuație, echivalentă cu cea inițială.

- Valoarea necunoscutei pentru care ecuația se transformă într-o egalitate adevărată se numeşte **soluție a ecuației**.
- **A rezolva ecuația** înseamnă a afla soluțiile ei sau a arăta că ea nu are soluții.
- Mulțimea soluțiilor ecuației se notează cu S.

Definiție. Două **ecuații** se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.

Între ecuațiile echivalente se scrie semnul „$\Leftrightarrow$”(se citeşte „echivalent”).

Prin urmare, $60x + 257{,}2 = 1000 \Leftrightarrow 60x = 1000 - 257{,}2.$

2 Care dintre următoarele **proprietăți ale egalităților numerice** s-au folosit la rezolvarea problemei?

Pentru orice numere raționale a, b, c, dacă $a = b$, atunci:

1° $a + c = b + c$ 2° $a - c = b - c$ 3° $a \cdot c = b \cdot c$ 4° $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, unde $c \neq 0$.

Observație. Proprietățile enunțate se folosesc pentru a obține ecuații echivalente.

3 Selectați perechile de ecuații echivalente:

***Model*:** $2x - 9 = 3 \Leftrightarrow x - 4{,}5 = 1{,}5$

$\frac{2}{5}x - \frac{1}{5} = 4$ | $3x + 3 = 15$ | $22x = 400$ | $1{,}1x - 1 = 3$ | $4{,}5x = 18$

$0{,}11x = 2$ | $x + 1 = 5$ | $4 + \frac{2}{5}x = \frac{1}{5}$ | $2x = -19$ | $2x = 21$

• Rezolvați ecuația pentru care nu ați găsit ecuația echivalentă.

Exerciții și probleme

1. Care dintre numerele -3; $\frac{4}{5}$; $2{,}04$; $-7{,}9$; 3 sunt soluții ale ecuației:

a) $3x-6=0{,}12$;   b) $-4x+3{,}2=0$;

c) $5-0{,}4x=3{,}8$;   d) $\frac{2}{3}x=1{,}2^2-0{,}08$?

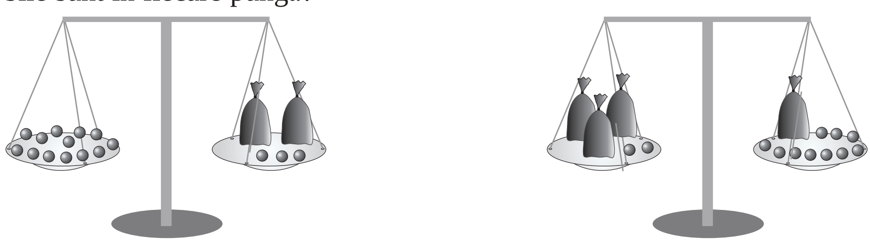
2. Rezolvați ecuația în mulțimea numerelor raționale:

a) $x-2{,}4=8$;   b) $x+3{,}6=0{,}5$;   c) $-x+8{,}2=6$;

d) $5-x=-11{,}7$;   e) $-\frac{3}{4}x=3{,}12$;   f) $2{,}5x-7{,}2=1{,}8$;

g) $2\frac{1}{3}x+0{,}08=1{,}2$;   h) $-5\frac{3}{5}x+0{,}48=-53$.

3. Balanțele se află în echilibru. Fiecare pungă conține același număr de bile identice. Câte bile sunt în fiecare pungă?

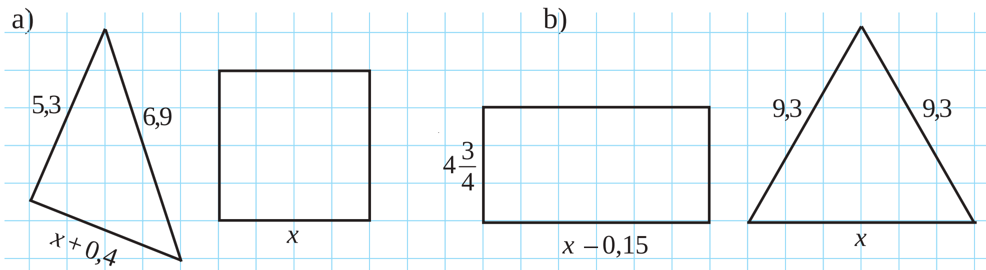


a)   b)

4. Dacă mărim un număr de 2,5 ori și scădem din rezultat 0,2, obținem 2. Aflați numărul.

5. Suma unui număr și a sfertului lui este egală cu 24,25. Aflați numărul.

6. Figurile din fiecare desen au același perimetru. Aflați x.



7. Prețul unei pâini este de 1 leu și 60 bani, plus o jumătate din preț. Cât costă pâinea?

8. Completați astfel încât numărul a să fie soluție a ecuației:

a) $a=\frac{1}{3}$, $4x-\boxed{}=0,(3)$;   b) $a=-2{,}8$, $-\frac{2}{7}\cdot x+\boxed{}=1{,}6$;

c) $a=1\frac{5}{6}$, $43,(18)-12x=\boxed{}$;   d) $a=12\frac{31}{37}$, $(x-\boxed{})\cdot 7{,}5(6)=0$.

9. Dacă micşorăm cu 10% lungimea laturii unui pătrat, aria lui se va micşora cu 19 cm^2. Aflați lungimea laturii pătratului.

10. De la 1 aprilie, salariul lunar al domnului Bănuț s-a mărit cu 30%. Din salariul lunar se reține: impozitul pe venit – 7%, impozitul în fondul social – 6% , asigurarea medicală – 3,5%. Ce salariu avea domnul Bănuț până la 1 aprilie, dacă acum el primeşte, lunar, 4342 lei?

11. Scrieți 3 ecuații echivalente în $\mathbb{Q}$ cu ecuația:

a) $3x+9=12$; b) $-0{,}08x+2=-0{,}4$;

c) $\frac{2}{7}-\frac{4}{5}x=1$; d) $6x=-2{,}(7)$.

12. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:

a) $x^2=49$; b) $x^2=\frac{25}{81}$; c) $4x^2=\frac{9}{32}$;

d) $(x-3)^2=0{,}01$; e) $3x^2-0{,}7=-0{,}22$; f) $(5-x)^2+1{,}9=2{,}15$.

13. Punctul A se află de două ori mai departe de originea axei numerelor decât punctul B. Aflați coordonatele punctelor A şi B, dacă ele se află de o parte şi de alta a originii axei şi $AB=13{,}8$ (unități). Câte soluții are problema?

14. Punctul A se află cu 0,86 unități mai aproape de originea axei numerelor decât punctul B. Aflați coordonatele punctelor A şi B, dacă ele se află de o parte şi de alta a originii axei şi $AB=14{,}72$ (unități). Câte soluții are problema?

PENTRU CAMPIONI

15. Aflați cifrele a şi b, $a\neq b$, astfel încât $\overline{0,a(b)}=\frac{a}{b}$.

16. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Demonstrați că n^5-5n^3+4n poate fi reprezentat ca produs de 5 numere naturale consecutive.

17. Aflați numărul $\overline{abcd}$, dacă $4\overline{abcd}=\overline{dcba}$.

18. Demonstrați că, dacă numărul $\overline{abcde}$ se divide cu 41, numărul $\overline{bcdea}$, de asemenea, se divide cu 41.

19. Aflați ultima cifră a numărului 3^{12345}.

20. Numerele m şi n sunt naturale. Calculați valoarea expresiei:

a) $(-1)^{m+n+m^2+n^2}$; b) $(-1)^{n+n^2+n^3+n^4}$.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 minute

Varianta 1

1. (2p) Ordonați crescător numerele:

$$-7{,}1;\ |-7{,}2|;\ \frac{23}{3};\ 7{,}(2).$$

2. (2p) Calculați:

a) $8\frac{1}{6}:2\frac{1}{3}$;

b) $(2{,}5+3)^2$;

c) $3\frac{3}{4}-1{,}25$.

3. (2p) Substituiți $\bigcirc$ cu unul dintre semnele <, =, >, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$$72:6 \ \bigcirc \ \left|2{,}56-9\frac{1}{5}\right|.$$

4. (2p) Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:

$$5\frac{2}{3}x-12=-2{,}5.$$

5. (2p) Doi muncitori au săpat un șanț de 126 m. Unul dintre ei a săpat cu 12 m mai mult decât celălalt. Câți metri de șanț a săpat fiecare muncitor?

Varianta 2

1. Ordonați crescător numerele:

$$-6{,}2;\ |-6{,}7|;\ \frac{33}{5};\ 6{,}(7).$$

2. Calculați:

a) $5\frac{5}{6}:3\frac{1}{3}$;

b) $(4{,}5-3)^2$;

c) $5\frac{1}{4}-3{,}75$.

3. Substituiți $\bigcirc$ cu unul dintre semnele <, =, >, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$$169:13 \ \bigcirc \ \left|15{,}24-2\frac{3}{5}\right|.$$

4. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$7\frac{2}{5}x+15=-5{,}2.$$

5. Doi elevi au rezolvat 98 de probleme. Unul dintre ei a rezolvat cu 14 probleme mai puțin decât celălalt. Câte probleme a rezolvat fiecare elev?

CAPITOLUL 2

Mulțimea numerelor reale

§1. Numere iraționale

1.1. Rădăcina pătrată

1 Observați și completați:

$3^2 = 9$, $\quad \square^2 = 4$, $\quad \square^2 = 25$, $\quad \square^2 = 49$.

Definiție. Numărul nenegativ b se numește ***rădăcina pătrată*** a numărului nenegativ a (sau radical din a) dacă $b^2 = a$.
Rădăcina pătrată a numărului nenegativ a se notează cu $\sqrt{a}$.

Exemplu. Deoarece $4^2 = 16$, rezultă că 4 este rădăcina pătrată a numărului 16.
Notăm: $\sqrt{16} = 4$.

2 Completați cu numere potrivite:

a) 3 este rădăcina pătrată a numărului 9, deoarece $\square = 9$. Notăm $\sqrt{9} = \square$.

b) 2,1 este rădăcina pătrată a numărului 4,41, deoarece $2{,}1^2 = \square$.
Notăm $\sqrt{\square} = 2{,}1$.

c) $\square$ este rădăcina pătrată a numărului 0,09, deoarece $\square^2 = 0{,}09$.
Notăm $\sqrt{0{,}09} = \square$.

d) –3 nu este rădăcină pătrată a niciunui număr, deoarece $-3 < \square$.

e) $\sqrt{16 \cdot 81} = \sqrt{1296} = 36 = 4 \cdot 9 = \sqrt{16} \cdot \sqrt{\square}$.

f) $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{\square} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}}$. $\qquad$ g) $\sqrt{7^2} = \square$, $\sqrt{(-7)^2} = \square$.

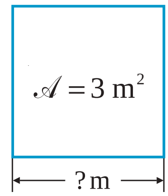
Proprietățile rădăcinii pătrate

Pentru orice numere raționale nenegative a și b:

1° $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; $\quad$ 2° $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, unde $b \neq 0$; $\quad$ 3° $\sqrt{a^2} = |a|$, unde $a \in \mathbb{Q}$.

1.2. Noțiunea *număr irațional*

Ştietot îi propune prietenului său Ştiemult să afle lungimea exactă a laturii unui pătrat cu aria de $3\ \text{m}^2$. Observați cum judecă Ştiemult.



Explicăm

Fie x lungimea laturii pătratului, unde $x > 0$.

Obținem: $x \cdot x = 3$ sau $x^2 = 3$.

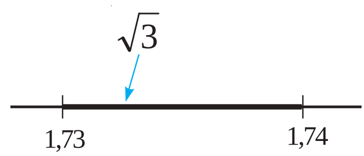
Prin urmare, $x = \sqrt{3}$.

$\sqrt{3} = ?$

$$\overset{1}{1^2} < 3 < \overset{4}{2^2} \quad \Rightarrow \quad 1 < \sqrt{3} < 2$$

$$\overset{2{,}89}{1{,}7^2} < 3 < \overset{3{,}24}{1{,}8^2} \quad \Rightarrow \quad 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$

$$\overset{2{,}9929}{1{,}73^2} < 3 < \overset{3{,}0276}{1{,}74^2} \quad \Rightarrow \quad 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$$



Prin urmare, lungimea laturii este cuprinsă între 1,73 m = 173 cm şi 1,74 m = cm.

Straniu! Nu există un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 3.

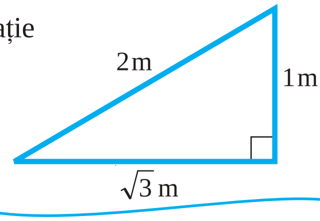
Într-adevăr, $\sqrt{3}$ nu este un număr rațional, el nu poate fi reprezentat ca număr zecimal periodic, prin urmare nu are nici scriere fracționară. El este un număr zecimal infinit neperiodic: $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ Numărul $\sqrt{3}$ este număr *irațional*.
Numerele iraționale reprezentate în formă zecimală au un număr infinit de zecimale şi nu sunt periodice.

Un **număr irațional** nu poate fi scris ca număr zecimal periodic (simplu sau mixt).
Numerele iraționale nu au scriere fracționară.
Numerele iraționale pot fi scrise ca numere zecimale infinite neperiodice.
Mulțimea numerelor iraționale se notează cu **I**.

Numere iraționale nu apar doar la extragerea rădăcinii pătrate. De exemplu, numărul irațional 0,1234567891011... nu este radicalul unui număr rațional. Numărul $\pi = 3{,}1415...$, de asemenea, este număr irațional.

INTERESANT ȘI UTIL

Chiar dacă lungimea laturii pătratului cu aria de $3\ \text{m}^2$ este un număr irațional, acest pătrat poate fi construit cu rigla şi compasul exact. Pentru aceasta, construim mai întâi un triunghi dreptunghic cu o catetă de 1 m şi ipotenuza de 2 m. Lungimea celeilalte catete a triunghiului este egală cu $\sqrt{3}$ m! Acest fapt se datorează relației dintre lungimile catetelor (a, b) şi lungimea ipotenuzei (c) triunghiului: $a^2+b^2=c^2$. Această relație se numeşte *teorema lui Pitagora*.



În cazul nostru, $\underset{\substack{\uparrow\\ 1}}{1^2}+\underset{\substack{\uparrow\\ 3}}{(\sqrt{3})^2}=\underset{\substack{\uparrow\\ 4}}{2^2}$.

1.3. Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional nenegativ

Calculați rădăcina pătrată a numărului 1423,601 până la a doua zecimală inclusiv (adică cu o exactitate de 2 zecimale).

Explicăm

① Despărțim numărul în grupe a câte două cifre, pornind de la virgulă spre dreapta şi stânga.

$\sqrt{14\ 23{,}60\ 10}$

② Găsim cel mai mare număr de o cifră (3) al cărui pătrat nu întrece primul număr de două cifre din stânga $(3^2<14)$. Scriem pătratul numărului găsit (9) sub 14. Sub linia orizontală scriem dublul numărului găsit (6). Aflăm diferența (5) şi coborâm următoarele două cifre.

$\sqrt{14\ 23{,}60\ 10}$ | 3
9 | 6
523

③ Găsim numărul de o cifră (7), astfel încât produsul lui şi al numărului de două cifre format de el şi de 6 (pe locul zecilor) să fie mai mic decât 523. Scriem numărul găsit (7) lângă 3.
Scriem produsul $67\cdot 7=469$ sub 523.
Calculăm diferența (54) şi coborâm următoarele două cifre.

$\sqrt{14\ 23{,}60\ 10}$ | 37
9 | $67\cdot 7=469$
5 23
4 69
54 60

④ Deoarece cifrele coborâte au depăşit virgula, după 37 scriem virgulă. În dreapta scriem dublul numărului 37 ş.a.m.d., până când obținem zecimala cerută.

$\sqrt{1423,6010}$	37,73
9	$67 \cdot 7 = 469$
523	$747 \cdot 7 = 5229$
469	$7543 \cdot 3 = 22629$
5460	
5229	
23110	
22629	
481	

Răspuns: $\sqrt{1423,601} = 37,73...$

- Calculați cu o exactitate de 3 zecimale lungimea laturii pătratului cu aria de $3\ \text{m}^2$.

1.4. Aproximarea și rotunjirea numerelor iraționale

1 Aproximați cu o sutime numărul $\sqrt{3}$: a) prin lipsă; b) prin adaos.

Explicăm

Aplicând calculatorul sau algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, obținem scrierea zecimală a numărului $\sqrt{3}$.

$\sqrt{3} = 1,7320508...$

zecimi, sutimi, miimi

Aproximarea prin lipsă cu o sutime 1,73 → $1,73 + 0,01$ → Aproximarea prin adaos cu o sutime 1,74

- Aproximați prin lipsă, apoi prin adaos cu o miime numărul 0,123456789101112...

2 Rotunjiți până la sutimi numerele $\sqrt{3}$ şi $\sqrt{5}$.

Explicăm

$\sqrt{3} = 1,7320508...$

↓

Cifra miimilor este 2.

↓

Deoarece $2 < 5$, rotunjirea numărului 1,7320508... este egală cu aproximarea respectivă prin lipsă.

↓

$\sqrt{3} \approx 1,73$

$\sqrt{5} = 2,2360679...$

↓

Cifra miimilor este 6.

↓

Deoarece $6 > 5$, rotunjirea numărului 2,2360679... este egală cu aproximarea respectivă prin adaos.

↓

$\sqrt{5} \approx 2,24$

Exerciții și probleme

1. Completați cu numere potrivite:

a) $11=\sqrt{\square}$; b) $0{,}8=\sqrt{\square}$; c) $1\frac{1}{4}=\sqrt{\square}$;

d) $0{,}01=\sqrt{\square}$; e) $1{,}5=\sqrt{\square}$; f) $4,(3)=\sqrt{\square}$.

Model:
Întrucât $10^2=100$,
rezultă că $10=\sqrt{100}$.

2. Calculați:

a) $\sqrt{25}$; b) $\sqrt{0{,}04}$; c) $\sqrt{144}$; d) $\sqrt{81}$; e) $\sqrt{\frac{9}{4}}$;

f) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; g) $\sqrt{4{,}5}\cdot\sqrt{2}$; h) $\sqrt{4\cdot 9^2}$; i) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$.

3. Selectați numerele raționale:

a) $\sqrt{2}$; -4; $\sqrt{9}$; $-\sqrt{9}$; $\sqrt{24}$; 1,18; 0,1234567891011...; 3,(7); –5,0(2).

b) $\frac{1}{4}$; $-\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{81}}$; $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; $(\sqrt{5})^0$; $(\sqrt{3})^3$; $(-1)^{2007}$; $(-1)^6\cdot(\sqrt{7})^4$.

4. Calculați:

a) $2{,}1^2$; b) $3{,}5^2$; c) $0{,}28^2$; d) $8{,}19^2$; e) $4{,}56^2$.

5. Scrieți un număr irațional cuprins între:

a) 5 și 6; b) 7 și 8; c) -5 și -4; d) 0 și 1.

6. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:

a) $x^2=9$; b) $x^2=25$; c) $x^2=\frac{1}{4}$; d) $x^2=8$; e) $x^2=-4$; f) $x^2=0$.

7. Selectați și completați cu numărul potrivit:

a) $\sqrt{2{,}89}=\square$; b) $\sqrt{15{,}21}=\square$; c) $\sqrt{0{,}1936}=\square$; d) $\sqrt{0{,}5184}=\square$.

1,7	1,07	1,3

3,1	3,81	3,9

0,34	0,54	0,44

0,82	0,72	0,68

8. Comparați numerele fără a extrage radicalul:

$>$ $=$ $<$

a) $\sqrt{8}$ și 3; b) 9 și $\sqrt{90}$;

c) 3,4 și $\sqrt{10}$; d) $\sqrt{19}$ și 4,5;

e) $\sqrt{39}$ și 6,2.

Model:
$\sqrt{15}<4$, deoarece $4=\sqrt{16}$.

9. Aplicând algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, calculați:

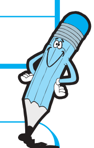
a) $\sqrt{549{,}9025}$; b) $\sqrt{326{,}8864}$; c) $\sqrt{7942{,}3744}$; d) $\sqrt{4912{,}6081}$.

10. Calculați până la a doua zecimală inclusiv:

a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{5}$; c) $\sqrt{7}$; d) $\sqrt{10}$.

11. Completați tabelul.

Numărul a	Aproximarea prin lipsă cu o			Aproximarea prin adaos cu o		
	unitate	zecime	sutime	unitate	zecime	sutime
$\sqrt{6}=2,44948...$						
$\sqrt{14}=3,74165...$						
$\sqrt{21}=4,58257...$						
$\sqrt{19}=4,35889...$						



12. Completați tabelul.

Numărul a	Rotunjirea numărului a până la			
	unități	zecimi	sutimi	miimi
$12,345678...$				
$-49,626226222...$				
$\sqrt{53}=7,2801098...$				
$\sqrt{0,6}=0,774596...$				

13. Ridicați la pătrat numărul:

a) 0,(4); b) 0,(7); c) 7,(3);

d) 1,8(3); e) 0,2(6); f) –2,(45).

Model:
$1,(3)^2=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}=2,5(4)$

14. Calculați cu exactitate de 1 cm lungimea laturii unui pătrat cu aria de:

a) $2\ \text{m}^2$; b) $3\ \text{m}^2$; c) $2,4\ \text{m}^2$; d) $6\ \text{m}^2$.

15. Calculați aria pătratului cu latura de:

a) 4,(3) cm; b) 2,(5) cm; c) $\sqrt{8,7}$ cm; d) $\sqrt{3,(7)}$ cm.

16. Extrageți rădăcina pătrată:

a) $\sqrt{0,(4)}$; b) $\sqrt{28,(4)}$; c) $\sqrt{2,(7)}$; d) $\sqrt{7,(1)}$; e) $\sqrt{53,(7)}$; f) $\sqrt{40,(1)}$.

Indicație. Reprezentați sub formă de fracție numărul de sub radical.

17. Extrageți rădăcina pătrată: a) $\sqrt{0,32(1)}$; b) $\sqrt{0,58(7)}$.

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

18. Observați și completați cu cifrele potrivite, fără a calcula:

$\dfrac{1}{7}=0,(142857)$, $\dfrac{2}{7}=0,(285714)$, $\dfrac{3}{7}=0,(428\square71)$,

$\dfrac{4}{7}=0,(57\square\square28)$, $\dfrac{5}{7}=0,(71\square\square\square5)$, $\dfrac{6}{7}=0,(85\square\square\square\square)$.

§2. Mulțimea numerelor reale

2.1. Mulțimea numerelor reale

Ştietot îi propune lui Ştiemult să numească o mulțime de numere în care rezultatele operațiilor aritmetice, ale ridicării la putere cu exponent natural şi ale extragerii rădăcinii pătrate să aparțină acestei mulțimi. Observați cum judecă Ştiemult.

Explicăm

Mulțimea numerelor raționale (adică $\mathbb{Q}$) nu satisface condițiile problemei, deoarece rădăcina pătrată nu întotdeauna este număr rațional. De exemplu, $\sqrt{3}$ nu este număr rațional. În mulțimea numerelor iraționale (notată cu **I**) nu întotdeauna rezultatul operațiilor menționate aparține mulțimii **I**. De exemplu, numerele $\sqrt{3}$ şi $-\sqrt{3}$ sunt iraționale, iar suma lor este 0 (care este un număr rațional).

Printre mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, **I** nu există o astfel de mulțime.

Construim o altă mulțime, aplicând operația reuniunii:

$\boxed{\mathbb{Q} \cup \mathbf{I}}$ ← **Mulțimea numerelor reale** care se notează cu $\mathbb{R}$.
Un număr real este rațional sau irațional.

Notații: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ← mulțimea numerelor reale nenule;

$\mathbb{R}_-$ ← mulțimea numerelor reale nepozitive;

$\mathbb{R}_+$ ← mulțimea numerelor reale nenegative;

$\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- \setminus \{0\}$ ← mulțimea numerelor reale negative;

$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ← mulțimea numerelor reale pozitive.

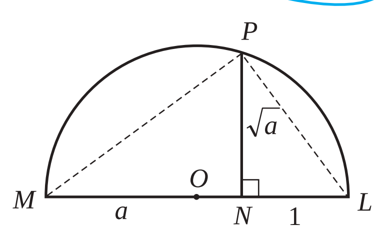
Răspuns: Mulțimea $\mathbb{R}$ satisface condițiile problemei.

- Substituiți cu una dintre mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, **I**, $\mathbb{R}$, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

a) $\square \subset \mathbb{Z}$. b) $\square \setminus \mathbb{Q} = \mathbf{I}$. c) $\square \cap \square = \varnothing$.

d) $\square \subset \square \subset \square \subset \mathbb{R}$. e) $\square \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. f) $\mathbb{N} \cap \square = \mathbb{N}$.

INTERESANT ŞI UTIL



Leonardo da Vinci ştia să calculeze rădăcini pătrate cu ajutorul construcțiilor geometrice. Pentru a determina $\sqrt{a}$, el construia un segment MN de lungime a şi, în prelungirea lui, segmentul NL de lungime 1. Apoi construia un semicerc de diametru ML, iar din punctul N trasa perpendiculara pe ML, care intersecta semicercul în punctul P.

Obținem $NP = \sqrt{a}$. Această egalitate rezultă din aşa-numita **teoremă a înălțimii** unui triunghi dreptunghic. Cum triunghiul MPL este dreptunghic $(m(\angle MPL) = 90°)$, rezultă că $NP^2 = MN \cdot NL$ sau $NP = \sqrt{MN \cdot NL}$.

2.2. Compararea și ordonarea numerelor reale

1 Ordonați crescător numerele $-\sqrt{7}$; 2,345...; $-2,(6)$.

Explicăm

$-\sqrt{7}$ și $-2,(6)$ — numere negative

2,345... — număr pozitiv

→ Cel mai mare este numărul

>
=
<

$-\sqrt{7}$ ◯ $-2,(6)$

$\approx -2,65$ ◯ $-2,66...$

$|-2,65| < |-2,66|$

La compararea numerelor reale se aplică aceleași reguli și metode ca și la compararea numerelor raționale.

Prin urmare, $\quad < \quad < 2,345...$

- Comparați numerele:

a) $\sqrt{9}$ și $\sqrt{16}$; b) $\sqrt{81}$ și $\sqrt{49}$; c) $\sqrt{5}$ și $\sqrt{3}$.

Trageți concluzia.

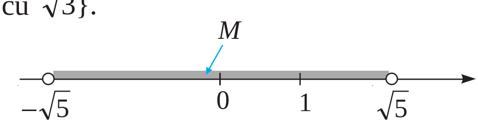
Dacă $a > b \geq 0$,
atunci $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

2 Reprezentați pe axă mulțimea:

a) $M = \{$numerele reale mai mari decât $-\sqrt{5}$ și mai mici decât $\sqrt{5}\}$;

b) $K = \{$numerele reale mai mici sau egale cu $\sqrt{3}\}$.

Rezolvare:

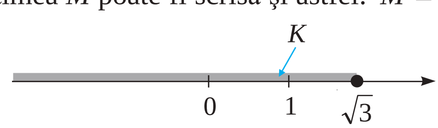


a) $\sqrt{5} \approx 2,24$. Numerele $-\sqrt{5}$ și $\sqrt{5}$ sunt egal depărtate de originea axei.

Numerele mulțimii M se află la o distanță mai mică de $\sqrt{5}$ de la originea axei.

Mulțimea M poate fi scrisă și astfel: $M = \{x \mid |x| < \sqrt{5}\}$.

b)



- Două **numere reale** diferite sunt **opuse** dacă se află pe axa numerelor la distanțe egale de originea axei.
- Modulul unui număr real are aceleași proprietăți ca și modulul unui număr rațional:

1° $|a| \geq 0$. 2° $|a| \geq a$.

3° $|ab| = |a| \cdot |b|$. 4° $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$. 5° $|a|^2 = a^2$.

3 Explicitați modulul: a) $|3-\sqrt{5}|$; b) $|\sqrt{2}-2|$.

Rezolvare:

a) Aflăm semnul numărului $3-\sqrt{5}$.

Deoarece $\sqrt{5}\approx 2{,}24$ şi $3>2{,}24$, rezultă că $3-\sqrt{5}>0$.

Prin urmare, $|3-\sqrt{5}|=3-\sqrt{5}$.

Răspuns: $3-\sqrt{5}$.

b) Aflăm semnul numărului $\sqrt{2}-2$.

Deoarece $\sqrt{2}\approx 1{,}41$ şi $1{,}41<2$, rezultă că $\sqrt{2}-2<0$.

Prin urmare, $|\sqrt{2}-2|=-(\sqrt{2}-2)=2-\sqrt{2}$.

Răspuns: $2-\sqrt{2}$.

Exerciții și probleme

1. Selectați numerele:
a) raționale;
b) iraționale;
c) reale pozitive;
d) iraționale negative.

$\frac{2}{\sqrt{3}}$; $-\frac{10}{11}$; $\sqrt{1{,}44}$; 21; $-\sqrt{81}$; $-\sqrt{33}$; $-2{,}(6)$; 0; $\sqrt{12}$; $-\frac{5}{9}$; $17{,}82$; $\sqrt{0{,}(4)}$

2. Comparați numerele:

a) $-6{,}2345...$ şi $0{,}1234...$; b) $\sqrt{71}$ şi $-\sqrt{80}$; c) $-\sqrt{\frac{5}{6}}$ şi 1;

d) $\sqrt{2}+3$ şi $-3\sqrt{2}$; e) $|-\sqrt{3}|$ şi $\sqrt{2}+1$; f) $|-\sqrt{7}|$ şi $|-2\sqrt{3}|$.

3. Aflați semnul numărului:

a) $\sqrt{17}-4$; b) $-7+\sqrt{47}$; c) $\frac{8}{9}-\sqrt{1{,}25}$; d) $\sqrt{10}-2\sqrt{5}$.

4. Care este opusul numărului:

a) $\sqrt{5}$; b) $\frac{\sqrt{7}}{7}$; c) $2-\sqrt{3}$; d) $-0{,}(2)$; e) $-\sqrt{2}+\frac{1}{3}$; f) $-6-2\sqrt{2}$?

5. Scrieți în ordine crescătoare numerele:

a) $3{,}(5)$; $-3\sqrt{5}$; $-5\sqrt{3}$.

b) $\frac{4}{7}$; $\sqrt{\frac{4}{7}}$; $-\frac{7}{4}$.

c) $4\frac{1}{2}$; $\left|-4\frac{2}{3}\right|$; $\sqrt{20}$.

d) $-8\frac{1}{3}$; $-8{,}1(3)$; $-8{,}3(1)$.

6. Reprezentați pe axă numerele:

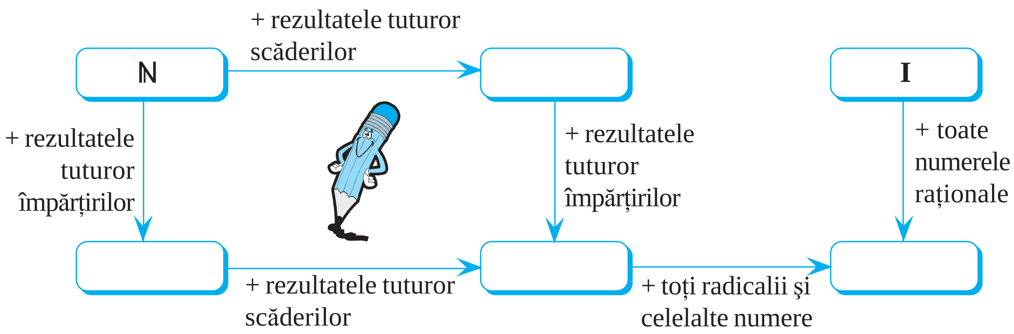
a) mai mari decât $\sqrt{8}$;

b) mai mici decât $2\sqrt{3}$;

c) pozitive mai mici decât $5{,}(3)$;

d) negative mai mari decât $-4\frac{5}{9}$.

7. Examinați schema și completați fiecare casetă cu una din mulțimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{R}$:



8. Scrieți numerele opuse care se află pe axă unul față de altul la distanța de:

a) $5\frac{5}{8}$; b) $3,(6)$; c) $4\sqrt{10}$; d) $2+\sqrt{20}$.

9. Explicitați modulul:

a) $|\sqrt{7}-4|$; b) $|9-\sqrt{80}|$; c) $|\sqrt{6}-2\sqrt{3}|$; d) $|-5+\sqrt{20}|$.

10. Reprezentați pe axă numerele reale:

a) mai mici decât $\frac{1}{3}$ și mai mari decât $-0,5$; b) cuprinse între -3 și $\sqrt{3}$;

c) mai mici decât $\sqrt{8}$ și mai mari decât -2; d) cuprinse între $-\sqrt{10}$ și $\sqrt{10}$.

11. Scrieți analitic, utilizând semnul modulului și semnele de comparație:

a) numărul a este cuprins între $-\sqrt{6}$ și $\sqrt{6}$;

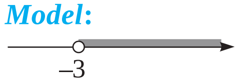
b) numărul b este mai mare decât $-\frac{1}{6}$ și mai mic decât $\frac{1}{6}$;

c) numărul c este mai mic decât -3 sau mai mare decât 3;

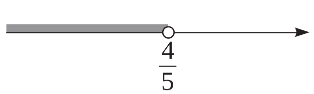
d) numărul d este mai mare decât 2,4 sau mai mic decât $-2,4$.

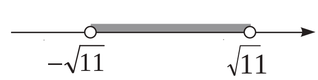
12. Se știe că numărul x aparține porțiunii colorate. Scrieți ce valoare poate avea x, utilizând semnele $<, \leq, >, \geq$:

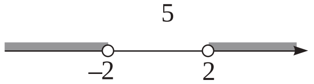
Model:

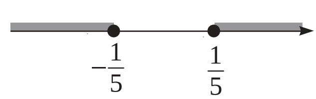


$x>-3$.

a) 

b) 

c) 

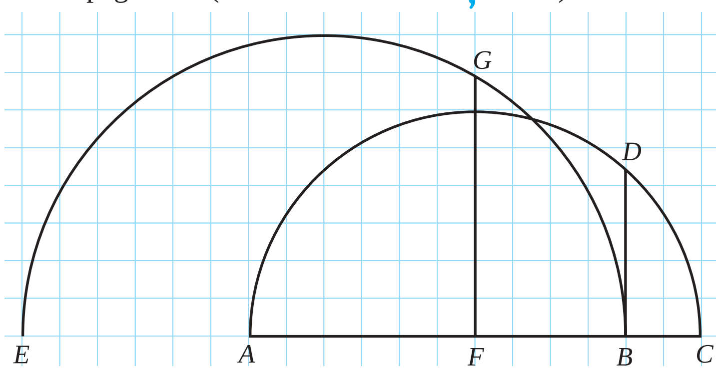
d) 

13. Comparați:

a) $\sqrt{2{,}1^2}$ cu $|2{,}1|$; b) $\sqrt{\left(-\frac{2}{7}\right)^2}$ cu $\left|-\frac{2}{7}\right|$;

c) $|-\sqrt{3}\cdot 2|$ cu $|-\sqrt{3}|\cdot|2|$; d) $\frac{|-9|}{|-4|}$ cu $\left|\frac{-9}{-4}\right|$.

14. Examinați desenul și stabiliți lungimea segmentului: a) BD; b) FG.
Notă. Lungimea unui pătrat al rețelei este de 0,5 cm.
Indicație. Vezi pagina 30 (rubrica ***Interesant și util!***).



15. Construiți pe caiet (sau pe o foaie cu rețea de pătrate) un segment cu lungimea de:
a) $\sqrt{7}$ cm; b) $\sqrt{5}$ cm; c) $\sqrt{3{,}5}$ cm; d) $\sqrt{5{,}5}$ cm.

§3. Operații cu numere reale

3.1. Operații aritmetice cu numere reale. Proprietăți

- Observați, calculați rotunjind cu o sutime și completați cu numere potrivite:

a) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\approx \square$

$2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}\approx 2\cdot 1{,}73+\square=\square$

$\approx 1{,}73$ $\approx 2{,}24$

Notăm: $a\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$.
Termenii $2\sqrt{7}$ și $5\sqrt{7}$ se numesc **radicali asemenea**.

b) $2\cdot\sqrt{7}:\frac{1}{4}-5\cdot\sqrt{7}\approx\square$

$2\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{4}{1}-5\sqrt{7}=8\cdot\sqrt{7}-5\sqrt{7}=\square\cdot\sqrt{7}\approx\square$

$\approx\square$

- Numerele $a\sqrt{b}$ şi $c\sqrt{b}$, unde $a, c \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}_+$, se numesc ***radicali asemenea***.
- La efectuarea calculelor numerele iraționale se aproximează cu numere raționale.
- La efectuarea operațiilor aritmetice cu numere reale se utilizează aceleaşi reguli şi proprietăți ca şi în cazul operațiilor aritmetice cu numere raționale.

Proprietățile operațiilor cu numere reale

Pentru orice numere reale *a*, *b*, *c*:

Adunarea şi înmulțirea sunt operații **comutative**.	$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$
Adunarea şi înmulțirea sunt operații **asociative**.	$a+(b+c)=(a+b)+c$ $a\cdot(b\cdot c)=(ab)\cdot c$
Pentru operația de adunare, 0 este **element neutru**.	$a+0=0+a=a$
Pentru operația de înmulțire, 1 este **element neutru**.	$a\cdot 1=1\cdot a=a$
Fiecare număr real *a* are un unic **opus** –*a*.	$a+(-a)=(-a)+a=0$
Fiecare număr real nenul *a* are un unic **invers** $\frac{1}{a}$.	$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1,\ a\neq 0.$
Înmulțirea este distributivă față de adunare şi față de scădere.	$a\cdot(b+c)=ab+ac$ $a\cdot(b-c)=ab-ac$

3.2. Puterea cu exponent natural a unui număr real

Operația de ridicare la putere cu exponent natural a numerelor raționale este valabilă şi în mulțimea numerelor reale şi posedă aceleaşi proprietăți.

Definim

Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ factori}} = a^n$$

exponentul puterii

puterea

baza puterii

$a^0=1,\ a\neq 0;\ \ a^1=a;\ \ 0^0$ nu are sens.

De exemplu, 2^3 este putere cu baza 2 şi exponentul puterii 3.

Regulile de calcul cu puteri cu exponent natural

Pentru orice numere reale nenule *a*, *b* şi orice numere naturale *m*, *n*, unde $m \geq n$:

1° $1^m=1$;

2° $(-1)^{2m}=1$;

3° $(-1)^{2m+1}=-1$;

4° $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;

5° $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$;

6° $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$;

7° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$;

8° $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$.

- Aplicați reguli de calcul cu puteri şi scrieți cât mai simplu:

a) $4{,}13^5\cdot 4{,}13^8$; b) $(2\sqrt{11})^3:(\sqrt{11})^2$; c) $\dfrac{-0{,}39^2}{0{,}13^2}$; d) $\left(-\dfrac{14}{9}\right)^3\cdot\left(\dfrac{3}{7}\right)^3$.

3.3. Operații cu radicali. Proprietăți

1 Găsiți perechile de expresii numerice cu aceeaşi valoare:

> Dacă a, b sunt numere reale nenegative, atunci $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

$4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{8}$ $\quad\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$ $\quad\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$ $\quad 8$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\sqrt{6}$ $\quad\sqrt{24}$ $\quad\sqrt{8}$ $\quad\sqrt{15}$ $\quad\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

Model: $(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2\cdot(\sqrt{5})^2 = 3\cdot 5 = \mathbf{15}$

$(\sqrt{15})^2 = \mathbf{15}$ $\quad\rightarrow\quad \sqrt{3}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{15}.$

Proprietățile radicalilor

Pentru orice numere reale nenegative a, b, c, d:

1° $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}.$

2° $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, unde $b \neq 0$.

3° $(\sqrt{a})^2 = a.$

4° $\sqrt{a^2} = |a|$, unde $a \in \mathbb{R}$.

2 Găsiți perechile de expresii numerice cu aceeaşi valoare:

$2\sqrt{10}$ $\quad -7\sqrt{2}$ $\quad\sqrt{(-8)^2\cdot 3}$ $\quad\sqrt{75}$ $\quad 4\sqrt{5}$ $\quad -3\sqrt{8}$

$\sqrt{16\cdot 5}$ $\quad -\sqrt{72}$ $\quad 5\sqrt{3}$ $\quad\sqrt{40}$ $\quad -\sqrt{7^2\cdot 2}$ $\quad -8\sqrt{3}$

Model: $(3\sqrt{8})^2 = 3^2\cdot(\sqrt{8})^2 = 9\cdot 8 = \mathbf{72}$

$(\sqrt{72})^2 = \mathbf{72}$ $\quad\rightarrow\quad 3\sqrt{8} = \sqrt{72}$

Pentru orice număr real a şi orice număr real nenegativ b:

- $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$ $\longleftarrow$ Scoaterea factorului de sub radical.
- $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}, & \text{dacă } a \geq 0, \\ -\sqrt{a^2 b}, & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$ $\longleftarrow$ Introducerea factorului sub radical.

3.4. Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale

Calculați valoarea expresiei numerice:

$$[-3\sqrt{5}+2^3\cdot(7\sqrt{5}-\sqrt{9}\cdot 2\sqrt{5})]:5.$$

⑥ ④ ⑤ ③ ① ② ⑦

Explicăm

I. Efectuăm operațiile din parantezele rotunde:

① $\sqrt{9}=3$

② $3\cdot 2\sqrt{5}=\square$

③ $7\sqrt{5}-\square=\square$

II. Efectuăm operațiile din parantezele drepte:

④ $2^3=8$

⑤ $8\cdot\square=\square$

⑥ $-3\sqrt{5}+\square=\square$

III. Efectuăm împărțirea:

⑦ $\square:5=\square$

Răspuns: $\square$

Ordinea efectuării operațiilor

1. Operațiile din paranteze (interioare, apoi exterioare).
2. Ridicarea la putere, extragerea rădăcinii pătrate.
3. Înmulțirea și împărțirea.
4. Adunarea și scăderea.

Exerciții și probleme

1. Calculați: a) $8{,}54-2{,}75$; b) $-0{,}189+4{,}793$; c) $3{,}17-2{,}4$; d) $6{,}37:1{,}3$;

2. Calculați, rotunjind rădăcina pătrată până la zecimi:
a) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}-\sqrt{6}$; c) $2\sqrt{8}-0{,}3\sqrt{8}$; d) $\frac{1}{3}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

3. Examinați fișele și completați șirul de radicali asemenea:
a) $\sqrt{8}$, ...
b) $-2\sqrt{5}$, ...
c) $\sqrt{0{,}3}$, ...
d) $7\sqrt{7}$, ...

$\sqrt{8}$ $\sqrt{5}$ $7\sqrt{7}$ $0{,}3\sqrt{5}$ $\sqrt{0{,}3}$ $7\sqrt{5}$ $2\sqrt{0{,}3}$ $-\sqrt{7}$ $0{,}4\sqrt{8}$ $-2\sqrt{5}$ $3\sqrt{8}$ $\frac{1}{4}\sqrt{8}$

4. Copiați și completați cu numere potrivite:
a) $\sqrt{3}(8-\sqrt{2})=8\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\square$; b) $\sqrt{7}+2\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\square$;
c) $4-\sqrt{11}=-(\square-\square)$; d) $-\square+2\sqrt{5}=0$;
e) $1\cdot(2\sqrt{6}+1)=1+\square$; f) $4\sqrt{10}\cdot\frac{1}{\square}=1$.

5. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $4\sqrt{3}-7\sqrt{3}-2\sqrt{3}+6\sqrt{3}$; b) $0{,}4\sqrt{6}+2\sqrt{6}-0{,}4\sqrt{6}+\sqrt{6}$;

c) $\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{5\sqrt{7}}{12}$; d) $0{,}8\sqrt{5}-\frac{4}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{9}\sqrt{5}+1{,}(1)\sqrt{5}$.

6. Calculați:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; b) $(-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{32})$; c) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$; d) $\sqrt{5}\cdot|-\sqrt{45}|$.

7. Calculați:

a) $\sqrt{24}:\sqrt{6}$; b) $(-\sqrt{343}):\sqrt{7}$; c) $\sqrt{180}:\sqrt{5}$; d) $\sqrt{363}:|-\sqrt{3}|$.

8. Aplicând reguli de calcul cu puteri, scrieți cât mai simplu:

a) $2{,}5^8\cdot 2{,}5^4$; b) $7{,}1^9:7{,}1^6$; c) $(\sqrt{5})^{11}:\sqrt{5}$;

d) $(\sqrt{7})^3\cdot 3\sqrt{7}$; e) $4{,}2^5\cdot 0{,}5^5$; f) $(\sqrt{18})^3:(\sqrt{2})^3$;

9. Aplicând formulele $(a^m)^n=a^{mn}$, $a\in\mathbb{R}$, $m, n\in\mathbb{N}^*$ şi $(\sqrt{a})^2=a$, $a\in\mathbb{R}_+$, calculați:

a) $(\sqrt{2})^6$; b) $(\sqrt{3})^4$; c) $(\sqrt{0{,}5})^4$; d) $(\sqrt{0{,}1})^8$.

10. Scoateți factori de sub radical:

a) $\sqrt{24}$; b) $\sqrt{63}$;

c) $\sqrt{98}$; d) $\sqrt{96}$;

e) $\sqrt{200}$; f) $\sqrt{108}$.

Model:
$\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=3\sqrt{5}$.

11. Introduceți factorul sub radical:

a) $2\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $6\sqrt{5}$;

d) $-5\sqrt{6}$; e) $-4\sqrt{7}$; f) $7\sqrt{3}$.

Model:
$-4\sqrt{8}=-\sqrt{4^2\cdot 8}=-\sqrt{128}$

12. Comparați:

a) $3\sqrt{2}$ cu $2\sqrt{3}$; b) $-3\sqrt{5}$ cu $-4\sqrt{3}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cu $\frac{\sqrt{5}}{5}$;

d) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ cu $\frac{4}{\sqrt{20}}$; e) $2\sqrt{3}+1$ cu $\sqrt{3}+2$; f) $\sqrt{5}-2$ cu $3\sqrt{5}-9$.

Indicație. Pentru exercițiile e) şi f) luați în considerare că $a>b$ dacă şi numai dacă $a-b>0$, pentru orice $a, b\in\mathbb{R}$.

13. Scoateți factori de sub radical şi aduceți expresia la o formă mai simplă:

a) $\sqrt{18}-3\sqrt{32}+2\sqrt{8}-\sqrt{72}$; b) $0{,}4\sqrt{12}-0{,}9\sqrt{27}+1{,}3\sqrt{75}$;

c) $-2\sqrt{80}+\sqrt{320}-4\sqrt{20}+\sqrt{45}$; d) $\sqrt{0{,}8}+\sqrt{3{,}2}+\sqrt{5}-10\sqrt{7{,}2}$.

14. Calculați:

a) $4\sqrt{90}-\sqrt{10}-(3\sqrt{160}-5\sqrt{40})$; b) $9\sqrt{27}+5\sqrt{24}-(-2\sqrt{96}-\sqrt{150}+3\sqrt{243})$;

c) $4\sqrt{84}-10\sqrt{189}-12\sqrt{1029}+2\sqrt{525}$; d) $5\sqrt{243}+2\sqrt{48}-(8\sqrt{300}-6\sqrt{363})$.

15. Calculați:

a) $3^3+\sqrt{25}[\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}-(5\sqrt{6})^2]-100$; b) $[2^5-(4\sqrt{3})^2]\cdot\frac{5}{12}\cdot(\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}-2)+7^2$.

16. Aflați perimetrul unui triunghi isoscel cu laturile laterale de $12\sqrt{5}$ cm și baza cu $\sqrt{20}$ cm mai mică decât latura laterală.

17. Aflați perimetrul unui dreptunghi a cărui lățime este de $5\sqrt{12}$ cm, iar lungimea este cu $\sqrt{27}$ cm mai mare decât lățimea.

18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^2-5=11$; b) $-3x^2+4=1{,}2$; c) $-\frac{5}{4}x^2=x^2$;

d) $(x+3)^2=-2$; e) $\sqrt{3}x^2-\sqrt{27}=0$; f) $\sqrt{5}x^2-5x=0$.

19. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\sqrt{1584}-\sqrt{891}+\sqrt{176}-2\sqrt{175}$; b) $15\sqrt{1{,}04}-\frac{3}{4}\sqrt{5\frac{5}{9}}+6\sqrt{\frac{1}{18}}-(5\sqrt{0{,}02}-\sqrt{300})$;

c) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}-\sqrt{(\sqrt{11}+2\sqrt{5})^2}+\sqrt{(1-2\sqrt{11})^2}$.

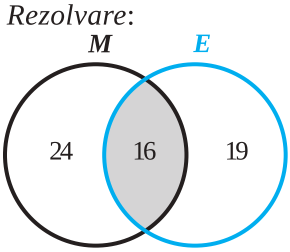
20. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{2-x}+|x-2y|+(z+3\sqrt{7})^2=0$.

§4. Operații cu mulțimi

4.1. Reuniunea, intersecția și diferența mulțimilor

1 Toți elevii unei clase participă cel puțin la unul din concursurile de matematică și limba engleză: 24 de elevi sunt înscriși la concursul de matematică, 19 – la concursul de limba engleză. La ambele concursuri participă 16 elevi. Câți elevi sunt în clasă? Observați și comentați cum a rezolvat problema Știetot.

Rezolvare:



M – mulțimea elevilor înscriși la concursul de matematică
E – mulțimea elevilor înscriși la concursul de limba engleză
n – numărul elevilor din clasă

$n=24+19-16=27$.

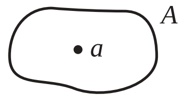
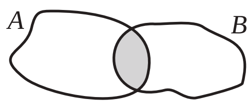
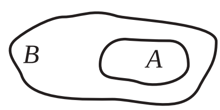
$$\text{card } A\cup B=\text{card } A+\text{card } B-\text{card } A\cap B$$

Răspuns: 27 de elevi.

- Ce semnificație au în problemă notațiile $M\cup E$ și $M\cap E$?

2 Ne amintim

Reproduceți şi completați tabelul:

Notăm	*Citim*	*Reprezentăm*	*Exemple*
$a \in A$	Elementul *a* aparține mulțimii *A*		$3 \in \mathbb{N}$
$a \notin A$			$-7{,}2 \notin \mathbb{Z}$
$A \cup B$	Mulțimea *A*, reunită cu mulțimea *B*		
$A \cap B$			$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ $A \cap B = \{3, 4\}$
$A = B$			*A* – mulțimea numerelor naturale pare $B = \{n \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ $A = B$
$A \subset B$	Mulțimea *A* este submulțime a mulțimii *B*		*A* – mulțimea pomilor fructiferi *B* – mulțimea copacilor $A \subset B$
$A \setminus B$			

- a) Care este semnificația notației $M \setminus E$ în problema **1**? Dar a notației $E \setminus M$?
  b) Calculați $\operatorname{card} M \setminus E$ şi $\operatorname{card} E \setminus M$.

Numărul de elemente ale mulțimii *A* este **cardinalul** mulțimii *A* şi se notează card*A*. **Mulțimea vidă** se notează $\varnothing$ şi are cardinalul egal cu 0.

4.2. Produsul cartezian a două mulțimi

1 Observați şi completați astfel încât să obțineți toate meniurile posibile formate din felul I şi felul II (în această ordine).

A ***Felul I***

Ciorbă (C)
Zeamă (Z)

$A = \{C, Z\}$

B ***Felul II***

Frigărui (F)
Peşte (P)
Sarmale (S)

$B = \{F, P, S\}$

$A \times B = \{(C, F), (C, P), (C, \square), (Z, F), (\square), (\square)\}$

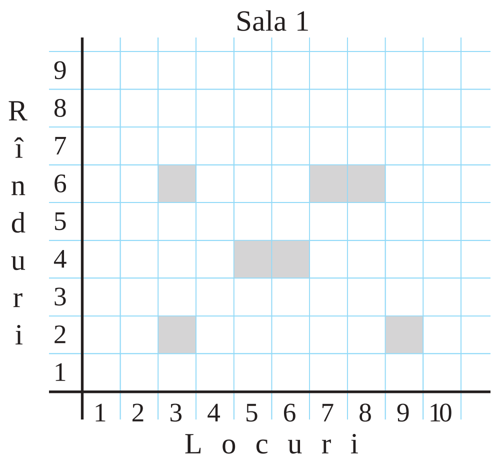
Produsul cartezian a două mulțimi este mulțimea tuturor perechilor ordonate care au pe primul loc un element al primei mulțimi, iar pe locul al doilea – un element al mulțimii a doua. Produsul cartezian al mulțimilor A și B se notează $A\times B$. Prin urmare, $A\times B=\{(x, y) \mid x\in A, y\in B\}$.

Observații. **1.** Mulțimea $A\times B$ din problema **1** este produsul cartezian al mulțimilor A și B.
2. Întrucât perechile unui produs cartezian sunt ordonate, considerăm diferite perechile (a, b) și (b, a), unde a și b aparțin mulțimilor A și B.

2 Observați imaginea. Fie R mulțimea rândurilor, iar L – mulțimea locurilor de pe un rând arbitrar ale unei săli de cinema.
Așadar, $R=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$L=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
a) Care este semnificația mulțimii $L\times R$?
b) Completați:

- Fie O mulțimea fotoliilor ocupate.

  Atunci $O=\{(3, 2), (9, 2), (\quad), (\quad), (\quad), (\quad), (\quad)\}$.
- card $L\times R$ = card $\square$ · card $\square$
- Justificați verbal de ce $(3, 2)\neq(2, 3)$.



- În general, mulțimile $A\times B$ și $B\times A$ pot fi diferite.
- card $A\times B=$ card $A\cdot$ card B.

Exerciții și probleme

1. Aflați $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, dacă:
a) $A=\{-2, -5, 3, 7, 9\}$, $B=\{-5, 3, 7, 9\}$;
b) $A=\{a, b, m, n\}$, $B=\{b, c, d, m, n, t\}$;
c) $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, |x|<7\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, |x|>2\}$;
d) $A=\mathbb{N}$, $B=\mathbb{Z}$.

2. Enumerați elementele mulțimii:
a) $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 2x<11\}$; b) $B=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, |2x|<17\}$; c) $C=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 24\,\vdots\,x\}$.

3. Completați cu numere sau simboluri astfel încât să obțineți o propoziție adevărată:

a) $\{\square, \square\} \subset \{1, 11, 21, 31, 41, 51\}$;

b) $\{-7, 9, 17\} \subset \{\square, \square, 9, 19, 27\}$;

c) $-3 \ \square \ \{x \mid x \in \mathbb{N}, |x| > 2\}$;

d) $\{10, 20, 30\} \ \square \ \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \vdots 5\}$.

4. Scrieți toate submulțimile de 5 elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, ..., 6\}$.

5. Calculați $\text{card}\, A \cup B$, dacă:

a) $\text{card}\, A = 12$, $\text{card}\, B = 17$, $\text{card}\, A \cap B = 4$;

b) $\text{card}\, A = 44$, $\text{card}\, B = 28$, $\text{card}\, A \cap B = 0$;

c) $\text{card}\, A = 9$, $\text{card}\, B = 19$, $\text{card}\, A \cap B = 9$.

6. Fie A mulțimea lunilor cu 30 de zile şi B – mulțimea lunilor cu 31 de zile. Comparați $\text{card}\, A$ şi $\text{card}\, B$.

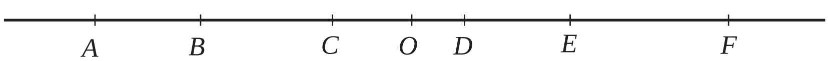
7. Fie $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{5, b\}$. Scrieți produsul cartezian:

a) $X \times Y$; b) $Y \times X$; c) $X \times X$; d) $Y \times Y$.

8. Fie A mulțimea dreptunghiurilor, iar B – mulțimea romburilor. Descrieți elementele mulțimii: a) $A \cap B$; b) $A \setminus B$; c) $B \setminus A$.

9. Examinați desenul, apoi aflați:

a) $[AO] \cup [BE]$; b) $[BF] \cup [AC]$; c) $[BD] \cap [CF]$; d) $[CF] \cap [AB]$.



10. Amintim că prin D_n se notează mulțimea divizorilor numărului n, iar prin M_n – mulțimea multiplilor numărului n. Aflați:

a) $D_{24} \cap D_{16}$; b) $D_{48} \cap M_3$; c) $D_{10} \cup D_{50}$; d) $D_{120} \setminus M_2$; e) $M_3 \cap M_5$.

11. Determinați numerele m şi n, dacă:

a) $\{m, 3, 5\} \cup \{3, 5, 6\} = \{2, 3, n, 6\}$;

b) $\{-6, m, 9, 10\} \cap \{-8, n, 16\} = \{-8, 9\}$;

c) $\{5, 6, ..., m\} \setminus \{1, 2, n, 13\} = \{6, 7, ..., 11\}$;

d) $\{m, 8, 9\} \cap \{3, 6, n\} = \{6, 9\}$.

12. Calculați $\text{card}\, A \cap B$, dacă:

a) $\text{card}\, A = 33$, $\text{card}\, B = 16$, $\text{card}\, A \cup B = 40$;

b) $\text{card}\, A = 26$, $\text{card}\, B = 15$, $\text{card}\, A \cup B = 27$;

c) $\text{card}\, A = 14$, $\text{card}\, B = 23$, $\text{card}\, A \cup B = 37$.

$\text{card}\, A \cap B =$
$= \text{card}\, A + \text{card}\, B - \text{card}\, A \cup B$

13. Aflați A şi B, dacă:

a) $A \cup B = \{1, 2, ..., 9\})$, $A \setminus B = \{1, 3, 4\}$, $B \setminus A = \{5, 6, 7\}$;

b) $A \cap \{a, b, c\} = \varnothing$, $B \cap \{d, f, h\} = \varnothing$, $A \cap B = \{e, g\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

14. Aflați mulțimile A și B, dacă:

a) $A \cup B = \{3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$, $B \setminus A = \varnothing$;

b) $A \cup B = \{a, b, c\}$, $A \cap B = \{a, b\}$, $A \setminus B = \{c\}$;

c) $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{6, 7\}$, $A \setminus B = \{3, 4\}$.

15. Din 30 de elevi ai unei clase 18 vorbesc engleza, 16 – franceza, iar unul nu vorbește niciuna dintre aceste limbi. Câți elevi vorbesc ambele limbi?

16. Fiecare elev al unei clase practică cel puțin unul din sporturile: volei, atletism. Câți elevi sunt în clasă, dacă 14 joacă volei, 16 practică atletismul, iar 5 – ambele sporturi.

17. Într-un liceu toți elevii cunosc cel puțin una din limbile vechi: latina și greaca. 65% din elevi știu latina, iar 75% – limba greacă. Ce parte din elevi cunoaște ambele limbi?

18. Scrieți o relație între mulțimile A și B, dacă:

a) A este mulțimea multiplilor numărului 9, iar B – mulțimea numerelor divizibile cu 3;

b) A este mulțimea multiplilor numărului 2, iar B – mulțimea numerelor divizibile cu 4;

c) A este mulțimea multiplilor numărului 10, iar B – mulțimea divizorilor numărului 100?

19. Într-o clasă învață 30 de copii. Fiecăruia dintre ei îi place să danseze sau să cânte. Se știe că 19 copii cântă, iar 18 dansează. La câți copii le place să danseze și să cânte?

20. Într-o firmă lucrează 70 de persoane, dintre care 48 cunosc engleza, 35 – franceza, iar 24 – ambele limbi. Câte persoane nu cunosc nici engleza, nici franceza?

21. 65% din iepurii pe care-i crește Mihai preferă morcovul, 20% preferă în egală măsură morcovul și varza. Ce parte din iepuri preferă varza?

☑☑☑

22. Din 400 de intervievați 320 au declarat că preferă să bea ceai, 210 – cafea, iar 150 – ceai și cafea în egală masură. Câți intervievați nu preferă nici ceaiul, nici cafeaua?

23. Fiind intervievate, 180 de persoane au declarat că preferă să privească în cinematografe filme de acțiune, 190 – drame, 60 sunt interesate de ambele genuri, iar 5 persoane au declarat că nu frecventează cinematografele. Câte persoane au fost intervievate?

24. Din 200 de studenți de la Facultatea de Limbi Străine 170 vorbesc engleza, 160 – franceza, 150 – spaniola. Fiecare vorbește cel puțin o limbă străină, nimeni nu cunoaște exact două limbi străine. Câți studenți vorbesc cele 3 limbi străine?

25. Într-un liceu învață 600 de copii. Pentru primul semestru au nota 10 la română 280 de elevi, la matematică – 240, la educația fizică – 460, la română și la matematică – 80, la matematică și la educația fizică – 180, la română și la educația fizică – 100 de elevi. Câți copii au 10 la toate cele trei discipline, dacă se știe că fiecare elev are cel puțin la una din cele trei discipline nota 10?

Exerciții și probleme recapitulative

1. Selectați numerele:
a) raționale;
b) iraționale;
c) reale negative.

$-\frac{5}{16}$; $-\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\frac{19}{9}$; $7{,}11$; $\sqrt{16}$; -24; $4\frac{3}{7}$; $4{,}(6)$; $0{,}001$; $-\sqrt{\frac{1}{4}}$; -660; $-3\sqrt{8}$; $-5{,}1(3)$; $9\sqrt{7}$

2. Calculați:
a) $(-3{,}8)^2$; b) $-4{,}5^2$; c) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2$; d) $-\frac{6^2}{11}$; e) $\left(-\frac{3}{10}\right)^2$; f) $\left|-2\frac{1}{2}\right|^3$; g) $|-3|^0$.

3. Calculați:
a) $\sqrt{121}$; b) $-\sqrt{2{,}56}$; c) $(\sqrt{1{,}7})^2$; d) $(-\sqrt{7{,}3})^2$; e) $\sqrt{0{,}0009}$; f) $\sqrt{(-12)^2}$.

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $a^2 = 0{,}16$; b) $y^2 = -0{,}04$; c) $x^2 = 1$; d) $-x^2 = -2{,}89$; e) $y^2 = \frac{1}{81}$.

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\sqrt{x} = 2{,}5$; b) $\sqrt{y} = 0{,}7$; c) $\sqrt{a} = -0{,}1$; d) $-\sqrt{x} = 6{,}3$; e) $-\sqrt{y} = -1{,}8$.

6. Comparați fără a extrage radicalul:
a) 8 cu $\sqrt{80}$; b) 11 cu $\sqrt{110}$; c) 9,9 cu $\sqrt{99}$; d) 10,1 cu $\sqrt{101}$.

7. Aflați semnul valorii expresiei:
a) $6-\sqrt{20}$; b) $\sqrt{0{,}9}-0{,}9$; c) $\sqrt{1{,}1}-1{,}1$; d) $\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{7}{8}}$; e) $\frac{4}{3}-\sqrt{\frac{4}{3}}$.

8. Calculați rădăcina pătrată şi rotunjiți până la zecimi rezultatul:
a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt{11}$; c) $\sqrt{0{,}5}$; d) $\sqrt{2{,}4}$; e) $\sqrt{17{,}69}$.

9. Reprezentați pe axă numerele:
a) mai mari sau egale cu –2,5;
b) mai mici sau egale cu 3,8;
c) cuprinse între $-\sqrt{6}$ şi $2\sqrt{3}$;
d) care nu sunt cuprinse între 0,5 şi $\sqrt{7}$.

10. Scrieți în ordine descrescătoare numerele:
a) $\sqrt{6}-6$; $6-\sqrt{6}$; $\frac{\sqrt{6}}{6}$; $-\frac{6}{\sqrt{6}}$; $6\frac{1}{6}$; $-6{,}(6)$; $6+\sqrt{6}$; $-6\sqrt{6}$;
b) $5\sqrt{7}$; $-7\sqrt{5}$; $7\sqrt{5}$; $-5\sqrt{7}$; $\frac{5}{7}$; $-\frac{7}{5}$; $\frac{7}{5}$; $-\frac{5}{\sqrt{7}}$.

11. Calculați:
a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; b) $\sqrt{63}\cdot(-\sqrt{7})$; c) $\sqrt{3\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1{,}2}$; d) $-\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{3\frac{1}{2}}$;
e) $-\sqrt{338}:\sqrt{98}$; f) $\frac{-\sqrt{7{,}5}}{-\sqrt{0{,}3}}$; g) $\frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$; h) $\frac{\sqrt{5{,}4}}{\sqrt{9{,}6}}$.

12. Scoateți factorul de sub radical:

a) $\sqrt{90}$; b) $\sqrt{147}$; c) $\sqrt{132}$; d) $\sqrt{192}$; e) $\sqrt{588}$.

13. Introduceți factorul sub radical:

a) $3\sqrt{6}$; b) $6\sqrt{3}$; c) $9\sqrt{2}$; d) $5\sqrt{5}$; e) $8\sqrt{7}$; f) $7\sqrt{8}$.

14. Aflați lungimea segmentului *AB* (în unități ale axei), dacă:

a) $A\left(3\frac{1}{5}\right)$ şi $B(2,(6))$; b) $A(-0,(8))$ şi $B(0,0(8))$;

c) $A\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ şi $B\left(-\frac{\sqrt{75}}{8}\right)$; d) $A\left(-9\frac{1}{3}\right)$ şi $B(-3,(3))$.

15. Calculați perimetrul unui dreptunghi cu dimensiunile $\sqrt{80}$ cm şi $2\sqrt{45}$ cm.

16. Calculați lungimea unui dreptunghi cu aria de $36\,\text{cm}^2$ şi lățimea de $3\sqrt{3}$ cm.

17. Calculați aria unui dreptunghi cu dimensiunile de $\sqrt{24}$ cm şi $2\sqrt{6}$ cm.

☑☑☐

18. Aflați cel mai mare număr întreg mai mic decât:

a) $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$; b) $\frac{2}{1-\sqrt{5}}$.

19. Aflați cel mai mic număr întreg mai mare decât:

a) $\frac{9-\sqrt{8}}{7}$; b) $\frac{6}{\sqrt{5}+4}$.

20. Efectuați:

a) $\left(\frac{2\sqrt{5}+1}{5}+\frac{2\sqrt{3}-1}{3}\right):\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;

b) $\frac{5}{5\sqrt{6}+2\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{5\sqrt{3}}+\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)$;

c) $\left(\sqrt{2}+5\sqrt{\frac{5}{24}}-3\sqrt{\frac{3}{40}}-4\sqrt{\frac{2}{15}}\right)\cdot\sqrt{2}$.

21. Calculați:

a) $|5-\sqrt{5}|+|2-\sqrt{5}|-|\sqrt{20}-3|-|6-2\sqrt{5}|$; b) $\frac{|3\sqrt{3}-6|+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}}{|\sqrt{3}-3|-1}$;

c) $2|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}|+|3\sqrt{8}-8\sqrt{3}|+2\sqrt{12}$.

22. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\frac{2-2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; b) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(2-\sqrt{6}+\sqrt{7})-\sqrt{21}}{\sqrt{7}-1}$.

23. Aflați numărul natural n, dacă:

a) $3^n \cdot 3^8 = \dfrac{3^{21}}{\sqrt{3^{18}}}$; b) $2^5 \cdot 2^{n-1} = \dfrac{8 \cdot 4^3}{16^3} \cdot \sqrt{2^{20}}$.

24. Aflați numărul cu 25% mai mare decât dublul numărului $(3\sqrt{147} - 2\sqrt{192} - \sqrt{75} + 1)$.

25. Aflați numărul cu 10% mai mic decât sfertul numărului $(3\sqrt{80} + 4\sqrt{125} - 5\sqrt{180})^2$.

PENTRU CAMPIONI

26. Notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Aflați câți factori egali cu 2 conține descompunerea în produs de factori primi a numărului 2011!.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 minute

Varianta 1

1. Selectați numerele iraționale: (2p)

$-3{,}47;\ -\sqrt{16};\ \sqrt{8};\ 0{,}135791113\ldots;\ \dfrac{19}{5}$.

2. Ordonați crescător numerele: (2p)

$2-\sqrt{3};\ 0;\ \sqrt{3}-2$.

3. Aduceți la forma cea mai simplă expresia: (2p)

$8\sqrt{48} - 8\sqrt{80} + 5\sqrt{405} - 7\sqrt{147}$.

4. Fiecare dintre elevii clasei şi-a pregătit temele cel puțin la una din disciplinele matematică şi fizică. Câți elevi sunt în clasă, dacă 28 de elevi şi-au pregătit temele la matematică, 26 de elevi – la fizică, iar 24 de elevi – la ambele discipline? (2p)

5. Ce număr este cu 12,5% mai mic decât suma numerelor $6\sqrt{32}$ şi $4\sqrt{72}$? (2p)

Varianta 2

1. Selectați numerele iraționale: (2p)

$2{,}89;\ -\sqrt{18};\ \sqrt{36};\ 0{,}24681012\ldots;\ -\dfrac{5}{19}$.

2. Ordonați descrescător numerele: (2p)

$4-\sqrt{5};\ \sqrt{5}-4;\ 0$.

3. Aduceți la forma cea mai simplă expresia: (2p)

$-10\sqrt{125} + 2\sqrt{108} + 7\sqrt{192} - 3\sqrt{245}$.

4. Fiecare dintre elevii clasei a luat prânzul în cantina şcolii. Câți elevi sunt în clasă, dacă 16 elevi au servit felul întâi, 22 de elevi – felul doi, iar 10 elevi – ambele feluri? (2p)

5. Ce număr este cu 8,5% mai mare decât diferența numerelor $8\sqrt{75}$ şi $5\sqrt{48}$? (2p)

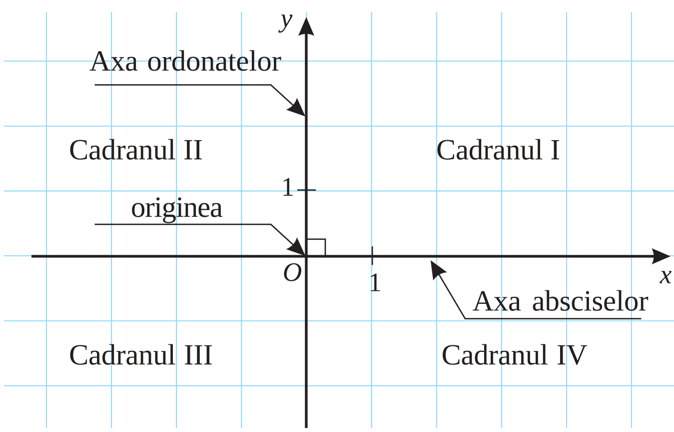
CAPITOLUL 3

Funcții

§1. Sistemul de axe ortogonale

1 Numerele reale, adică elementele mulțimii $\mathbb{R}$, pot fi reprezentate pe o dreaptă, numită **axa numerelor**.

Pentru a reprezenta elementele produsului cartezian $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ avem nevoie de două axe perpendiculare:



Sistem de axe ortogonale (sau *sistem cartezian de coordonate*)

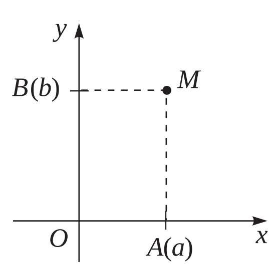
- Axa Ox se numește **axa absciselor**.
- Axa Oy se numește **axa ordonatelor**.
- Axele Ox și Oy sunt perpendiculare. Ele împart planul în 4 regiuni, numite **cadrane**.
- Punctul O se numește **originea** sistemului de axe ortogonale.

2 Cum reprezentăm într-un sistem de axe ortogonale o pereche (a, b) a mulțimii $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$?

Explicăm

① Notăm pe axa Ox punctul $A(a)$.

② Notăm pe axa Oy punctul $B(b)$.



③ Paralela la *Oy*, care trece prin punctul *A*(*a*), intersectează paralela la *Ox*, care trece prin punctul *B*(*b*), într-un punct. Notăm acest punct cu *M*.

④ Punctul *M* reprezintă în plan perechea (*a*, *b*).

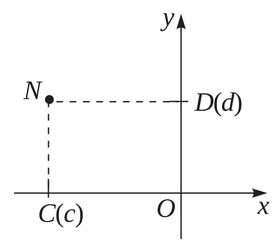
Notăm: *M*(*a*, *b*).

Citim: Punctul *M* are coordonatele (*a*, *b*). Coordonata *a* se numeşte **abscisa** punctului *M* şi întotdeauna se scrie prima, iar *b* – **ordonata** punctului *M*.

• Reprezentaţi într-un sistem de axe ortogonale perechile: (4; 3); (–3; 2,5); (4; –6); (–2; –1).

3 Cum determinăm coordonatele unui punct *N* dintr-un sistem de axe ortogonale?

Explicăm



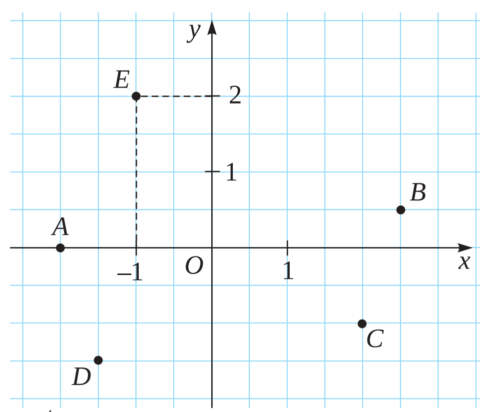
① Fie *C*(*c*) punctul în care paralela la axa *Oy*, care trece prin punctul *N*, intersectează axa *Ox*.

② Fie *D*(*d*) punctul în care paralela la axa *Ox*, care trece prin punctul *N*, intersectează axa *Oy*.

③ (*c*, *d*) sunt coordonatele punctului *N*.

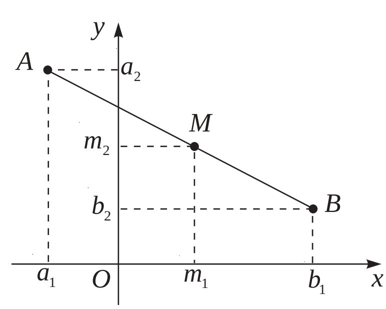
• Determinaţi coordonatele punctelor din desen:

Model:
E(−1, 2)



4 Fie punctele $A(a_1, a_2)$ şi $B(b_1, b_2)$. Care sunt coordonatele mijlocului segmentului *AB*?

Rezolvăm



Fie $M(m_1, m_2)$ punctul căutat. Atunci, se poate arăta că m_1 este mijlocul segmentului $[a_1, b_1]$, iar m_2 este mijlocul segmentului $[a_2, b_2]$.

Astfel, $m_1 - a_1 = b_1 - m_1$ sau $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

$m_2 - b_2 = a_2 - m_2$ sau $m_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$.

Răspuns: $\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

Fie $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$. Atunci:

a) punctul $M\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}, \dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$ este mijlocul segmentului AB;

b) $AB=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$.

Exersăm

Fie $A(-4; 3)$, $B(8; -2)$. Să aflăm:

a) coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$; b) AB.

Rezolvăm

a) Fie $M(m_1, m_2)$ mijlocul segmentului $[AB]$.

Atunci: $m_1=\dfrac{-4+8}{2}=2$; $m_2=\dfrac{3+(-2)}{2}=0{,}5$.

Răspuns: $M(2;\ 0{,}5)$.

b) $AB=\sqrt{(-4-8)^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{144+25}=13$.

Răspuns: 13 unități de lungime.

Exerciții și probleme

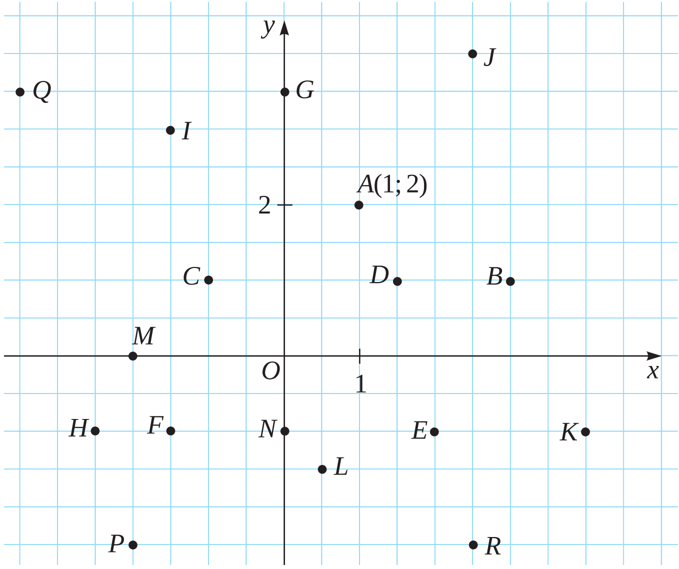
1. Construiți un sistem de axe ortogonale şi reprezentați în el punctele:

a) $A(-4; 1)$; $B(0{,}5; 3)$; $C(7; -1{,}5)$; $D(-2; -6)$;

b) $M(3; 4{,}5)$; $N(9, -2)$; $K(-1; -8)$; $P(-4; 7)$.

2. Examinați desenul. Aflați coordonatele punctelor:

a) B, C, D, E; b) F, G, H, I; c) J, K, L, M; d) N, P, Q, R.



3. Construiți într-un sistem de axe ortogonale dreapta care trece prin punctele $A(-2; -1)$ și $B(3; 1,5)$. Notați pe dreapta AB punctele cu abscisele -1, 0, 1, 2. Aflați coordonatele acestor puncte.

4. Construiți într-un sistem de axe ortogonale dreapta care trece prin punctele $M(-3; 4)$ și $N(4,5; -1)$. Notați pe dreapta MN punctele de ordonatele 0, 1, 2, 3. Aflați coordonatele acestor puncte.

5. În care cadran se află punctul $A(a, b)$, dacă:
a) $a > 0,\ b > 0$; b) $a > 0,\ b < 0$; c) $a < 0,\ b > 0$; d) $a < 0,\ b < 0$?

6. Ce putem afirma despre punctele care au:
a) abscisa egală cu 2; b) ordonata egală cu -4;
c) modulul abscisei egal cu 3; d) modulul ordonatei egal cu 5?

7. Aflați lungimea segmentului cu o extremitate în originea sistemului de axe ortogonale și cealaltă în punctul:
a) $A(4; 3)$; b) $B(-7; -24)$; c) $C(6; -8)$; d) $D(-8; 15)$; e) $E(20; 21)$.

8. Aflați coordonatele mijlocului segmentului AB, unde:
a) $A(1; 3)$, $B(3; 5)$; b) $A(-2; 6)$, $B(6; -2)$;
c) $A(5; -2)$, $B(-5; 8)$; d) $A(-3; 7)$, $B(-9; 11)$.

---

9. Știind că $O(0, 0)$ este mijlocul segmentului AB, aflați coordonatele punctului A, dacă:
a) $B(3; -4)$; b) $B(-12; 10)$; c) $B(-6; -6)$; d) $B(9; 2,5)$.

10. Aflați coordonatele vârfurilor C și D ale pătratului $ABCD$, știind că:
a) $A(-3; 4)$, $B(1, 4)$; b) $A(2; -3)$, $B(5, -3)$.

11. Aflați aria dreptunghiului $ABCD$, știind că:
a) $A(4,5; -1)$, $B(-3; -1)$ și $C(-3; 5)$; b) $A(-5; 1)$, $B(3; 1)$ și $C(3; -2)$.

12. Punctele A și B sunt egal depărtate de axa ordonatelor și $[AB]$ este perpendicular pe această axă. Aflați coordonatele punctului B, dacă punctul A are coordonatele:
a) $(2; \sqrt{5})$; b) $(-7,4; 4)$; c) $(-0,6; -8,1)$; d) $(13; -10)$.

13. Punctele M și N sunt egal depărtate de axa absciselor și $[MN]$ este perpendicular pe această axă. Aflați coordonatele punctului N, dacă punctul M are coordonatele:
a) $\left(3\frac{1}{4}; 4\right)$; b) $(6; -5)$; c) $(-0,35; 8)$; d) $(-85; -58)$.

---

14. Calculați aria triunghiului ABC, dacă:
a) $A(2; 6)$, $B(2; -1)$, $C(8; -1)$; b) $A(-2; 4)$, $B(-2; -5)$, $C(10; 4)$.
Indicație. Completați triunghiul până la dreptunghi.

§2. Noțiunea de funcție

2.1. Dependențe funcționale. Funcția

1 În tabel sunt prezentate măsurile la hainele femeiești utilizate în Europa și măsurile corespunzătoare lor utilizate în SUA. Exprimați analitic corespondența dintre cele două mulțimi de măsuri.

E

EUR	36	38	40	42	44	46	48
SUA	10	12	14	16	18	20	22

A

Explicăm

Întrucât fiecărui m, $m \in E$, îi corespunde elementul $n = m - 26$, unde $n \in A$, putem defini mulțimea A astfel: $A = \{m - 26 \mid m \in E\}$.

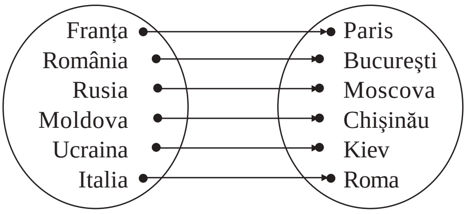
2 Stabiliți o corespondență între mulțimile T = {Moldova, România, Rusia, Ucraina, Franța, Italia} și C = {București, Moscova, Kiev, Roma, Chișinău, Paris}.

Explicăm

Modul I. Reprezentăm corespondența cu ajutorul unui tabel:

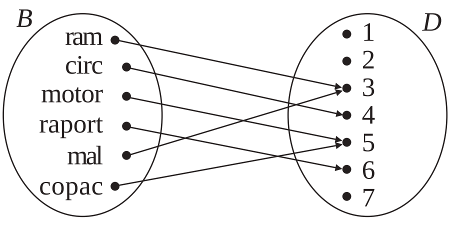
T	Moldova	România	Rusia	Ucraina	Franța	Italia
C	Chișinău	București	Moscova	Kiev	Paris	Roma

Modul II. Reprezentăm corespondența cu ajutorul unei diagrame:



3 Reprezentați printr-o diagramă corespondența care asociază fiecărui element-cuvânt al mulțimii B = {ram, circ, motor, raport, mal, copac} numărul de litere ale acestui cuvânt-element al mulțimii D = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Rezolvare:



Corespondentele (dependențele) care sunt examinate în problemele **1**, **2** și **3** se numesc **dependențe funcționale**.

Definiție. Fie X şi Y două mulțimi nevide. Corespondența prin care fiecărui element al mulțimii X i se asociază un singur element al mulțimii Y se numeşte **funcție definită pe mulțimea X cu valori în mulțimea Y** (sau, mai scurt, **funcție de la X la Y**).

Notația $f\colon X \to Y$ se citeşte „funcția f de la X la Y” sau „funcția f definită pe mulțimea X cu valori în mulțimea Y”.

Astfel, pentru problemele **1**, **2** şi **3** putem defini funcțiile $f\colon E \to A$, $g\colon T \to C$, $h\colon B \to D$.

- Observați denumirile elementelor unei funcții.

Elementele funcției
$f\colon X \to Y$

Corespondența (legea, procedeul).

Domeniul de valori sau **codomeniul** funcției.

Domeniul de definiție al funcției (se notează cu $D(f)$)

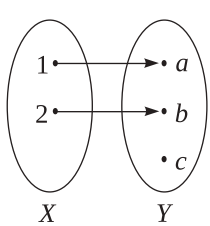
Fie funcția $f\colon X \to Y$ şi x un element arbitrar al mulțimii X.
Dacă $y \in Y$ şi funcția f asociază elementului x elementul y, se spune că x este **argumentul** (sau **variabila independentă**) **funcției**, iar y este **valoarea funcției f în punctul** x.
Se notează $y = f(x)$ şi se citeşte „y este egal cu f de x”.

De exemplu, valoarea funcției $h\colon B \to D$ din exemplul **3**, în punctul „circ”, este egală cu 4, adică $h(\text{circ}) = 4$.

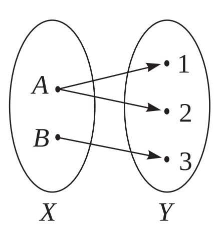
Mulțimea $E(f) = \{y \mid y = f(x),\ x \in X\}$ se numeşte **mulțimea valorilor funcției f**, care este submulțime a domeniului de valori. De exemplu, $E(h) = \{3, 4, 5, 6\}$ este o submulțime a lui D.

2.2. Moduri de definire a funcției

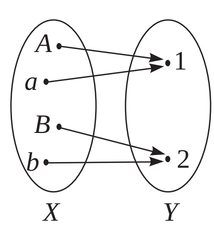
1 Care dintre următoarele diagrame defineşte o funcție?



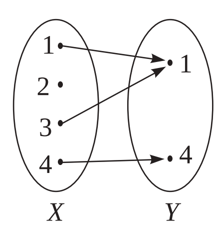
①



②



③



④

Explicăm

Diagrama ① definește o funcție, deoarece fiecărui element x al domeniului de definiție X îi corespunde un singur element y al domeniului de valori Y.

Diagrama ② nu definește o funcție, deoarece...

Diagrama ③ ..., deoarece...

Diagrama ④ ..., deoarece...

2 a) Care dintre următoarele tabele definesc o funcție?

①

x	3	5	7	8
$f(x)$	13	15	17	18

②

x	–3	–2	–1	1	2	3
$g(x)$	3	2	1	1	2	3

③

x	A	B	C	D	E
$h(x)$	1	1	1	1	1

b) Descrieți printr-o formulă fiecare din funcțiile definite în a).

Explicăm

a) Fiecare din tabelele ①–③ definește o funcție, deoarece...

b) Funcțiile definite de tabelele ①–③ pot fi descrise altfel:

$f: \{3, 5, 7, 8\} \to \{13, 15, 17, 18\}, \quad f(x) = x + 10.$

$g: \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, \} \to$ ..., $\quad g(x) =$ ... .

$h:$ ... $\to \{1\}, \quad h(x) =$ ... .

O funcție poate fi definită:
- printr-un tabel, numit ***tabel de valori*** al funcției;
- printr-o diagramă;
- printr-un grafic;
- printr-o formulă;
- verbal.

modul sintetic

modul analitic

De regulă, o funcție se definește sintetic în cazul în care domeniul ei de definiție are un număr mic de elemente. Definirea unei funcții cu ajutorul unui grafic se va studia ulterior.

Exerciții și probleme

1. Reproduceți și completați tabelul:

a)

Numărul	–3	2	0	1	5
Opusul numărului	3				

b)

Numărul	–2	–1	0	1	2	3
Cubul numărului	–8					

2. Fiecărei luni a anului curent îi corespunde un anumit număr de zile. Definește această corespondență o funcție? Justificați.

3. Fiecărei litere din alfabetul latin i se pune în corespondență numărul ei de ordine în acest alfabet. Definește această corespondență o funcție? Justificați.

4. Fie M o mulțime de numere. Fiecărui număr $|x|$ din M i se asociază numărul x. Definește această corespondență o funcție, dacă: a) $M=\mathbb{N}$; b) $M=\mathbb{Z}$; c) $M=\mathbb{Q}$? Justificați.

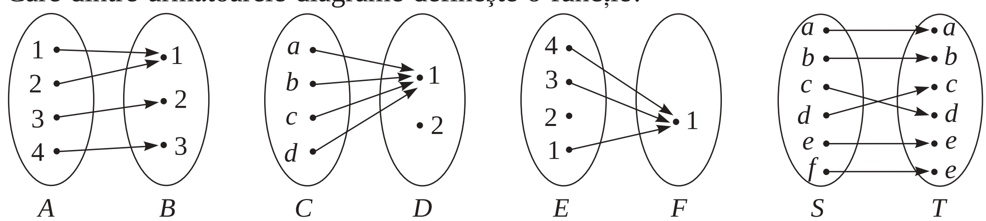
5. Corespondența dintre numele şi prenumele oamenilor definește o funcție? Justificați.

6. Fie M o mulțime de numere. Fiecărui număr din M i se pune în corespondență predecesorul lui. Definește aceeaşi corespondență o funcție, dacă:
a) $M=\mathbb{N}$; b) $M=\mathbb{Z}$?

7. Fie M o mulțime de numere. Fiecărui număr din M i se asociază succesorul lui. Definește această corespondență o funcție, dacă:
a) $M=\mathbb{N}$; b) $M=\mathbb{Z}$?

8. Citiți: a) $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(x)=x^2$; b) $g\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{N},\ g(x)=|x|$;
c) $t\colon \mathbb{Q}_+\to\mathbb{R},\ t(x)=\sqrt{x}$; d) $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=2x$.

9. Care dintre următoarele diagrame definește o funcție?



a) b) c) d)

10. Scrieți analitic funcția:
a) cu domeniul de valori $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ şi domeniul de definiție $B=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$, care pune în corespondență fiecărui număr opusul său;
b) cu domeniul de definiție $A=\left\{\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{7}\right\}$ şi domeniul de valori $B=\left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, 5, 7\right\}$, care pune în corespondență fiecărui număr inversul său;
c) care pune în corespondență fiecărui număr real pozitiv radicalul acestui număr;
d) care pune în corespondență fiecărui număr întreg cu modulul mai mic decât 7 pătratul lui.

11. Aflați valoarea funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x$, în punctul:
a) –2,4; b) 3,5; c) $\sqrt{2}$; d) $-1\frac{5}{8}$.

12. Aflați valoarea argumentului pentru care valoarea funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x$ este egală cu:
a) 8; b) –5; c) $\sqrt{18}$; d) $3\frac{3}{4}$.

13. Construiți și completați tabelul de valori al funcției:

a) $f\colon \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$;

b) $f\colon \{a^2 \mid a < 6,\ a \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N},\ f(x) = \sqrt{x}$;

c) $f\colon \{a \mid |a| < 5,\ a \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = a + 3$;

d) $f\colon \{2a \mid -3 \le a \le 4,\ a \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 3a$.

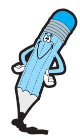
14. Definiți analitic (printr-o formulă) funcția care are următorul tabel de valori:

a)

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	2	3	4	5

b)

1	2	3	4	5
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$



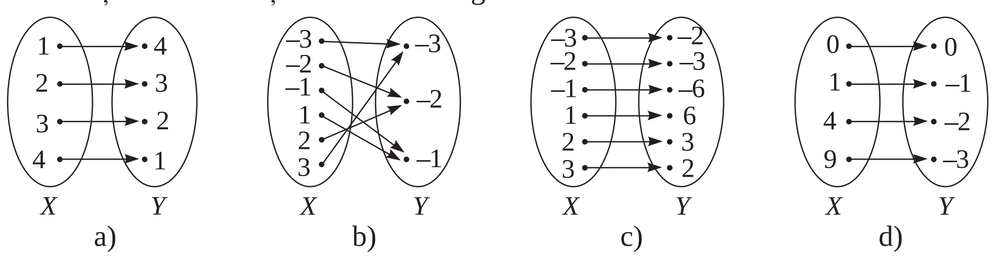
c)

–2	–1	0	1	2
–1,4	–0,4	0,6	1,6	2,6

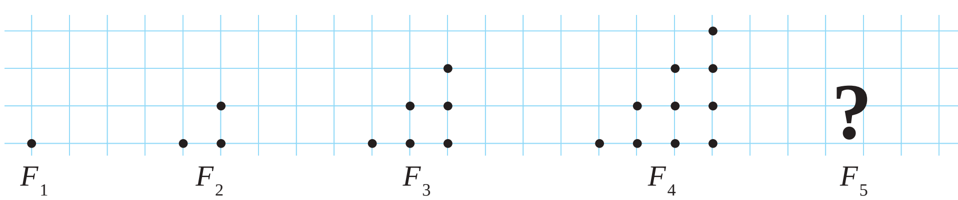
d)

0	1	2	3	4
1	2	4	8	16

15. Descrieți analitic funcția definită de diagramele:



16. Observați legitatea și construiți figura ce urmează.



Din câte puncte este formată figura F_5? Dar F_{10}, F_{15}?

17. Funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ f(x) = [x]$, pune în corespondență fiecărui număr real x partea întreagă a numărului x (cel mai apropiat întreg mai mic decât x). Calculați:

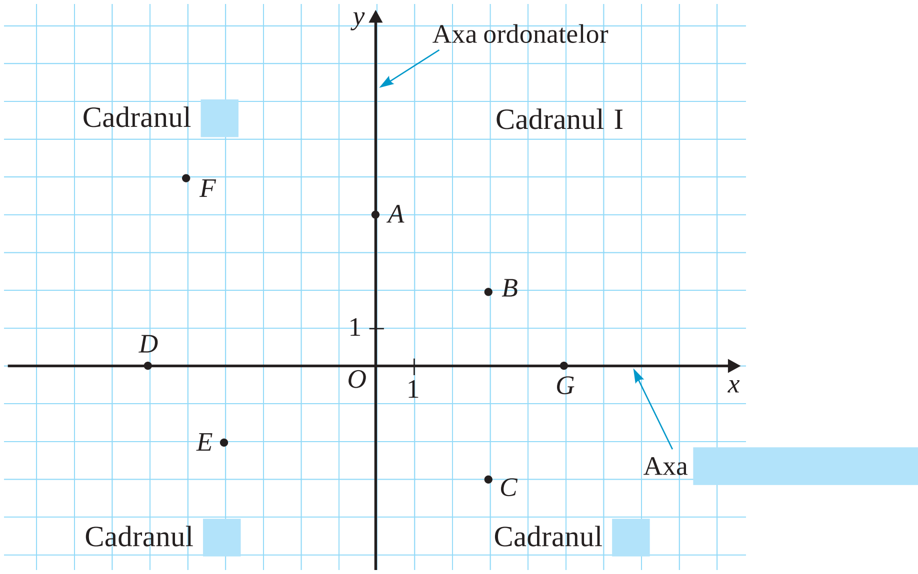
a) $f(2{,}71)$, $f(0{,}49)$, $f(3\frac{5}{7})$; b) $f(-3{,}14)$, $f(-5{,}81)$, $f(-7{,}9)$.

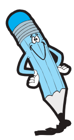
18. Fiecărui număr natural i se asociază numărul format din ultima cifră (cifra unităților) a numărului respectiv. Definiți analitic (printr-o formulă) funcția definită de această corespondență.

Indicație. Aplicați funcția de la problema **17**.

§ 3. Graficul funcției

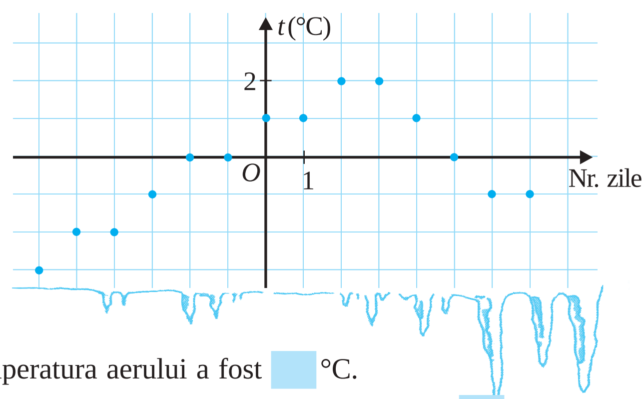
1 Observați și completați adecvat:





Punctul *B* are coordonatele (3; 2). Punctul *G* (5; 0) aparține axei ____.
Punctul *D* are coordonatele (–6, ____). Punctul *E* aparține cadranului ____.
Punctul *F* aparține cadranului ____. Punctul ____ aparține cadranului 4.
Abscisa punctului *A* este egală cu ____. Ordonata punctului *E* este egală cu ____.
Punctele *F* și ____ sunt egal depărtate de axa ____.

2 Mihai și-a petrecut vacanța de Crăciun în orașul Roma. Din curiozitate, a înregistrat temperatura aerului și a reprezentat datele printr-un grafic (punctul *O* corespunde Anului Nou). Observați graficul și completați.



De Anul Nou temperatura aerului a fost ____ °C.
Cu 3 zile înainte de Anul Nou temperatura aerului a fost ____ °C.
Timp de ____ zile după Anul Nou temperatura aerului a crescut cu 2 °C.
Temperatura –1 °C s-a înregistrat ____.
Peste patru zile după Anul Nou temperatura aerului a fost ____ °C.

• Defineşte graficul reprezentat o funcție?

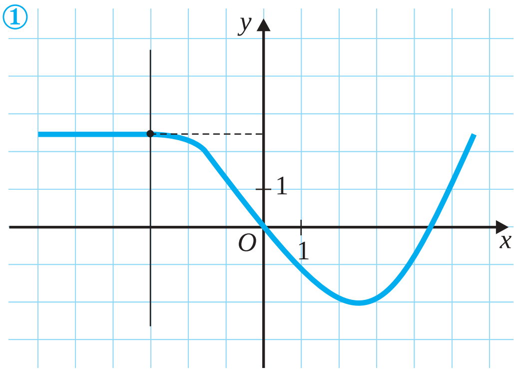
Explicăm

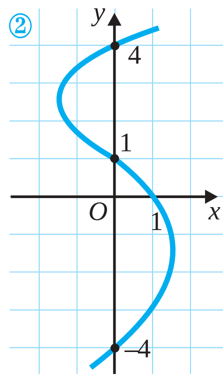
Graficul reprezentat defineşte o funcție de forma $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, deoarece fiecărui număr de zile (x, unde $x \in \mathbb{Z}$) îi corespunde o singură valoare a temperaturii (y, unde $y \in \mathbb{R}$).

- Funcția $f: X \to Y$, unde X şi Y sunt mulțimi numerice, se numeşte **funcție numerică**.
- **Graficul funcției** numerice $f: X \to Y$ este figura formată din punctele (x, y), unde $x \in X$ şi $y = f(x) \in Y$.
  Graficul funcției f se notează cu G_f; deci $G_f = \{(x, y) \mid x \in X, y = f(x) \in Y\}$.

3 a) Care dintre următoarele grafice defineşte o funcție?

b) Cum aflăm valoarea funcției, definită grafic, într-un punct dat x?

①


②


Explicăm

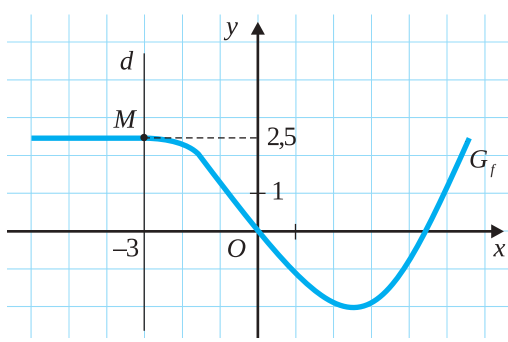
a) Graficul ① defineşte o funcție, deoarece fiecărei valori a variabilei x îi corespunde o unică valoare y.

Graficul ② o funcție, deoarece există valori ale lui x cărora le corespund mai multe valori ale lui y. De exemplu, abscisei 0 îi corespund mai multe valori ale lui y: –4; 1 şi 4.

b) Notăm cu f funcția definită de graficul ①. Să aflăm valoarea funcției f în punctul de abscisă –3:

- construim o dreaptă d paralelă cu axa ordonatelor şi care intersectează axa absciselor în punctul –3;
- fie M punctul de intersecție a dreptei d cu graficul funcției f.

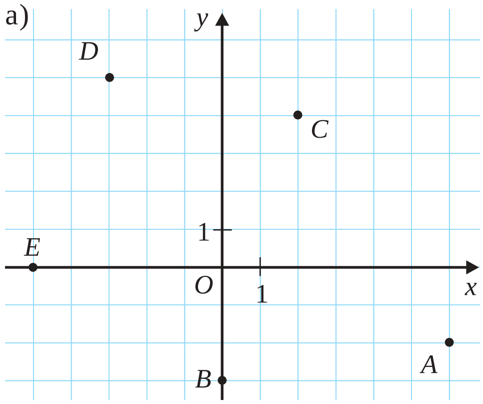
Ordonata punctului M este valoarea funcției f în punctul de abscisă –3. Prin urmare, $f(-3) = 2{,}5$.



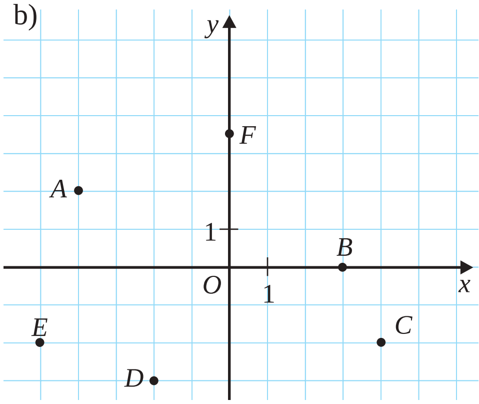
Exerciții și probleme

1. Scrieți coordonatele punctelor reprezentate în sistemul de axe ortogonale:

a)



b)



2. Construiți un sistem de axe ortogonale şi reprezentați punctele:

a) $A(-3; 5)$, $B(0; 2)$, $C(-4; 0)$, $D(3{,}5; -2)$;

b) $A(1; -2)$, $B(3; -1)$, $C(-5; -3)$, $D(1{,}5; 4)$.

3. Construiți graficul funcției definite prin tabelul de valori:

a)

–3	–2	–1	0	1	2	3
9	4	1	0	1	4	9

b)

–3	–2	–1	0	1	2	3
5	3	–2	0	2	–3	–5

c)

0	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	0

d)

0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
0	1	0	1	0	1	0

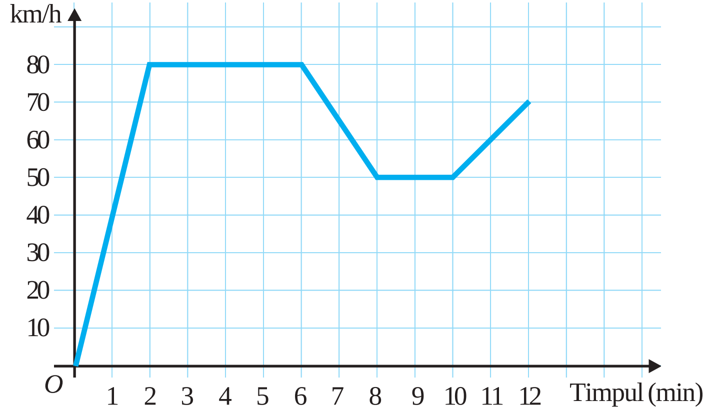
4. Examinați graficul vitezei mişcării unui automobil şi determinați:

a) peste câte minute după pornire automobilul a atins cea mai mare viteză din perioada mişcării;

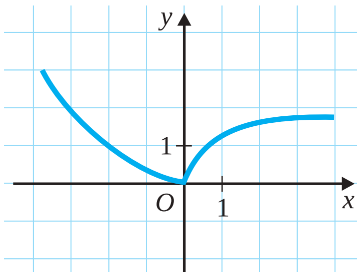
b) câte minute automobilul s-a deplasat cu viteza de 80 km/h;

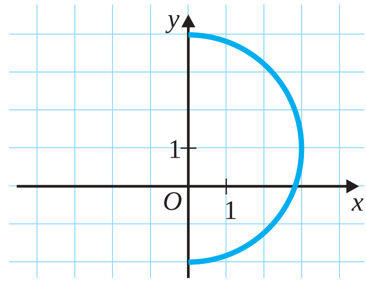
c) ce viteză avea automobilul peste 10 minute după începutul deplasării;

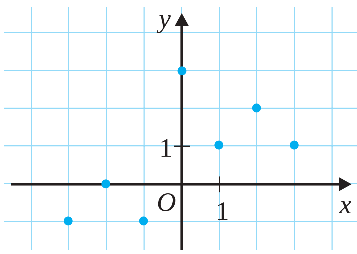
d) câte minute automobilul s-a mişcat cu viteza de 50 km/h.

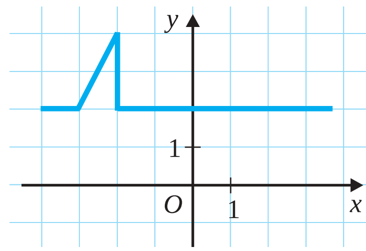


5. Care dintre următoarele grafice definește o funcție?

a) 

b) 

c) 

d) 

6. Completați tabelul de valori al funcției și trasați graficul ei:

a) $f: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,\} \to \mathbb{Z}, \ f(x) = x^2 - 3;$

b) $f: \{x \mid |x| \le 5, \ x \in \mathbb{Z}^*\} \to \mathbb{Q}, \ f(x) = \dfrac{1}{x};$

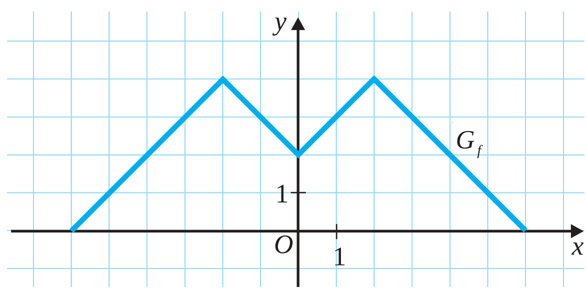
c) $f: \left\{0, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{9}, 1, \dfrac{16}{9}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{25}{9}, 4\right\} \to \mathbb{Q}, \ f(x) = \sqrt{x};$

d) $f: \{x \mid |x| \le 5, \ x \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z}, \ f(x) = 0{,}5x.$

7. Examinați graficul funcției f și stabiliți:

a) valoarea funcției f în punctele de abscisă: -5; $-3{,}5$; -2; $1{,}5$; 3;

b) punctele în care valoarea funcției f este egală cu 0; $1{,}5$; 2; 3; $3{,}5$.



8. Trasați graficul funcției:

a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ f(x) = 3x;$

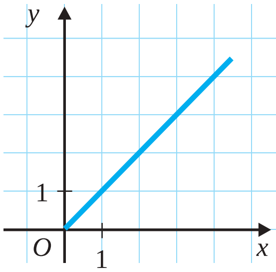
b) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ f(x) = -2x;$

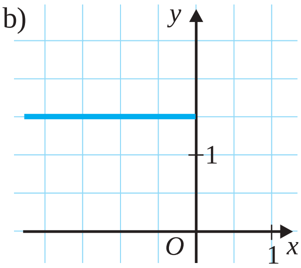
c) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \ f(x) = x^2;$

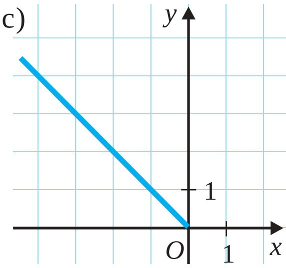
d) $f: \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}, \ f(x) = \dfrac{8}{x};$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 4.$

9. Definiți analitic (printr-o formulă) funcția al cărei grafic este semidreapta reprezentată:

a) 

b) 

c) 

10. Stabiliți coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției cu axa absciselor:

a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3-x}{4}$; b) $f\colon [2;+\infty)\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x-2}$;

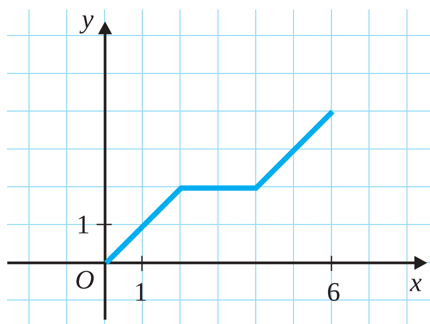
c) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4$; d) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2{,}3-|x|$.

11. Verificați dacă punctul $A(-1,\ 2)$ aparține graficului funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă:

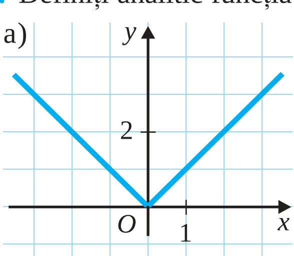
a) $f(x)=-2x$; b) $f(x)=x^2+1$; c) $f(x)=3-x$.

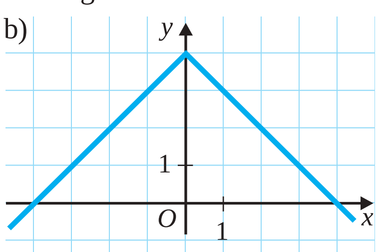
12. Se știe că domeniul de definiție al funcției $f(x)$ este mulțimea $M=\{x \mid |x|\le 6,\ x\in\mathbb{R}\}$. În desen este reprezentat graficul funcției f pentru $0\le x\le 6$.
Copiați și completați graficul funcției f pentru orice x din M, dacă:

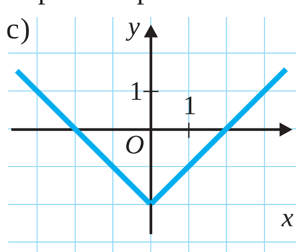
a) $f(-x)=f(x)$; b) $f(-x)=-f(x)$.



13. Definiți analitic funcția al cărei grafic este reuniunea semidreptelor reprezentate:

a) 

b) 

c) 

14. Reprezentați grafic funcțiile: a) $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{Z},\ f(x)=(-1)^x$;
b) $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{Z},\ f(x)=x\cdot(-1)^x$; c) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|-1$.

15. Reprezentați grafic funcția cu domeniul de definiție $M=\{x \mid x<10,\ x\in\mathbb{N}\}$ care pune în corespondență numărului x restul împărțirii lui x la 3.

16. Demonstrați că un cerc nu poate fi graficul unei funcții.

§4. Funcții de gradul I. Funcții constante

4.1. Noțiunile *funcție de gradul I* și *funcție constantă*

1 Înălțimea unui bambus este de 2 m. Timp de o zi, bambusul crește în înălțime cu 0,8 m.

a) Scrieți formula care determină înălțimea bambusului peste un număr dat de zile.

b) Construiți un tabel și înregistrați în el înălțimea bambusului peste 1 zi, 2 zile, 3 zile, 4 zile.

c) Reprezentați grafic funcția obținută.

Explicăm

a) Timp de x zile, bambusul va crește cu ☐ $\cdot x$ (metri).

Peste x zile, înălțimea bambusului va fi $h = 2 +$ ☐ $\cdot x$ (metri).

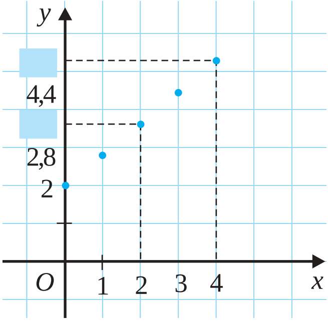
b)

x (zile)	0	1	2	3	4
h (m)	2	2,8	?	4,4	?

c) Obținem funcția:

$h: \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R},\ h(x) = 2 +$ ☐ x.

Trasăm graficul funcției, notând în sistemul de axe ortogonale punctele (0; 2), (1; ☐), (2; ☐), (3; 4,4), (4; ☐).



Observație. Constatăm că cele 5 puncte construite sunt coliniare.

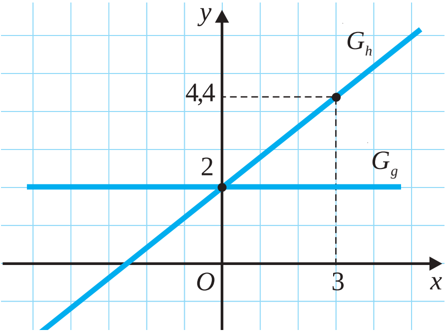
2 Ce figură geometrică reprezintă graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 0{,}8x + 2$? Dar al funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2$?

Rezolvare:

Graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 0{,}8x + 2$, reprezintă o dreaptă.

Pentru a construi această dreaptă, este suficient să determinăm coordonatele a două puncte diferite ale ei.

Graficul funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2$, este o dreaptă paralelă cu axa Ox.



Definiții.
- Funcția de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$, unde $a \neq 0$ și $a, b \in \mathbb{R}$, se numește **funcție de gradul I**.
- Funcția de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = b$, unde $b \in \mathbb{R}$, se numește **funcție constantă**.

Graficul funcției de gradul I este o dreaptă.
Graficul funcției constante este o dreaptă paralelă cu axa absciselor.

4.2. Proprietățile funcției de gradul I

LUCRARE PRACTICĂ

a) Luând în considerare că graficul funcției de gradul I este o dreaptă, trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -2x + 2$.

b) Aflați coordonatele punctelor în care graficul fiecărei funcții intersectează: axa absciselor; axa ordonatelor.

c) Determinați tipul unghiului format de graficul fiecărei funcții cu direcția pozitivă a axei Ox.

d) Fie $x_1 < x_2$. Comparați: $f(x_1)$ cu $f(x_2)$; $h(x_1)$ cu $h(x_2)$.

e) Pentru ce valori ale variabilei x: $f(x) > 0$; $h(x) > 0$? Dar $f(x) < 0$; $h(x) < 0$?

Explicăm

a) Deoarece orice dreaptă este determinată de două puncte diferite ale ei, completăm tabelul de valori al funcțiilor pentru două valori arbitrare ale lui x.

x	0	1
$f(x)$	–1	1
$h(x)$	2	0

Punctele de coordonate (0, –1) și (1, 1) determină o dreaptă care este graficul funcției $f(x)$.

Punctele de coordonate (0, …) și (1, …) determină o dreaptă care este graficul funcției $h(x)$.

b) Putem utiliza graficele sau putem proceda în felul următor:

– Determinăm punctul de intersecție a graficului cu axa absciselor:

$f(x) = 2x - 1 = 0$ sau $2x = 1$.

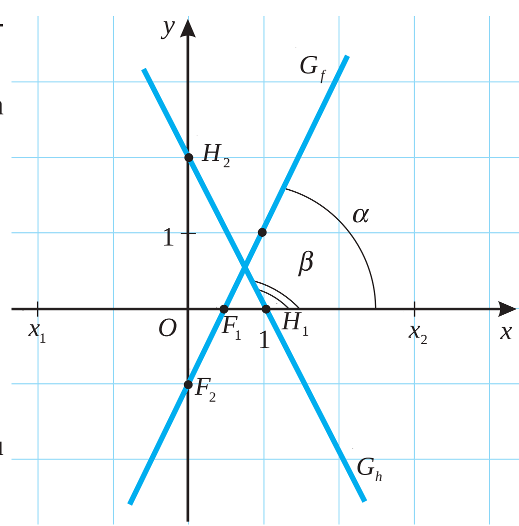
Prin urmare, $x = \frac{1}{2}$ și $F_1\left(\frac{1}{2}; 0\right) \in G_f$.

$h(x) = -2x + 2 = 0$ sau $-2x = -2$.

Prin urmare, $x =$ … ➡ $H_1($ … $, 0) \in G_h$.

– Determinăm punctul de intersecție cu axa ordonatelor:

Utilizând tabelul de valori, obținem $F_2(0; -1) \in G_f$ și $H_2(0; 2) \in G_h$.



c) Unghiul α, format de G_f și direcția pozitivă a axei Ox, este unghi ascuțit.

Unghiul β, format de G_h și direcția pozitivă a axei Ox, este unghi $\square$.

d) Analizând graficele funcțiilor f și g, observăm că pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ și $x_1 < x_2$, au loc relațiile $f(x_1) < f(x_2)$ și $h(x_1) \bigcirc h(x_2)$;

e) $f(x) > 0$ pentru orice $x > \frac{1}{2}$, iar $h(x) > 0$ pentru orice $x < \square$.

$f(x) < 0$ pentru orice $\square$, iar $h(x) < 0$ pentru orice $\square$.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Valoarea variabilei x pentru care $f(x) = 0$ se numeşte **zerou** al funcției f.
- Dacă pentru orice $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ avem:
  a) $f(x_1) < f(x_2)$, atunci funcția f este **strict crescătoare**;
  b) $f(x_1) > f(x_2)$, atunci funcția f este **strict descrescătoare**.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- Zeroul funcției f este numărul $-\frac{b}{a}$.
- Funcția f este:
  a) strict crescătoare, dacă $a > 0$;
  b) strict descrescătoare, dacă $a < 0$.
- Numărul a se numeşte **panta** (sau **coeficientul unghiular** al) graficului funcției f.

4.3. Funcția proporționalitate directă

În tabel este înregistrat consumul de energie electrică (exprimat în kilowați) al unui radiator electric în funcție de timp (exprimat în ore).

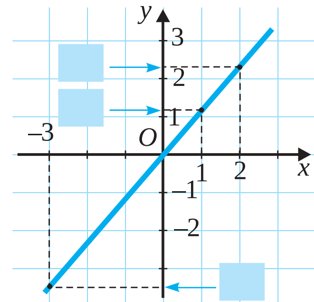
Examinați tabelul:

Timpul (h)	0,5	1	1,5	2
Consumul (kW)	0,6	1,2	1,8	2,4

Completați adecvat:

- Timpul și consumul de energie electrică sunt mărimi direct proporționale, deoarece $\frac{0,5}{0,6} = \frac{\square}{1,2} = \frac{1,5}{1,8} = \frac{2}{\square}$.
- Dacă notăm cu x timpul, atunci $y = \square \cdot x$ este numărul de kilowați consumați de radiator în x ore.
- Prin urmare, tabelul definește funcția $f: \{0,5;\ \square\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \square \cdot x$.

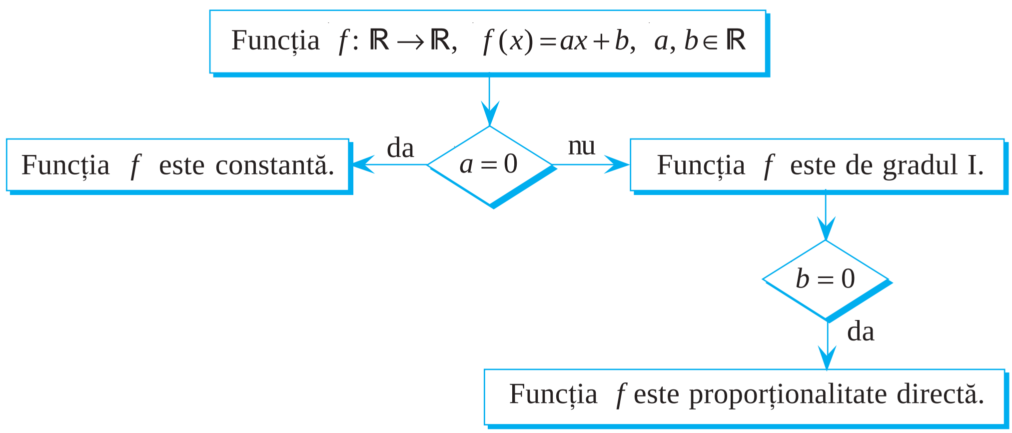
Graficul funcției $f: \{0,5; 1; 1,5; 2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1,2x$, reprezintă 4 puncte coliniare, iar graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1,2x$, reprezintă o dreaptă.



- Funcția de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, se numește **proporționalitate directă**.
  Numărul a se numește **coeficient de proporționalitate**.
- Graficul funcției proporționalitate directă este o dreaptă care conține originea sistemului de axe ortogonale.

Observăm că, dacă în formula funcției de gradul I $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a \neq 0$, considerăm $b = 0$, atunci funcția f devine proporționalitate directă.

Prin urmare, fiind un caz particular al funcției de gradul I, proporționalitatea directă posedă aceleași proprietăți ca și funcția de gradul I.



- Se știe că punctul $M(2, 3)$ aparține graficului unei proporționalități directe.
  a) Trasați graficul acestei funcții.
  b) Scrieți formula care descrie această dependență funcțională.

Observație. Proporționalitatea directă este o funcție care descrie dependența dintre două mărimi direct proporționale: x și y. Dependența dintre două mărimi invers proporționale este descrisă de o funcție de forma $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{k}{x}$, unde $k \in \mathbb{R}^*$, numită **proporționalitate inversă**.

Funcția proporționalitatea inversă se va studia în clasa a VIII-a.

Exerciții și probleme

1. Trasați graficul funcției:

a) $f: \{-0,5;\ 0,5;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\} \to \mathbb{R},\quad f(x) = 2x - 1;$

b) $f: \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1,5;\ 3\} \to \mathbb{R},\quad g(x) = -2x + 1;$

c) $h: \left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2};\ 2;\ \frac{5}{2}\right\} \to \mathbb{R},\quad h(x) = 0,5x.$

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Selectați formulele prin care poate fi definită funcția f:

a) de gradul I;

b) constantă;

c) proporționalitate directă.

$f(x) = \frac{1}{3}x$ | $f(x) = 2x - 4$ | $f(x) = \sqrt{5}$ | $f(x) = 8x^2 - 1$ | $f(x) = -3x$ | $f(x) = \sqrt{7}x + 7$ | $f(x) = x^2$

3. Determinați coeficientul unghiular și trasați graficul funcției:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 4;$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -1,5x + 2;$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 2(x + 1);$

d) $t: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t(x) = -\frac{5}{2}x;$

e) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = \frac{1}{2}x + 1;$

f) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ q(x) = -3(1 + \frac{x}{3}).$

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aflați punctele de intersecție a graficului funcției cu axele sistemului de axe ortogonale, dacă:

a) $f(x) = 0,8x + 8;$

b) $f(x) = -3,2x - 6,4;$

c) $f(x) = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5};$

d) $f(x) = -\sqrt{2}x + 2.$

5. Definiți analitic funcția constantă, dacă graficul ei intersectează axa ordonatelor în punctul:

a) $A(0;\ -3);$ b) $B\left(0;\ \frac{1}{2}\right);$ c) $C(0;\ \sqrt{3});$ d) $O(0;\ 0).$

6. În care cadrane se află graficul funcției:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 121x;$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -0,001x;$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{59}}x;$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2^{10}x?$

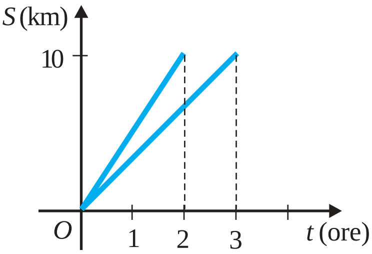
7. Care dintre punctele $A(-10;\ -6)$, $B(20;\ -8)$, $C(-40;\ 4)$ aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{1}{5}x - 4?$

8. Într-o butelie sunt 1,6 kg de gaz lichid. Aragazul consumă într-o oră 0,1 kg de gaz. Descrieți analitic dependența dintre masa gazului din butelie și timpul de funcționare (în ore) a aragazului.

9. Mihai avea 20 de lei. El a cumpărat câteva caiete la prețul de 3 lei. Descrieți analitic dependența dintre rest și numărul de caiete cumpărate.

10. Un robinet a fost deschis pentru a umple un vas cu capacitatea de 20 *l*. Trasați graficul dependenței funcționale dintre volumul apei din vas și timp, dacă apa din robinet curge cu viteza de 4 *l*/min.

11. Graficele din figura alăturată reprezintă mişcarea a două persoane. Viteza cărei persoane este mai mare?



12. Scrieți formula prin care se defineşte funcția de gradul I, dacă graficul ei intersectează axele sistemului de axe ortogonale în punctele:

a) $A(0; -1)$, $B(2; 0)$;
b) $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $B(-2; 0)$;
c) $A(0; \sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}; 0)$;
d) $A(0; -4{,}5)$, $B(9; 0)$.

13. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Stabiliți poziția relativă a graficelor acestor funcții, dacă:

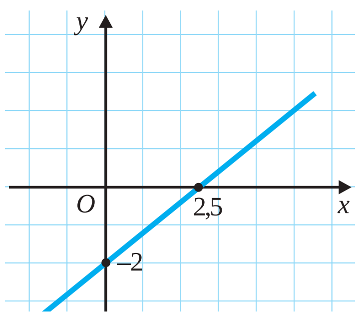
a) $f(x) = 1{,}5x - 1$, $g(x) = 1{,}5x + 2$;
b) $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = 3x - 4$;
c) $f(x) = 2{,}5x - 2$, $g(x) = 2{,}5x$;
d) $f(x) = -2x + 1$, $g(x) = -2x - 1$.

14. Stabiliți tipul unghiului format de direcția pozitivă a axei Ox și graficul funcției:

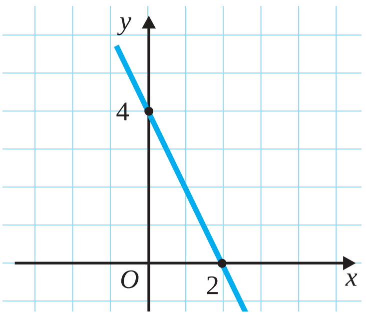
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$;
c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3}x$;
d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -0{,}8x - 1$.

15. Definiți analitic funcția de gradul I al cărei grafic este reprezentat:

a)



b)



16. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 8$.
1) Aflați zeroul funcției f.
2) Trasați graficul funcției f.
3) Utilizând graficul, determinați valorile lui x, pentru care:

a) $f(x) > 0$;
b) $f(x) < 0$;
c) f este strict crescătoare;
d) f este strict descrescătoare.

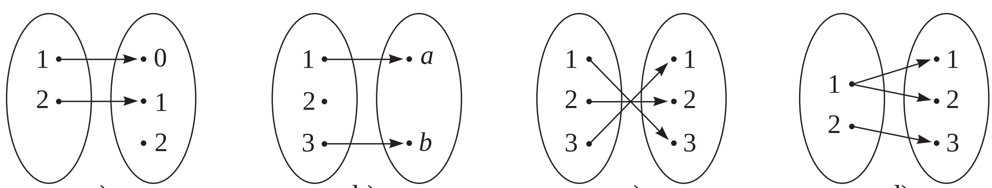
17. Graficul funcției f de gradul I este dreapta AB. Definiți analitic funcția f, dacă:
a) $A(0;-2)$, $B(1;1)$; b) $A(0;8)$, $B(-3;2)$.

18. Aflați punctul de intersecție a graficelor funcțiilor:
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-6$;
b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-4$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-2x+1$.

19. Trasați graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă:
a) $f(x)=\begin{cases}2x+1, \text{ pentru } x<0\\ -x+1, \text{ pentru } x\geq 0;\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}3x, \text{ pentru } x\leq 2\\ 6, \text{ pentru } x>2;\end{cases}$
c) $f(x)=\begin{cases}-3x-1, \text{ pentru } x<1\\ -4, \text{ pentru } x\geq 1.\end{cases}$

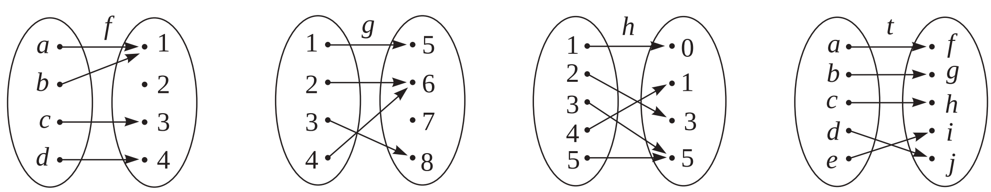
Exerciții și probleme recapitulative

1. Care dintre următoarele diagrame definesc o funcție?



a) b) c) d)

2. Care este domeniul de definiție și mulțimea de valori ale funcției definite de diagrama:



a) b) c) d)

3. Examinați funcțiile definite în exercițiul **2** și calculați:
a) $f(a)$, $f(c)$, $f(d)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$;
b) $h(1)$, $h(4)$, $h(5)$, $t(a)$, $t(d)$, $t(e)$.

4. Examinați funcțiile definite în exercițiul **2** și determinați punctele în care:
a) valoarea funcției f este 3, valoarea funcției g este 6;
b) valoarea funcției h este 5, valoarea funcției t este f.

5. Descrieți printr-un tabel funcția:

a) $f: \{1, 3, 5\} \to \{4, 10, 16\}$, $f(x) = 3x + 1$;

b) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2 \cdot |x|$;

c) $f: \{-3, -2, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -x$;

d) $f: \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2 - 1$.

6. Calculați $f(1)$, $f(3)$ și $f(5)$, dacă:

a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{1}{15}x$;

b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -x + 2$;

c) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 4 - x$;

d) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = |x| + 2$.

7. Scrieți analitic (printr-o formulă) funcția care pune în corespondență:

a) fiecărui număr natural dublul pătratului acestui număr;

b) fiecărui număr întreg sfertul opusului său;

c) fiecărui număr rațional nenul opusul inversului său;

d) fiecărui număr real radicalul modulului său.

8. Aflați mulțimea valorilor funcției:

a) $f: \{-2, -1, 5, 7\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;

b) $f: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - 1$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

9. Trasați graficul funcției:

a) $f: \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 4\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$;

b) $f: \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 5\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -2x - 1$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$.

10. Descrieți printr-un tabel funcția al cărei grafic este mulțimea:

a) $G_f = \{(0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9)\}$;

b) $G_f = \{(0; 0), (1; 2), (2; 4), (3; 6)\}$;

c) $G_f = \{(-2; 2), (-1; 2), (0; 2), (1; 2), (2; 2)\}$;

d) $G_f = \left\{(1; 1),\ (2; 0{,}5),\ \left(3; \frac{1}{3}\right),\ (4; 0{,}25)\right\}$.

11. Descrieți analitic fiecare funcție definită în exercițiul **10**.

12. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă:

a) $a = 3$, $b = -1$; b) $a = b = -2$; c) $a = -1$, $b = 3$; d) $a = b = 3$.

13. Pentru fiecare dintre funcțiile definite în exercițiul **12**, aflați punctele de intersecție cu axele sistemului de axe ortogonale și tipul unghiului format de graficul funcției cu direcția pozitivă a axei Ox.

14. Completați cu numărul potrivit:

a) $A\left(\frac{1}{5}; \square\right) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 20x$;

b) $B\left(\frac{1}{3}; \square\right) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -18x$;

c) $C(\square; -3) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 12x$;

d) $D(\square; -1) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 4$.

15. Care dintre următoarele scrieri definește o funcție? Justificați.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x$.

16. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Selectați formulele care pot defini funcția f:

a) de gradul I;

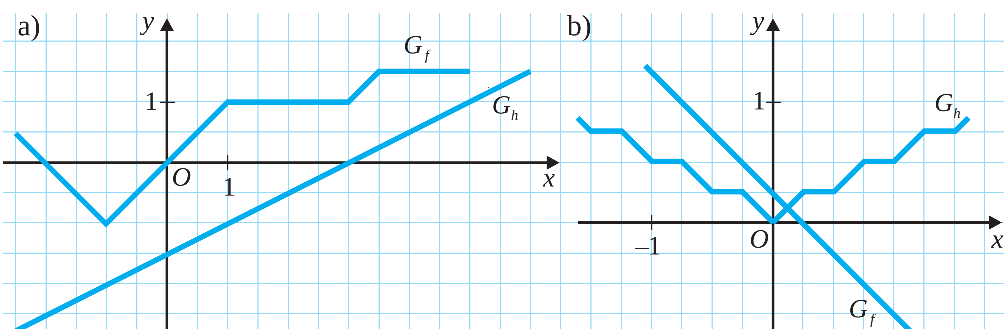
b) constantă;

c) proporționalitate directă.

$\boxed{f(x) = \frac{x}{4}}$ $\boxed{f(x) = \frac{4-x}{2}}$ $\boxed{f(x) = 2(1-x) - 2}$ $\boxed{f(x) = 0}$

$\boxed{f(x) = 5}$ $\boxed{f(x) = \frac{1+x}{2}}$ $\boxed{f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}}$ $\boxed{f(x) = x^2}$

17. Examinați graficele funcțiilor f și h. Calculați valorile funcțiilor f și h în punctele de abscisă: $-1{,}5$; -1; $-0{,}5$; 0; $0{,}5$; 1; $1{,}5$.



18. Scrieți analitic funcția definită de tabelul:

a)

x	-5	-3	-1	3	5
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$

b)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	0	-1	-2	-3

c)

x	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0

d)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	2	3

19. Completați adecvat:

a) Punctul $A(1; 1)$ aparține graficului funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \square \cdot x - 1$.

b) Punctul $B(-1; 1)$ aparține graficului funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + \square$.

c) Punctul $C(\square; -15)$ aparține graficului funcției $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 1$.

d) Punctul $D(\square; 3)$ aparține graficului funcției $f\colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R},\ f(x) = |x + 2|$.

20. Fie funcția $f\colon \{10, 15, 20, 50, 100\} \to \mathbb{R}$. Definiți analitic funcția f care transformă:

a) în grame mase exprimate în kilograme;

b) în milimetri lungimi exprimate în centimetri;

c) în minute intervale de timp exprimate în secunde;

d) în grame mase exprimate în miligrame.

21. Determinați mulțimea valorilor funcției f definite în exercițiul **20**.

22. Determinați dacă graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conține puncte care au abscisa egală cu ordonata, dacă:

a) $f(x) = 2x - 4$; b) $f(x) = x + 0{,}19$; c) $f(x) = 0{,}8x - 5$; d) $f(x) = |x|$.

23. Din 25 *l* de lapte se obțin 3 *l* de smântână.

a) Definiți analitic funcția f care pune în corespondență fiecărei cantități x de lapte cantitatea de smântână ce se obține din x litri de lapte.

b) Calculați $f(180)$; $f(0{,}5)$; $f(200)$.

c) În ce puncte valoarea funcției f este $4{,}5$; $0{,}6$; $0{,}5$?

24. Câte funcții ce au ca domeniu şi codomeniu mulțimile $\{1; 2\}$ şi, respectiv, $\{1; 2; 3\}$ se pot defini?

25. În tabel sunt indicate tarifele pentru convorbirile telefonice pentru două pachete.

Pachetul	Minute incluse	Abonamentul (lei)	Tariful pentru un minut suplimentar (bani)
Standard	300	24	9,6
Econom	200	6	24

a) Definiți câte o funcție care descrie formula de calcul a notei de plată pentru fiecare pachet.

b) Calculați valorile funcțiilor S şi E, corespunzătoare pachetului *Standard* şi, respectiv, pachetului *Econom*, în punctele 100, 200, 250, 300, 400.

c) Aflați valorile argumentului x pentru care $S(x) = E(x)$.
Ce informație furnizează această egalitate?

26. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 3$.

a) Calculați $f(f(-1)),\ f(f(2))$.

b) Pentru care valori ale lui x obținem $f(x) = f(f(x))$?

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 minute

Varianta 1

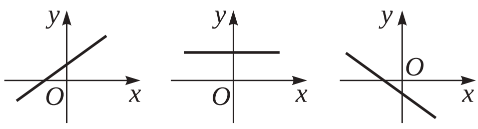
1p

1. Fie $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{2}{7}x + 4.$

Precizați cele trei elemente ale funcției f.

1p

2. În imagine este reprezentat graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx + n,$ $m, n \in \mathbb{R}.$ Comparați cu zero numerele m şi n.



a) b) c)

4p

3. Reprezentați grafic funcția

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -3x + 6.$

a) Aflați zeroul funcției f.

b) Determinați semnul funcției f.

c) Precizați dacă funcția f este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

d) Stabiliți coeficientul unghiular (panta) graficului funcției f.

2p

4. a) Completați, astfel încât să obțineți o proporționalitate directă cu coeficient unghiular pozitiv

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \boxed{}\,x.$

b) Precizați tipul unghiului format de graficul funcției f cu direcția pozitivă a axei Ox.

2p

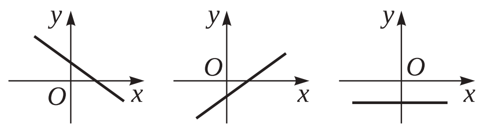
5. Scrieți formula care exprimă dependența timpului t de viteza v, fiind dată distanța parcursă s. Este această dependență o proporționalitate directă?

Varianta 2

1. Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2\sqrt{x} - 3.$

Precizați cele trei elemente ale funcției g.

2. În imagine este reprezentat graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx + n,$ $m, n \in \mathbb{R}.$ Comparați cu zero numerele m şi n.



a) b) c)

3. Reprezentați grafic funcția

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x - 4.$

a) Aflați zeroul funcției g.

b) Determinați semnul funcției g.

c) Precizați dacă funcția g este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

d) Stabiliți coeficientul unghiular (panta) graficului funcției g.

4. a) Completați, astfel încât să obțineți o proporționalitate directă cu coeficient unghiular negativ

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \boxed{}\,x.$

b) Precizați tipul unghiului format de graficul funcției g cu direcția pozitivă a axei Ox.

5. Scrieți formula care exprimă dependența timpului t de distanța s, fiind dată viteza v. Este această dependență o proporționalitate directă?

CAPITOLUL 4 Calcul algebric

§ 1. Folosirea literelor în calcul

1.1. Adunarea numerelor reale reprezentate prin litere

1 Domnul Bănuț a fost timp de două zile la Chișinău. Econom din fire (sau, poate, curios), a hotărât să calculeze cât a cheltuit pentru călătoria cu transportul urban.

Observați tabelul, luând în considerare că a este prețul (în lei) al unei călătorii cu autobuzul, iar t – prețul (în lei) al unei călătorii cu troleibuzul.

	Autobuz		Troleibuz	
	Nr. de călătorii	Costul	Nr. de călătorii	Costul
Sâmbătă	2	$2a$	3	$3t$
Duminică	1	a	2	$2t$
Total	3	?	?	?

Explicăm

Sâmbătă, domnul Bănuț a cheltuit $(2a+3t)$ lei.

Duminică, domnul Bănuț a cheltuit ($\square$ + $\square$) lei.

Domnul Bănuț a cheltuit în total ($2a + 3t + a +$ $\square$) lei, adică ($3a +$ $\square$) lei.

2 Examinați și completați: $2\sqrt{3}-\sqrt{5}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}$ $\qquad$ $2a+3t+a+2t$

↓ Radicali asemenea: $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{3}$; $\square$ și $2\sqrt{5}$.

↓ Termeni asemenea: $2a$ și a; $\square$ și $\square$.

Fiecare din expresiile algebrice $2a$, $3t$, a, $2t$, $-5bc$, $\sqrt{2}y$ este formată din **coeficient** și **parte literală.**
Coeficientul este număr real.
Termenii unei expresii care au aceeași parte literală se numesc **termeni asemenea**.

$-\sqrt{2}\,x$; $\frac{1}{9}a^2b$; $2xyz$

■ – coeficientul

■ – partea literală

A aduna (sau **a reduce**) **termenii asemenea** înseamnă a înlocui aceşti termeni cu un termen asemenea, având coeficientul egal cu suma coeficienţilor termenilor daţi.

• Reproduceţi şi completaţi:

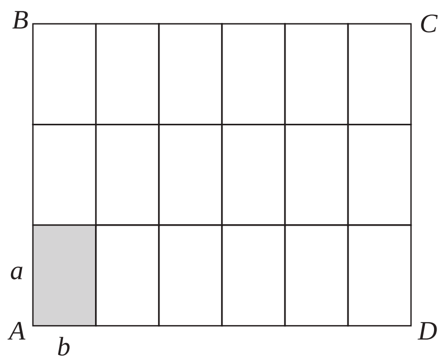
Expresia	$2a$	t	$-\sqrt{3}x$	$\frac{1}{4}y$	$-\frac{a}{3}$	$5sm$
Coeficientul		1				

3 Observaţi şi continuaţi reducerea termenilor asemenea:

$$4\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}y+\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}-1=\left(4\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)x+\left(-\frac{1}{9}+\square\right)y-1=5x+\square\, y-1.$$

1.2. Înmulţirea şi împărţirea numerelor reale reprezentate prin litere

1 Dreptunghiul $ABCD$ este împărţit într-o reţea de dreptunghiuri cu dimensiunile a şi b.
Fie $\mathscr{A}$ aria dreptunghiului $ABCD$, iar S – aria dreptunghiului mic.
Completaţi adecvat:
Dimensiunile dreptunghiului $ABCD$ sunt $3a$ şi $6b$.



$\mathscr{A}=3a\cdot 6b$, iar $S=\square$.

Atunci, $\mathscr{A}=18\cdot S=18\cdot\square$. → $3a\cdot 6b=18\cdot\square$

• Ce rezultat se obţine, dacă $a=b$?

2 Examinaţi şi completaţi adecvat:

a) $3\cdot 2^2\cdot 5\cdot 2^3\cdot 4\cdot 5=3\cdot 4\cdot 2^{2+3}\cdot 5^{\square}=\square\cdot 2^{\square}\cdot 5^{\square}$.

b) $5a^4\cdot 6b^2\cdot a^3\cdot 3b=5\cdot\square\cdot 3\cdot a^{4+3}\cdot b^{\square+\square}=\square\cdot a^{\square}\cdot b^{\square}$.

Pentru a înmulţi numere reale reprezentate prin litere:
- înmulţim coeficienţii;
- înmulţim părţile literale, utilizând proprietăţile puterii.

3 Examinaţi şi completaţi adecvat:

a) $(18\cdot 5^4):(6\cdot 5^2)=(18:6)\cdot(5^4:5^2)=3\cdot 5^{\square-\square}=3\cdot 5^{\square}$.

b) $12x^5y^3:3x^2y=(12:3)\cdot(x^5:x^2)\cdot(y^3:y)=\square\cdot x^{5-2}\cdot y^{\square-\square}=\square\cdot x^{\square}y^{\square}$.

Pentru a împărţi numere reale reprezentate prin litere:
- împărţim coeficienţii;
- împărţim părţile literale, utilizând proprietăţile puterii.

1.3. Ridicarea la putere cu exponent natural a numerelor reale reprezentate prin litere

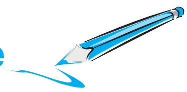
Examinați și completați adecvat:

a) $\left(\frac{3}{4}\cdot 7^2\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot (7^2)^{\square} = \frac{3^3}{4^{\square}}\cdot 7^{2\cdot\square} = \frac{3^{\square}}{4^{\square}}7^{\square}$;

b) $(-0{,}2ab^3)^3 = (-0{,}2)^3\cdot a^{\square}\cdot (b^3)^{\square} = \square \cdot a^{\square}\cdot b^{3\cdot\square} = -0{,}008\cdot a^{\square}\, b^{\square}$.

Pentru a ridica la putere cu exponent natural un număr real reprezentat prin litere:
- ridicăm la puterea dată coeficientul;
- ridicăm la puterea dată fiecare factor din partea literală.

Exerciții și probleme



1. Copiați și completați:

a)

Expresia	$-3x$	$2a^2$	$0{,}4xy$	$1\frac{1}{2}ab$	$\sqrt{2}xa$	$-5ax$	b^2c	$-3\sqrt{3}c$
Coeficientul								

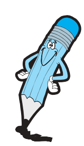
b)

Expresia	xzy	$-abc$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}c^2$	-15	$0,(8)d$	$7{,}2x^2$	$-\frac{ax}{2}$
Coeficientul								

2. Observați expresia și scrieți termenii asemenea:

a) $-2x+3ay-\frac{1}{3}x+2{,}5y^2+9ay-\sqrt{5}y^2+1{,}4x-5.$

$-2x$, ...; $3ay$, ...; $2{,}5y^2$, ...



b) $\frac{x^2a}{2}-\frac{5}{2}+\frac{xa}{2}-\frac{5y}{3}-\sqrt{2}xa-x^2a+1+y.$

$\frac{x^2a}{2}$, ...; $-\frac{5}{2}$, ...; $\frac{xa}{2}$, ...; $\frac{5y}{3}$, ...

3. Reduceți termenii asemenea:

a) $2x-5y+3x+y$;

b) $-2+2a-3b-a+b$;

c) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2\sqrt{2}x+\sqrt{2}y$;

d) $a+b-1+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+1$.

4. Efectuați înmulțirea: a) $3x\cdot 5y$; b) $-2a\cdot(-3b)$; c) $2xy\cdot x$.

5. Scrieți ca sumă expresia: a) $7{,}5xy$; b) $-\frac{2}{5}x^2$; c) $\sqrt{3}y$; d) x.

6. Efectuați înmulțirea:

a) $-\frac{1}{4}x^2y\cdot 2xy$; b) $0{,}6ab^2\cdot 5a^2b$; c) $2x^3y\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)$; d) $-3\sqrt{18}ab\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}a^3b^2$.

7. Efectuați împărțirea:

a) $12xy:3x$; b) $-\frac{2}{27}x^3y^4:\frac{1}{9}x^2y$;

c) $0{,}1a^4b^2:(-5ab^2)$; d) $1,(5)a^6b^7:0,(5)a^3b^5$.

8. Ridicați la putere:

a) $(-2a^3b)^2$; b) $(3xy^2)^4$; c) $\left(\frac{1}{3}x^5y\right)^3$; d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}ab^5\right)^4$.

9. Completați expresia, astfel încât să se reducă toți termenii expresiei:

a) $-3xy+2x^2y-5+\ldots$; b) $\sqrt{2}ab-\sqrt{3}a^2b+10+\ldots$

10. Completați cu expresia potrivită:

a) $2x^2y^3\cdot\square=6x^3y^5$; b) $\square\cdot ab^2=5a^3b^2$;

c) $3xy\cdot\square=0{,}3x^5y^2$; d) $\square\cdot 2a=\frac{2}{3}a^2b^2$.

11. Reduceți termenii asemenea:

a) $2y-5x^2+51-18x^2-2y+3x^2-50-5x+10x^2$;

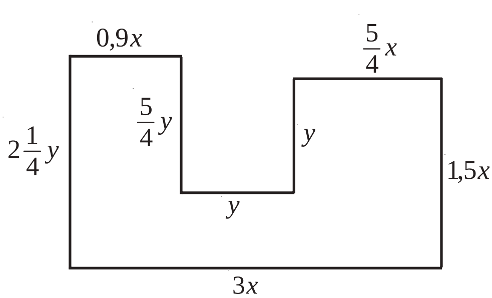
b) $\frac{2}{5}ax+ax^2-\frac{1}{10}ax-a^2x-0{,}1ax+a^2-\frac{2}{3}a^2+ax$.

12. Copiați și completați:

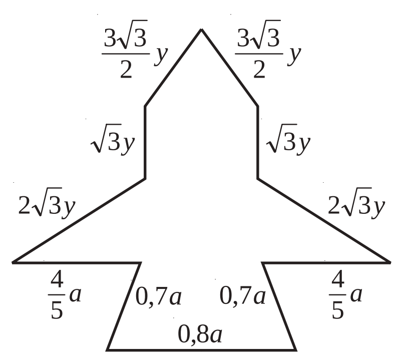
a) $4x^5y^2:\square=2x^3y$; b) $\square:3ab^2=3ab$;

c) $x^3y^8:\square=3x$; d) $\square:a^2b^3=6a^3b^2$.

13. Calculați perimetrul figurii:



a)



b)

14. Produsul dintre pătratul unui număr și cubul altui număr este de 15 ori mai mare decât dublul produsului pătratelor acestor numere. Aflați unul din numere.

15. De câte ori perimetrul unui dreptunghi este mai mare decât perimetrul unui pătrat, dacă lungimea dreptunghiului este de 2,5 ori mai mare, iar lățimea – de 1,2 ori mai mică decât lungimea laturii pătratului?

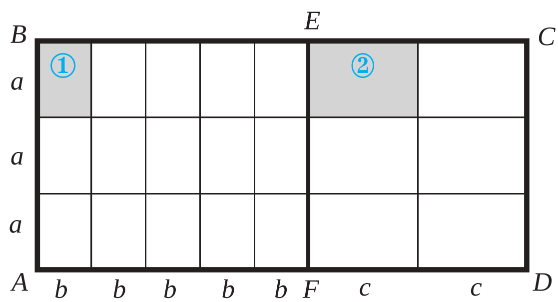
16. De câte ori aria unui dreptunghi este mai mare decât aria unui pătrat, dacă dimensiunile dreptunghiului sunt mai mari decât lungimea laturii pătratului de 1,2 ori şi, respectiv, de 1,5 ori?

17. Suma a două numere este cu 124 mai mare decât diferența lor. Aflați numerele, dacă produsul lor este egal cu 310.

§2. Desfacerea parantezelor. Factorizări

2.1. Desfacerea parantezelor

1 Dreptunghiul *ABCD* este împărțit în două dreptunghiuri: *ABEF* şi *FECD*. Fiecare din dreptunghiurile *ABEF* şi *FECD* este divizat într-o rețea de dreptunghiuri.
Fie $\mathscr{A}$ aria dreptunghiului *ABCD*.



Observați desenul şi completați:

$$\mathscr{A} = 3a(5b+2c)$$

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_{ABEF} + \mathscr{A}_{FECD} =$$

$$= 3a\cdot 5b + 3a\cdot \square$$

$$3a(5b+2c) = 3a\cdot 5b + \square\cdot\square =$$

$$= \square\, ab + \square\, ac$$

Înmulțirea numerelor reale reprezentate prin litere este distributivă față de adunare:
Pentru orice numere reale *a*, *b*, *c*:

$$a(b+c) = ab + ac, \qquad (a+b)c = ac + bc.$$

① ② ③ ①② ①③ ① ② ③ ①③ ②③

• Completați adecvat: $a(b-c) = a(b+(-c)) = a\cdot\square - a\cdot\square$.

2 Examinați şi completați adecvat:

(a + b) · c ac + bc

$$(2x+3y)(s+t) = 2x\cdot(s+t) + \square\cdot(s+t) = 2xs + 2xt + \square\cdot s + \square\cdot t.$$

a · (b + c) ab ac

Pentru orice numere reale *a*, *b*, *c*: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$

① ② ③ ④ ①③ ①④ ②③ ②④

2.2. Factorizări

Să se scrie ca produs de factori expresia $12x^4y^3+18x^2y^5$.

$$12x^4y^3+18x^2y^5=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}12x^4y^3:6x^2y^3=2x^2\\ 18x^2y^5:6x^2y^3=3y^{\square}\end{array}\right\}=$$

$$=6x^2y^3(2x^2+3y^{\square})$$

① Găsim c.m.m.d.c. al coeficienților 12 și 18: $(12, 18)=\mathbf{6}$.

② Găsim cel mai mic exponent al puterii fiecărui factor comun din părțile literale:

$\boldsymbol{x}\to\min(4,\ 2)=\mathbf{2}$

$\boldsymbol{y}\to\min(3,\ 5)=\mathbf{3}$.

③ Scoatem factorul comun $\boldsymbol{6x^2y^3}$.
În paranteze rămâne rezultatul împărțirii fiecărui termen la $6x^2y^3$.

Exerciții și probleme

1. Desfaceți parantezele:
a) $x(y+z)$; b) $(y-x)z$; c) $2a(3b-c)$; d) $-\frac{1}{2}x(2x+y)$.

2. Desfaceți parantezele:
a) $(x+y)(u+v)$; b) $(u-v)(x+y)$; c) $(a-b)(c-d)$; d) $(b-a)(x+y)$.

3. Calculați:
a) $-\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{3})$; b) $\sqrt{6}(\sqrt{24}-\sqrt{6})$;
c) $(\sqrt{8}+\sqrt{5})(\sqrt{8}-\sqrt{5})$; d) $\left(2-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(2+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

4. Calculați aria dreptunghiului cu dimensiunile $(\sqrt{5}+3)$ cm și $(3-\sqrt{5})$ cm.

5. Desfaceți parantezele:
a) $\frac{1}{9}x^2y(9x-3y^2)$; b) $\frac{2}{3}xy^2(2y^2+3x^2)$;
c) $(x^2-2y^2)(5x+0{,}5y)$; d) $(3x^3+4y)\left(\frac{1}{3}y+\frac{1}{12}x^2\right)$.

6. Desfaceți parantezele:
a) $(2a-\sqrt{3})(a^2+3a-\sqrt{3})$; b) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
c) $(b-2b^2+1)(1-b)$; d) $(x^2+2xy+y^2)(x-y)$.

7. Descompuneți în factori:
a) $6mn+6m$; b) $12by-9b$; c) $15ax+20bx$; d) $7y^5+21y^3$;
e) $4x(x-1)-(1-x)$; f) $y(2-x)+9(x-2)$; g) $5(a-b)+y(b-a)^2$.

8. Comparați aria unui pătrat și a unui dreptunghi, dacă lungimea dreptunghiului este cu $\sqrt{10}$ cm mai mare, iar lățimea – cu $\sqrt{10}$ cm mai mică decât lungimea laturii pătratului.

9. Comparați perimetrul unui pătrat și al unui dreptunghi, dacă lungimea dreptunghiului este cu $3\sqrt{3}$ cm mai mare, iar lățimea – cu $5\sqrt{3}$ cm mai mică decât lungimea laturii pătratului.

10. Copiați și completați:

a) $\square(2xy-5y)=10x^3y^2-\square$; b) $-7ax(\square+\square)=a^2x-14a^3x^2$;

c) $\square\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{4}{3}y^2\right)=\square+\frac{1}{9}xy^3$; d) $\frac{5}{6}a^2b(\square+\square)=a^2b^2+5a^2b$.

11. Scrieți ca produs de factori:

a) $5a^2b-25ab^2$; b) $-18x^4y^5-24x^5y^4$; c) $-2xy+3x^3y$; d) $16xy^4+24y$.

12. Fie 3 numere naturale consecutive. Pătratul primului număr este cu 56 mai mic decât produsul celorlalte două numere. Aflați numerele.

13. Descompuneți în factori:

a) $5x^2-10xy+5y^2$; b) $xy+6-2x-3y$;

c) $3x-yx-3y+y^2$; d) $2ab+b+2a+b^2$.

14. Un triunghi dreptunghic are catetele de $\sqrt{12}$ cm și $(\sqrt{12}+\sqrt{3})$ cm. Aflați aria triunghiului.

Indicație. Completați triunghiul până la un dreptunghi.

15. Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

a) $3xy(2x^2-y^3)+2xy^4-5x^3y$; b) $-\sqrt{3}ab^2(3ab-2\sqrt{3}b)+3\sqrt{3}a^2b^3+ab^3$.

16. Produsul dintre suma și diferența a două numere pozitive este cu 49 mai mic decât pătratul unuia dintre aceste numere și cu 1 mai mare decât opusul pătratului celuilalt număr. Aflați numerele.

17. Demonstrați că, dacă a este număr întreg, atunci:

a) a^2-a se divide cu 2; b) a^2+a se divide cu 2.

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

18. Pentru 32 de baloane trebuie de plătit atâția lei câte baloane se pot procura cu 8 lei. Cât costă un balon?

19. Luând în considerare că $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, calculați suma:

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$.

§ 3. Formule de calcul prescurtat

3.1. Pătratul sumei cu doi termeni

Examinați, comentați şi completați adecvat: $(a+b)^2=?$

Metoda I

$$(a+b)^2=(\underset{\textcircled{1}}{a}+\underset{\textcircled{2}}{b})\cdot(\underset{\textcircled{3}}{a}+\underset{\textcircled{4}}{b})=\underset{\textcircled{1}\,\textcircled{3}}{a\cdot a}+\underset{\textcircled{1}\,\textcircled{4}}{a\cdot b}+\underset{\textcircled{2}}{\square}\cdot\underset{\textcircled{3}}{\square}+\underset{\textcircled{2}}{\square}\cdot\underset{\textcircled{4}}{\square}=$$

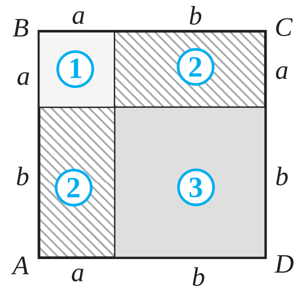
$$=a^2+2\,\square\,\square+\square^2$$

Metoda II

$\mathscr{A}_{ABCD}=(a+b)^2$ sau

$\mathscr{A}_{ABCD}=\mathscr{A}_{\textcircled{1}}+2\mathscr{A}_{\textcircled{2}}+\mathscr{A}_{\textcircled{3}}=a^2+2\,\square\,\square+\square^2$

$(a+b)^2=a^2+2\,\square\,\square+\square^2$



Pătratul unei sume cu doi termeni este egal cu suma pătratelor lor plus dublul produsului termenilor: $\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$.

3.2. Pătratul diferenței a două numere reale

Examinați, comentați şi completați adecvat: $(a-b)^2=?$

$$(a-b)^2=[a+(-b)]^2=\bigcirc^2+2\cdot a\cdot(-b)+\square^2=\bigcirc^2-2ab+\square^2$$

Pătratul diferenței a două numere reale este egal cu descăzutul la pătrat plus scăzătorul la pătrat, minus dublul produsului lor: $\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$.

• Demonstrați că $(a-b)^2=(b-a)^2$.

3.3. Produsul dintre suma și diferența a două numere reale

Examinați, comentați şi completați adecvat: $(a+b)(a-b)=?$

$$(a+b)(a-b)=(\underset{\textcircled{1}}{a}+\underset{\textcircled{2}}{b})(\underset{\textcircled{3}}{a}+\underset{\textcircled{4}}{(-b)})=\underset{\textcircled{1}\,\textcircled{3}}{a\cdot a}+\underset{\textcircled{1}\,\textcircled{4}}{a(-b)}+\underset{\textcircled{2}}{\square}\,\underset{\textcircled{3}}{\square}+\underset{\textcircled{2}}{\square}\,\underset{\textcircled{4}}{\square}=$$

$$=a^2-ab+\square\,\square+\square^2=$$

$$=\square$$

$$(\bigcirc+\square)^2=\bigcirc^2+2\bigcirc\square+\square^2$$

$$(\bigcirc-\square)^2=\bigcirc^2-2\bigcirc\square+\square^2$$

$$(\bigcirc+\square)(\bigcirc-\square)=\bigcirc^2-\square^2$$

Produsul dintre suma și diferența a două numere reale este egal cu diferența pătratelor celor două numere: $\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$.

Exerciții și probleme

1. Efectuați:

a) $(x+y)^2$; b) $(a-3)^2$; c) $(x+a)^2$;
d) $(b-2)^2$; e) $(3-x)^2$; f) $(4+a)^2$.

2. Efectuați:

a) $(2x-3y)^2$; b) $(3a+5b)^2$; c) $(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y)^2$;
d) $\left(\frac{1}{3}a+2x\right)^2$; e) $(\sqrt{3}+3b)^2$; f) $\left(\frac{b}{4}-\frac{a}{3}\right)^2$.

3. Efectuați:

a) $(x+y)(x-y)$; b) $(c-b)(c+b)$; c) $(x+4)(x-4)$;
d) $(8-a)(8+a)$; e) $(y-\sqrt{3})(y+\sqrt{3})$; f) $(\sqrt{7}-x)(x+\sqrt{7})$.

4. Copiați și completați:

a) $(\square+8a)(\square-8a)=49y^2-\square$; b) $(5x-\square)(5x+\square)=\square-7y^2$;
c) $(\square-3b)(\square+\square)=25y^2-9b^2$; d) $(0{,}6a+\square)(\square-\square)=0{,}36a^2-2b^2$.

5. Copiați și completați:

a) $(3a+\square)^2=9a^2+42a+\square$; b) $(\square-5b)^2=36a^2-\square+25b^2$;
c) $(4x-\square)^2=\square-24xy+\square$; d) $(\square+\sqrt{2}a)^2=\square+4\sqrt{3}ab+\square$.

6. Aflați aria pătratului cu latura de:

a) $(\sqrt{5}-2)$ cm; b) $(2\sqrt{3}+1)$ cm.

7. Pătratul unui număr natural este cu 65 mai mic decât pătratul succesorului său. Aflați numărul.

8. Pătratul unui număr natural este cu 85 mai mare decât pătratul predecesorului său. Aflați numărul.

9. Dacă mărim lungimea laturii unui pătrat cu 6 cm, obținem un nou pătrat, cu aria cu 132 cm^2 mai mare. Aflați lungimea laturii pătratului inițial.

10. Dacă micşorăm lungimea laturii unui pătrat cu 8 cm, obținem un nou pătrat, cu aria 128 cm^2 mai mică. Aflați lungimea laturii pătratului inițial.

11. Aplicând formula $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, calculați oral:

a) $101\cdot 99$; b) $51\cdot 49$; c) $61\cdot 59$;
d) $102\cdot 98$; e) $32\cdot 28$; f) $43\cdot 37$.

12. Aplicând formulele $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, calculați oral:

a) 41^2; b) 59^2; c) 51^2; d) 38^2; e) 62^2.

13. *Adevărat* sau *fals?*

a) Pentru orice numere reale a şi b are loc relația $(a+b)^2=(-a-b)^2$.
b) Pentru orice numere reale a şi b are loc relația $(a-b)^2=-(b-a)^2$.
c) Pentru orice numere reale a şi b are loc relația
$2(a^2-b^2)=(a-b)^2+(a+b)^2$.

14. Se ştie că $a+\frac{1}{a}=4$. Aflați: a) $a^2+\frac{1}{a^2}$; b) $a^4+\frac{1}{a^4}$.

15. Se ştie că $\frac{1}{a}-a=8$. Aflați:

a) $a^2+\frac{1}{a^2}$; b) $a^4+\frac{1}{a^4}$.

16. Calculați:

a) $(\sqrt{3}-2)^{100}\cdot(\sqrt{3}+2)^{100}$; b) $(9-4\sqrt{5})^{50}\cdot(9+4\sqrt{5})^{50}$;
c) $(\sqrt{8}-\sqrt{2})^{20}$; d) $(\sqrt{3}-\sqrt{12})^{16}$.

17. Demonstrați că, dacă a este număr întreg impar, a^3-4a de asemenea este număr întreg impar.

18. Fie trei numere naturale consecutive. Demonstrați că dublul primului număr este cu 3 mai mic decât modulul diferenței pătratelor celorlalte două numere.

§4. Simplificarea expresiilor cu ajutorul formulelor de calcul prescurtat

4.1. Restrângerea pătratului unei sume sau diferențe

Observați şi completați adecvat.

a) $x^2+4xy+4y^2=(x+\square)^2$

$x^2+2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2=(x+2y)^2$

$\rightarrow$ $x^2+4xy+4y^2=(x+2y)^2$

b) $a^2-2\sqrt{2}ab+\square^2=(a-\square)^2$

$a^2-2\cdot a\cdot\square+(\quad)^2=(a-\square)^2$

$\rightarrow$ $a^2-2\sqrt{2}ab+\square^2=(a-\square)^2$

c) $29+12\sqrt{5}=(\bigcirc+\square)^2$

$29+2\cdot 2\cdot 3\sqrt{5}=(\bigcirc+\square)^2$

① ② ③

① ②
$(2\cdot 3)^2=36>29$

② ③
$(3\sqrt{5})^2=45>29$

① ③
$$\boxed{\begin{array}{rcl} (2\sqrt{5})^2 & = 20 & <29 \\ & + & \\ 3^2 & = 9 & <29 \\ \hline & 29 & \end{array}}$$

$\rightarrow$ $2\sqrt{5}$, 3

$\rightarrow$ $29+12\sqrt{5}=(3+\square)^2$

d) $79-20\sqrt{3}=(\bigcirc+\square)^2$ $\rightarrow$?

4.2. Descompunerea în factori a diferenței de pătrate

Observați și completați adecvat:

a) $4x^2-\dfrac{y^2}{9}=(2x+\square)(\bigcirc-\dfrac{y}{3})$

$\bigcirc^2-\square^2=(\bigcirc+\square)(\bigcirc-\square)$

$\rightarrow$ $4x^2-\dfrac{y^2}{9}=\left(2x+\dfrac{y}{3}\right)(\bigcirc-\square)$

b) $2a-3b=(\bigcirc+\square)(\bigcirc-\square)$

$(\sqrt{2a})^2-(\sqrt{3b})^2=(\bigcirc+\square)(\sqrt{2a}-\square)$

$\rightarrow$ $2a-3b=(\bigcirc+\square)(\sqrt{2a}-\square)$

• Cum trebuie să fie numerele a și b din exemplul b)?

• Calculați oral $\dfrac{1{,}01^2-0{,}99^2}{0{,}04}$.

Exerciții și probleme

1. Completați:

a) $x^2-2xy+y^2=(x-\square)^2$; b) $x^4+4x^2+4=(\square+2)^2$;

c) $9a^2-6ab+b^2=(\square-b)^2$; d) $3x^2+4\sqrt{3}xy+4y^2=(\square+2y)^2$.

2. Restrângeți în pătrate:

a) $a^2+2ay+y^2$; b) b^2+c^2-2bc; c) $2xz+z^2+x^2$; d) $9-6y+y^2$.

3. Restrângeți în pătrate:

a) $16x^2+8xy+y^2$; b) $9y^2-12xy+4x^2$; c) $25x^2+40x+16$; d) $0{,}25a^2-2ab+4b^2$.

4. Completați adecvat:

a) $6-2\sqrt{5}=(\sqrt{5}-\square)^2$; b) $7+4\sqrt{3}=(2+\square)^2$;
c) $22-12\sqrt{2}=(\square-3\sqrt{2})^2$; d) $33+12\sqrt{6}=(\square+3)^2$;
e) $30-12\sqrt{6}=(2\sqrt{3}-\square)^2$; f) $50=(\sqrt{8}+\square)^2$.

5. Restrângeți în pătrate:

a) $29+12\sqrt{5}$; b) $73-40\sqrt{3}$; c) $89+36\sqrt{2}$;
d) $91-48\sqrt{3}$; e) $9+6\sqrt{2}$; f) $17-4\sqrt{15}$.

6. Completați adecvat:

a) $a^2-4b^2=(a-\square)(a+\square)$; b) $9y^2-0{,}25x^2=(\square-0{,}5x)(\square+0{,}5x)$;
c) $3a^2-8y^2=(\sqrt{3}a-\square)(\square+\square)$; d) $\frac{b^2}{6}-\frac{1}{7}x^2=\left(\square-\frac{x}{\sqrt{7}}\right)(\square+\square)$.

7. Descompuneți în factori:

a) $16a^2-25b^2$; b) $0{,}09x^2-0{,}01y^2$; c) $\frac{4}{25}y^2-\frac{25}{4}x^2$; d) $6b^2-7a^2$.

8. Scrieți numărul ca pătratul unei sume:
a) 48; b) 28; c) 35; d) 112; e) 99.

9. Scrieți numărul ca pătratul unei diferențe:
a) 60; b) 44; c) 72; d) 120; e) 58.

Model:
$50=(\sqrt{50})^2=(5\sqrt{2})^2=(2\sqrt{2}+3\sqrt{2})^2$

10. Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

a) $(a-\sqrt{2})^2-(a+\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}$; b) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}+a+b$; c) $\frac{x^2-4y^2}{x+2y}-2y$;
d) $(\sqrt{5}-x)^2+(x+\sqrt{5})^2-4\sqrt{5}$; e) $(a-2x)^2-4x^2-a^2$.

11. Descompuneți în factori:

a) $4a^2-y^2-2a-y$; b) $9x^2+3x-6xy+y^2-y$; c) $5b-4y-16y^2+25b^2$.

12. Calculați: a) $\frac{34^2-18^2}{104}$; b) $\frac{78^2-46^2}{64}$; c) $\frac{57^2-39^2}{44^2-26^2}$.

13. Suma pătratului unui număr real negativ şi a triplului său este egală cu 4. Aflați numărul.

14. Diferența dintre pătratul unui număr real pozitiv şi însuşi numărul este egală cu 12. Aflați acest număr.

15. Demonstrați că dacă a este număr întreg, atunci:

a) a^3-a se divide cu 3; b) a^3-a se divide cu 6.

16. Descompuneți în factori: a) a^2+b^2; b) $4x^2+9y^2$.
Indicație. a) Adăugați şi scădeți expresia $2|a||b|$.

Exerciții și probleme recapitulative

1. Reduceți termenii asemenea:

a) $3a+7b-1{,}5a-2{,}8b$; b) $-8x-3+7y+4x-6y+1$;

c) $2x^2y-0{,}5y^2x^2+\frac{1}{4}yx^2-2x^2y^2$; d) $a+\frac{3}{10}-\frac{2}{5}ab+\frac{1}{5}-\frac{3}{5}ab+\frac{a}{4}-1$.

2. Efectuați înmulțirea:

a) $\frac{2}{5}x^2\cdot 5y^3$; b) $-3a\cdot\frac{2}{3}a$; c) $\frac{3}{4}a\cdot\left(-\frac{2}{3}y\right)$;

d) $\sqrt{8}x\cdot\sqrt{2}y^2x$; e) $0,(5)x^2y\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)xy^2$.

3. Efectuați împărțirea:

a) $21x^3y^2:3xy$; b) $-18x^3y^2:(-6xy^2)$;

c) $\frac{3}{5}a^6b^2x:\frac{1}{3}a^4bx$; d) $35a^4b^5:7a^2b^3$.

4. Efectuați:

a) $(2x^3y^2)^6$; b) $(-\sqrt{7}x^3z^5)^8$; c) $(3\frac{1}{4}x^2z)^3$.

5. Calculați:

a) $(\sqrt{8}+\sqrt{32})\sqrt{2}$; b) $(\sqrt{27}-\sqrt{12})\sqrt{3}$;

c) $2\sqrt{5}(\sqrt{125}-3\sqrt{5})$; d) $(4\sqrt{24}+2\sqrt{54})(-0{,}5\sqrt{6})$.

6. Desfaceți parantezele:

a) $(\sqrt{3}+7)(\sqrt{3}-7)$; b) $(2\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-4)$;

c) $(\sqrt{12}-5)(2\sqrt{5}+12)$; d) $(5\sqrt{7}-\sqrt{13})(\sqrt{13}+5\sqrt{7})$.

7. Descompuneți în factori:

a) x^2y+3yz; b) $8xy-12x^2$; c) $2ab-4a^2b$; d) $-12y^4b^3-16yb^2$.

8. Desfaceți parantezele:

a) $\left(\frac{3}{4}x+\frac{2}{9}\right)^2$; b) $\left(-\frac{2}{5}x-\frac{5}{2}\right)^2$; c) $\left(\frac{1}{6}a-3b\right)^2$; d) $\left(8a^2-1\frac{1}{2}b\right)^2$.

9. Copiați și completați:

a) $(\boxed{}+3x)^2=\boxed{}+12xy+\boxed{}$; b) $(\boxed{}-2a)^2=\boxed{}-16ab+\boxed{}$;

c) $(4x+\boxed{})^2=\boxed{}+4xy+\boxed{}$; d) $(3a-\boxed{})^2=\boxed{}-4ab+\boxed{}$.

10. Calculați aria dreptunghiului cu laturile de:

a) $(\sqrt{3}+3)$ cm și $(\sqrt{27}+2)$ cm; b) $(5\sqrt{5}+1)$ cm și $(\sqrt{5}-1)$ cm;

c) $(6\sqrt{3}-3\sqrt{2})$ cm și $(6\sqrt{3}+3\sqrt{2})$ cm; d) $(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$ cm și $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ cm.

11. Calculați aria pătratului cu latura de:

a) $(7-\sqrt{2})$ cm; b) $(9+\sqrt{3})$ cm; c) $(2\sqrt{5}+3)$ cm; d) $(\sqrt{27}-3\sqrt{2})$ cm.

12. Calculați:

a) $\sqrt{82^2-18^2}$; b) $\sqrt{65^2-63^2}$; c) $\sqrt{113^2-112^2}$; d) $\sqrt{85^2-36^2}$.

13. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $-(a-5)(a+3)-(1-a)^2$; b) $(x-1)(x-2)-(x-4)^2$;

c) $(2a+0{,}5)^2-(0{,}5-2a)^2$; d) $(3-2x)(3+2x)+5x^2$;

e) $25x^2+(7+5x)(7-5x)$.

14. Transformați astfel încât numitorul să fie număr rațional:

a) $\dfrac{3}{2-\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{9}{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; d) $\dfrac{12}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}$.

15. Descompuneți în factori:

a) $x^2-18xy+81y^2$; b) $\dfrac{1}{36}x^2-xy+9y^2$;

c) $4xy+2x^2+2y^2$; d) $24xy-16x^2-9y^2$.

16. Aflați lungimea laturii pătratului cu aria de:

a) $(7-4\sqrt{3})\ \text{cm}^2$; b) $(49-12\sqrt{5})\ \text{cm}^2$.

17. Calculați:

a) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2$; b) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

18. Calculați $\dfrac{x+y}{2}\cdot\sqrt{xy}$, dacă:

a) $x=\sqrt{5}+2,\ \ y=\sqrt{5}-2$; b) $x=2\sqrt{7}-5,\ \ y=5+2\sqrt{7}$;

c) $x=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \ y=\dfrac{4}{\sqrt{20}}$; d) $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1},\ \ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$.

19. M-am gândit la un număr natural. L-am înmulțit cu el însuşi şi rezultatul l-am adunat cu dublul numărului inițial. Astfel, am obținut numărul 143. La ce număr m-am gândit?

20. M-am gândit la un număr natural. L-am înmulțit cu el însuşi şi din rezultat am scăzut dublul numărului inițial. Astfel, am obținut numărul 168. La ce număr m-am gândit?

21. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^2-4x=12$; b) $4x^2+12x=16$; c) $9x^2-6x=120$; d) $x^2+10x=24$.

Indicație. Aplicați formulele $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

22. Calculați:

a) $(\sqrt{45}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{11}-\sqrt{13})(\sqrt{13}+\sqrt{11})$; b) $(\sqrt{3}-\sqrt{12})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{11})(\sqrt{11}-\sqrt{7})$;

c) $\dfrac{7}{\sqrt{11}-2}-\dfrac{2}{\sqrt{11}-3}$; d) $\dfrac{2}{\sqrt{6}+2}+\dfrac{3}{\sqrt{6}+3}$.

23. Calculați:

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; b) $(\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}})^2$.

24. Se ştie că $a+b=8\sqrt{5}$ şi $ab=\frac{1}{\sqrt{5}}(a+b)$. Calculați a^2+b^2 şi a^4+b^4.

25. Se ştie că $x^2+y^2=25$ şi $(x+y)^4-(x-y)^4=40$. Calculați xy.

26. Demonstrați că produsul al trei numere naturale consecutive nenule nu poate fi cubul unui număr natural.

27. Compuneți câte o problemă de tipul celor de la ex. 18, 19, 20. Rezolvați problemele respective.

PENTRU CAMPIONI

28. Scrieți numărul 2011 ca o diferență de pătrate de numere naturale.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 minute

Varianta 1

1. Efectuați utilizând formulele calculului prescurtat: (2p)
a) $(2a-3)(2a+3)$;
b) $(m-2n)^2$.

2. Copiați şi completați: (2p)
$(3x+\square)^2=\square+\square+16$.

3. Descompuneți în factori: (2p)
$(5a+7)^2-4b^2$.

4. Calculați aria pătratului cu latura de: (2p)
$(2\sqrt{27}+\sqrt{3})$ cm.

5. Scrieți ca pătrat al unei diferențe: (2p)
$19-8\sqrt{3}$.

Varianta 2

1. Efectuați utilizând formulele calculului prescurtat:
a) $(2-3a)(2+3a)$;
b) $(4m+n)^2$.

2. Copiați şi completați:
$(\square-2x)^2=49-\square+\square$.

3. Descompuneți în factori:
$9x^2-(2y+1)^2$.

4. Calculați aria pătratului cu latura de:
$(2\sqrt{80}-\sqrt{5})$ cm.

5. Scrieți ca pătrat al unei sume:
$27+10\sqrt{2}$.

CAPITOLUL 5

Rapoarte algebrice

§ 1. Noțiunea de raport algebric

1 Observați, selectați și completați.

$\frac{5}{3}$ $-\frac{2}{5}$ $\frac{9{,}5}{6}$ $\frac{0{,}4}{2}$ $\frac{1}{5}$ $-\frac{4}{3}$ $\frac{4{,}2}{7}$ $\frac{2{,}6}{3{,}8}$ $\frac{2}{5}$ $-\frac{0{,}3}{0{,}4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{9{,}5}$

- Următoarele rapoarte nu sunt fracții: $\frac{9{,}5}{6}$, $\frac{0{,}4}{2}$, $\frac{4{,}2}{7}$, $\frac{2{,}6}{3{,}8}$, $\square$, $\square$.
- Numărătorul raportului $\frac{4{,}2}{7}$ este $\square$. Numitorul raportului $-\frac{0{,}3}{0{,}4}$ este $\square$.
- Valoarea raportului $\frac{3}{4}$ este 0,75, iar a raportului $\frac{0{,}4}{2}$ — $\square$.
- Rapoartele $\frac{0{,}4}{2}$ și $\frac{\square}{5}$ sunt egale.

2 Examinați și completați:

a) Dacă $\frac{a}{b}=0{,}9$, atunci $\frac{2a+3b}{3b}=?$

$$\frac{2a+3b}{3b}=\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{3b}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{b}+\square=\frac{2}{3}\cdot\square+\square=\square.$$

Dacă $\frac{a}{b}=0{,}9$, atunci numărul $\square$ este valoarea raportului $\frac{2a+3b}{3b}$.

b) Dacă $a=2$, $b=-1$, $c=3$, atunci valoarea expresiei a^2+5b+c este

$2^2+5\cdot\square+\square=\square$.

- **Expresiile algebrice** sunt formate din numere și litere (numite **variabile**) legate prin operațiile de adunare, scădere, înmulțire, ridicare la putere, extragere a rădăcinii pătrate.
- **Expresiile algebrice raționale** nu conțin variabile sub radical.

Definiție. Raportul a două expresii algebrice raționale se numește **raport algebric** (sau **fracție algebrică**).

3 Completați:

a) Pentru $x=1$ și $y=2$, valoarea raportului algebric $\dfrac{2x+y}{3x-y}$ este $\dfrac{2\cdot 1+2}{3\cdot 1-\square}=\dfrac{5}{\square}=\square$.

b) Pentru $a=0$, valoarea raportului algebric $\dfrac{a^2-2}{2-a}$ este $\dfrac{0^2-2}{2-\square}=\dfrac{\square}{\square}=\square$.

Valoarea raportului algebric $\dfrac{a^2-2}{2-a}$ nu poate fi calculată pentru $2-a=0$, adică pentru $a=\square$.

Valoarea raportului algebric $\dfrac{a^2-2}{2-a}$ poate fi calculată pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\{\square\}$.

- **Domeniul valorilor admisibile** (se notează DVA), în mulțimea dată M, al unui raport algebric cu o variabilă este submulțimea lui M, în care nu se anulează numitorul raportului algebric, adică raportul algebric are sens.
- DVA în $\mathbb{R}$ al raportului algebric $\dfrac{a^2-2}{2-a}$ este $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Notăm cu $F(x)$ un raport algebric cu variabila x. Dacă $a\in$ DVA al raportului $F(x)$, atunci $F(a)$ este valoarea raportului $F(x)$ pentru $x=a$.

4 Observați și completați:

Valoarea variabilei	Valoarea raportului algebric $\dfrac{1-x}{x+5}$	Valoarea raportului algebric $\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$
1	$\dfrac{1-1}{1+5}=\dfrac{0}{6}=0$	$\dfrac{1-1^2}{1^2+5\cdot 1}=0$
–2	$\dfrac{1-(-2)}{\square+5}=\square$	$\dfrac{-2-(-2)^2}{(-2)^2+5\cdot\square}=\square$
3	$\dfrac{1-\square}{3+5}=\square$	$\dfrac{3-\square}{\square^2+5\cdot\square}=-0{,}25$

DVA în $\mathbb{R}$ al raportului $\dfrac{1-x}{x+5}$ este $\mathbb{R}\setminus\{\square\}$, iar al raportului $\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$ este $\mathbb{R}\setminus\{0,\ \square\}$.

Definiții.
- Două rapoarte algebrice cu aceeași variabilă se numesc **egale** în mulțimea M, dacă:
  - mulțimea M aparține fiecărui DVA al rapoartelor;
  - ele au valori egale pentru orice valoare a variabilei din M.
- Dacă E_1 și E_2 sunt două expresii algebrice cu aceleași variabile și dacă valorile lor sunt egale pentru orice valori ale variabilelor lor din domeniul valorilor admisibile ale celor două expresii, atunci expresiile E_1 și E_2 se numesc **identic egale** în acest domeniu, iar scrierea $E_1=E_2$ se numește **identitate**.

Rapoartele algebrice $\dfrac{1-x}{x+5}$ și $\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$ sunt egale pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,\ -5\}$.

Notăm $\dfrac{1-x}{x+5}=\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-5\}$.

Egalitatea $\dfrac{1-x}{x+5}=\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$ este o identitate în mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{0,-5\}$.

Exerciții și probleme

1. Calculați valoarea expresiei algebrice $2x^2-3x$ pentru:

a) $x=0$; b) $x=-2$; c) $x=0{,}5$; d) $x=\dfrac{1}{6}$.

2. Calculați valoarea expresiei algebrice $4ab-b^2+a$ pentru:

a) $a=b=2$; b) $a=3,\ b=-2$; c) $a=-4,\ b=1{,}5$; d) $a=\dfrac{3}{4},\ b=\dfrac{4}{3}$.

3. Scrieți ca raport algebric:

a) $3x:(2x+5)$; b) $(ax^2+bx):(a-b)$; c) $(2x+4):(x-3a)$; d) $12x^5:(7b-x^3)$.

4. Selectați rapoartele algebrice:

a) $\dfrac{2x-1}{3x}$; $\dfrac{0{,}4x^2-\sqrt{x}}{x+1}$; $\dfrac{3}{ax+2}$; $\dfrac{5x}{-9y}$; $\dfrac{7x}{4}$; $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{2x+1}$; $\dfrac{y^2+5}{y^2-5}$;

b) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5x+3}}$; $\dfrac{0{,}99a}{ax+4}$; $\dfrac{y}{x}$; $\dfrac{4}{\sqrt{x}}$; $\dfrac{\sqrt{y}}{-x^2-9}$.

5. Numiți numărătorul și numitorul raportului algebric:

a) $\dfrac{0{,}9a^2+1}{2a-\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{8}{-5x-3}$; c) $\dfrac{\sqrt{7}+x^2}{a^2x+8a}$; d) $\dfrac{8,(7)xy}{-7,(4)y^2-x}$.

6. Aflați valoarea raportului algebric $\dfrac{x^2+1}{x+1}$ pentru:

a) $x=1$; b) $x=0$; c) $x=0{,}5$; d) $x=1\dfrac{1}{2}$.

7. Aflați valoarea raportului algebric $\dfrac{3x+2y}{2x-y}$ pentru:

a) $x=y=1$; b) $x=4,\ y=2$; c) $x=\dfrac{1}{6},\ y=\dfrac{1}{2}$; d) $x=-0{,}8;\ y=0{,}4$.

8. Aflați domeniul valorilor admisibile al raportului algebric:

a) $\dfrac{3a}{a-4}$; b) $\dfrac{x^2+2x}{3+x}$; c) $\dfrac{a+b}{2b+6}$; d) $\dfrac{a-b^2}{-8+0{,}6a}$; e) $\dfrac{5ax+3}{2x^2-18}$; f) $\dfrac{a^2+2ax+1}{0{,}36-a^2}$.

9. Aflați valoarea raportului algebric $\dfrac{0{,}8x+1{,}2y}{x-y}$ pentru:

a) $x=2y$; b) $y=2x$; c) $\dfrac{x}{y}=1{,}3$; d) $\dfrac{y}{x}=-0{,}4$.

10. Fie raportul algebric $F(x)=\dfrac{2x+1}{8-4x}$. Comparați numerele:

a) $F(0)$ și $F(1)$; b) $F(-2)$ și $F(-1)$; c) $F(0{,}5)$ și $F(-0{,}5)$; d) $F(10)$ și $F(-10)$.

11. Fie raportul algebric $F(x)=\frac{10-x^2}{x}$.

a) Ordonaţi crescător numerele $F(-3)$, $F(-2)$, $F(-1)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$.

b) Ordonaţi descrescător numerele $F(-4)$, $F(4)$, $F(-0{,}5)$, $F(0{,}5)$.

12. Pentru care valori ale variabilei valoarea raportului algebric este număr întreg:

a) $\frac{7}{x-2}$; b) $\frac{-5}{3-x}$; c) $\frac{9}{2+x}$; d) $\frac{-4}{x+10}$?

13. Utilizând proprietăţile rapoartelor, determinaţi pentru care valori ale variabilei sunt egale valorile rapoartelor algebrice:

a) $\frac{8}{3-x}$ şi $\frac{4}{2+x}$; b) $\frac{5}{2x-1}$ şi $\frac{-10}{x+1}$; c) $\frac{\sqrt{12}}{3-3x}$ şi $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18}-\sqrt{2}x}$; d) $\frac{-\sqrt{5}}{x}$ şi $\frac{\sqrt{10}}{x+1}$.

14. Sunt oare egale în $\mathbb{R}$ rapoartele:

a) $\frac{x}{x^2+4}$ şi $\frac{x(x^2+1)}{(x^2+4)(x^2+1)}$; b) $\frac{1}{x-1}$ şi $\frac{x+1}{x^2-1}$; c) $\frac{1}{x^2}$ şi $\frac{x}{x^3}$?

15. Formulaţi exemple de identităţi.

§2. Amplificarea şi simplificarea rapoartelor algebrice

2.1. Amplificarea rapoartelor algebrice

Observaţi şi completaţi:

$\frac{2{,}4}{1{,}6}=2{,}4:1{,}6=\bigcirc$

$\times 2 \downarrow$ Amplificăm cu 2.

$\frac{4{,}8}{3{,}2}=4{,}8:3{,}2=\bigcirc$

$\frac{x+3}{x} \longleftarrow$ DVA $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\times(x-3) \downarrow$ Amplificăm cu $x-3$.

$\frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}=\frac{\square^2-9}{x^2-\square} \longleftarrow$ DVA $\mathbb{R}\setminus\{0;\ 3\}$

a) Înmulţiţi numărătorul şi numitorul raportului algebric $\frac{x+3}{x}$ cu expresia $x+3$.

b) Comparaţi DVA al raportului obţinut cu DVA al raportului $\frac{x+3}{x}$.

c) Calculaţi valorile celor două rapoarte algebrice pentru: $x=1$; $x=-2$; $x=5$. Ce observaţi?

- **A amplifica un raport algebric** cu o expresie algebrică raţională nenulă înseamnă a înmulţi numărătorul şi numitorul raportului cu expresia dată.
- Prin amplificarea unui raport algebric se obţine un raport algebric egal cu cel dat în domeniul valorilor admisibile comun celor două rapoarte.

2.2. Simplificarea rapoartelor algebrice

Observați şi completați:

$$\frac{0,9}{1,5} = 0,9:1,5 = \bigcirc$$

$:3 \downarrow$ Simplificăm cu 3.

$$\frac{\square}{0,5} = \square : 0,5 = \bigcirc$$

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+x} = \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} \longleftarrow \text{DVA } \mathbb{R}\setminus\{0;\ -1\}$$

$:(x+1) \downarrow$ Simplificăm cu $x+1$.

$$\frac{\square}{x} \longleftarrow \text{DVA } \mathbb{R}\setminus\{\square\}$$

a) Împărțiți numărătorul şi numitorul raportului algebric $\frac{3x^2-x}{x^2-1}$ la expresia $x-1$. (Considerăm $x-1\neq 0$.)

b) Comparați DVA al raportului obținut cu DVA al fracției $\frac{3x^2-x}{x^2-1}$.

c) Calculați valorile celor două rapoarte algebrice pentru: $x=0$; $x=2$; $x=-3$. Ce observați?

- **A simplifica un raport algebric** cu o expresie algebrică rațională nenulă înseamnă a împărți numărătorul şi numitorul raportului la expresia dată.
- Prin simplificarea unui raport algebric se obține un raport algebric egal cu cel dat în domeniul valorilor admisibile comun celor două rapoarte.
- DVA al raportului algebric obținut în urma simplificării unui raport algebric poate fi diferit de DVA al raportului dat.

Definiții.
- Raportul algebric se numeşte **reductibil** dacă el poate fi simplificat.
- Raportul algebric se numeşte **ireductibil** dacă el nu poate fi simplificat.

Exemplu. Raportul algebric $\frac{x(x-2)}{x^2-4}$ este reductibil (argumentați!), iar raportul $\frac{x}{x+2}$ – ireductibil.

Exerciții și probleme

1. Amplificați fracția:

a) $\frac{2}{5}$ cu 3; b) $\frac{4}{9}$ cu 5; c) $-\frac{3}{7}$ cu 4; d) $-\frac{5}{6}$ cu 6.

2. Amplificați raportul:

a) $\frac{1,8}{3}$ cu 2,5; b) $-\frac{2,1}{4,4}$ cu 3; c) $-\frac{3,5}{6,8}$ cu 1,6; d) $\frac{0,7}{1,9}$ cu 8.

3. Amplificați raportul algebric:

a) $\frac{x}{y}$ cu x; b) $\frac{y}{x-1}$ cu y; c) $\frac{ab}{2+a}$ cu b; d) $\frac{x-1}{x+1}$ cu $x-1$.

4. Simplificați fracția:

a) $\frac{24}{36}$; b) $\frac{96}{216}$; c) $\frac{81}{189}$; d) $\frac{180}{216}$.

5. Simplificați raportul:

a) $\frac{2{,}8}{3{,}6}$ cu 4; b) $\frac{3{,}25}{5{,}5}$ cu 2,5; c) $\frac{-10{,}08}{11{,}34}$ cu 1,8; d) $\frac{15{,}68}{25{,}56}$ cu 3,2.

6. Simplificați raportul algebric:

a) $\frac{5x^3y}{10xy^2}$ cu $5xy$; b) $\frac{-3x^5y^6}{9x^3y^8}$ cu $3x^3y^6$;

c) $\frac{2x^3-x^2y}{4x^2-y^2}$ cu $2x-y$; d) $\frac{9x^2+12xy+4y^2}{21xy+14y^2}$ cu $2y+3x$.

7. Restabiliți şirul de rapoarte egale:

a) $\frac{3}{4}=\frac{\square}{12}=\frac{0{,}3}{\square}=\frac{\square}{11{,}2}=\frac{-16{,}8}{\square}$; b) $\frac{5}{8}=\frac{11}{\square}=\frac{\square}{12{,}8}=\frac{-32}{\square}=\frac{\square}{-28}$.

8. Restabiliți şirul de rapoarte algebrice egale:

a) $\frac{x-1}{xy}=\frac{\square}{x^2y}=\frac{xy-y}{\square}=\frac{\square}{0{,}5x^3y+xy}$; b) $\frac{x+y}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{\square}=\frac{\square}{7y-7x}=\frac{3y^2-3x^2}{\square}$.

9. Utilizând proprietățile rapoartelor, determinați valorile variabilei pentru care sunt egale rapoartele algebrice:

a) $\frac{x+1}{x-1}$ şi $\frac{x^2+x}{x^2-x}$; b) $\frac{2+x}{4-x^2}$ şi $\frac{-1}{x-2}$;

c) $\frac{2x+3}{2x-3}$ şi $\frac{-4x^2-12x-9}{9-4x^2}$; d) $\frac{x}{x-1}$ şi $\frac{x^3+x}{x^3-x^2+x-1}$.

10. Simplificați raportul algebric, astfel încât să obțineți un raport algebric ireductibil:

a) $\frac{3(x+2)}{x^2+4x+4}$; b) $\frac{4a^2-4b^2}{2(b+a)^2}$;

c) $\frac{y^2-x^2}{x^2-yx}$; d) $\frac{4x^2-4bx+b^2}{0{,}25b^2-x^2}$.

11. Se ştie că $\frac{x+y}{y}=10$. Aflați $\frac{x^2-y^2}{y^2}$.

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

12. Care este prima cifră a celui mai mic număr natural care are proprietatea: suma cifrelor lui este egală cu 2007?

§3. Operații aritmetice cu rapoarte algebrice. Puterea cu exponent natural a unui raport algebric

3.1. Adunarea și scăderea rapoartelor algebrice

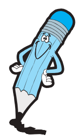
Observați și completați adecvat:

$$\frac{3}{14}+\frac{^{2)}4}{7}=\frac{3+4\cdot\square}{14}=\frac{\square}{14}.$$

$$\frac{^{2)}2}{9}-\frac{^{3)}5}{6}=\frac{2\cdot2-5\cdot3}{18}=-\frac{\square}{18}.$$

$$3-\frac{8}{9}=\frac{^{\square)}3}{1}-\frac{8}{9}=$$

$$=\frac{3\cdot9-8}{\square}=\frac{\square}{9}=\square\frac{\square}{9}.$$



$$\frac{a}{2b^2}+\frac{b-a}{2b^2}=\frac{a+b-a}{2b^2}=\frac{\square}{\square}.$$

$$\frac{^{x)}x-1}{3x}+\frac{^{3)}2}{x^2}=\frac{x(x-1)+2\cdot\square}{3x^2}=\frac{\square}{3x^2}.$$

$$\frac{^{y-1)}y-1}{y+1}-\frac{^{y+1)}y+1}{y-1}=\frac{(y-1)^2-(y+1)^2}{(y+1)(y-1)}=$$

$$=\frac{y^2-2y+1-(y^2+\square+1)}{\square^2-1}=\frac{\square}{\square^2-1}.$$

Reguli de adunare și scădere a rapoartelor algebrice

1. **Suma a două rapoarte algebrice cu același numitor** este un raport algebric cu numărătorul egal cu suma numărătorilor, iar numitorul coincide cu numitorii rapoartelor date.
2. Pentru **a aduna două rapoarte algebrice cu numitori diferiți**, se aduc rapoartele la același numitor, apoi se aplică regula 1.
3. Pentru **a scădea două rapoarte algebrice**, se adună descăzutul cu opusul scăzătorului.

Observație. Adunarea rapoartelor algebrice posedă aceleași proprietăți ca și adunarea numerelor reale (asociativitatea, comutativitatea etc.).

3.2. Înmulțirea și împărțirea rapoartelor algebrice

1 Observați și completați adecvat:

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{11}=\frac{5\cdot2}{7\cdot11}=\frac{\square}{\square}.$$

$$-\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{12}=-\frac{3\cdot5^{(3}}{8\cdot12}=-\frac{5}{8\cdot\square}=-\frac{\square}{\square}.$$

$$\frac{21}{16}:\frac{7}{8}=\frac{21}{16}\cdot\frac{\square}{7}=$$

$$=\frac{21\cdot\square^{(7\cdot8}}{16\cdot7}=\frac{3\cdot\square}{\square\cdot1}=\frac{\square}{\square}.$$

$$1\frac{2}{3}:\frac{5}{6}=\frac{5}{3}:\frac{5}{6}=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\frac{\square}{\square}=\frac{\square\cdot\square^{(\square\cdot\square}}{3\cdot\square}=\square.$$

$$\frac{2y-1}{y+3}\cdot\frac{(y+3)^2}{2y}=\frac{(y+3)^2(2y-1)^{(y+3}}{(y+3)\cdot2y}=$$

$$=\frac{\square(y+3)}{2y}=\frac{2y^2+\square y-3}{2y}.$$

$$\frac{a^2-ab}{b}\cdot\frac{b^2}{a}=\frac{(a^2-ab)\cdot b^{2\,(b}}{ba}=$$

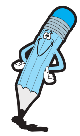
$$\frac{(a^2-ab)\cdot\square}{a}=\frac{\square(a-b)\square^{(a}}{a}=(a-b)\square.$$

$$\frac{x^2-y^2}{3x^2y^2}:\frac{x+y}{xy}=\frac{x^2-y^2}{3x^2y^2}\cdot\frac{\square}{x+y}=$$

$$=\frac{(x+y)(\square)\cdot\square^{(\square\cdot(x+y)}}{3(\square)^2\cdot(x+y)}=\frac{\square}{3\square}.$$

2 Observați și completați adecvat:

- Inversa fracției $\frac{3}{7}$ este fracția $\frac{7}{3}$.
- Inversa fracției $4\frac{1}{5}$ este fracția $\frac{5}{\square}$.
- Inversul raportului algebric $\frac{x-1}{x}$ este $\frac{x}{x-1}$.
- Inversul raportului algebric $\frac{8}{x^2-y}$ este $\frac{\square}{\square}$.



Reguli de înmulțire și împărțire a rapoartelor algebrice

1. Pentru **a înmulți două rapoarte algebrice**, se înmulțesc numărătorii între ei și numitorii între ei.
2. Pentru **a împărți două rapoarte algebrice**, se înmulțește deîmpărțitul cu inversul împărțitorului.
3. Dacă raportul algebric obținut este reductibil, atunci el se simplifică până se obține un raport ireductibil.

Observație. înmulțirea rapoartelor algebrice posedă aceleași proprietăți ca și înmulțirea numerelor reale (asociativitatea, comutativitatea, distributivitatea înmulțirii față de adunare).

3.3. Puterea cu exponent natural a unui raport algebric

Observați și completați adecvat:

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{3^2}{8^2}=\frac{\square}{64}$$

$$\left(\frac{5^2\cdot 2^3}{0,1}\right)^2=\frac{5^{2\cdot\square}\cdot 2^{3\cdot 2}}{0,1^{\square}}=$$

$$=\frac{5^{\square}\cdot 2^{\square}}{\square}=\square$$

$$\left(\frac{x^3y}{x-1}\right)^2=\frac{x^{3\cdot\square}\cdot y^{\square}}{(x-1)^2}$$

$$\frac{a^2}{2b^3}\cdot\frac{a^3}{b^4}=\frac{a^2\cdot a^3}{2b^3\cdot b^4}=\frac{a^{\square}}{2b^{\square}}$$

$$\left(\frac{2x^3-5y+1}{3x-8y^2}\right)^0=\square$$

Pentru **a ridica un raport algebric la o putere cu exponent natural**, se ridică la această putere numărătorul și numitorul raportului.

Observație. În calculul cu puteri cu exponent natural ale rapoartelor algebrice se aplică aceleași proprietăți ca și în calculul cu puteri cu exponent natural ale numerelor reale.

Exerciții și probleme

1. Calculați:

a) $\frac{7}{12}+\frac{5}{12}$; b) $\frac{21}{14}-\frac{9}{14}$; c) $\frac{29}{47}+\left(-\frac{31}{47}\right)$; d) $-\frac{25}{39}-\left(-\frac{18}{39}\right)$.

2. Calculați:

a) $\frac{5}{8}+\frac{3}{4}$; b) $-\frac{11}{12}+\frac{11}{20}$; c) $\frac{8}{9}-\frac{8}{15}$; d) $\frac{7}{16}-\left(-\frac{11}{12}\right)$; e) $-\frac{14}{21}+\left(-\frac{15}{28}\right)$.

3. Efectuați:

a) $\frac{3}{xy}+\frac{10}{xy}$; b) $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a-b}$; c) $\frac{12x}{x^2+1}-\frac{8x}{x^2+1}$; d) $\frac{4y^3}{x-y^2}+\frac{3xy+y^3}{y^2-x}$.

4. Efectuați:

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$; b) $\frac{6}{xy}+\frac{2}{x}$; c) $\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}-\frac{x-a}{x+a}$; d) $\frac{5}{2x^3+2x}-\frac{1}{2x}$.

5. Calculați:

a) $\frac{12}{17}\cdot\frac{3}{5}$; b) $\frac{9}{10}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$; c) $-\frac{15}{22}\cdot\frac{2}{5}$; d) $-\frac{8}{27}\cdot\left(-\frac{9}{16}\right)$.

6. Efectuați:

a) $\frac{x}{y}\cdot\frac{3x}{y^2}$; b) $\frac{5x^2y}{y-1}\cdot\frac{2xy}{y+1}$; c) $\frac{4(x+1)}{x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}$; d) $\frac{8y}{7xy+7x}\cdot\frac{y+1}{y}$.

7. Calculați:

a) $\frac{33}{40}:\frac{3}{10}$; b) $-\frac{25}{32}:\frac{5}{8}$; c) $\frac{27}{60}:\left(-\frac{9}{15}\right)$; d) $-\frac{84}{287}:\left(-\frac{21}{41}\right)$.

8. Precizați inversul raportului algebric:

a) $\frac{3x}{4y}$; b) $\frac{ax-b}{b+ay}$; c) $\frac{7x-5}{3x^2}$; d) $\frac{4y}{25-x^2}$.

9. Efectuați:

a) $\frac{ab^2}{xy}:\frac{b}{x}$; b) $-\frac{x^2-1}{x^2+4x+4}:\frac{x+1}{x+2}$;

c) $\frac{x^2+2x}{xy+2x}:\left(-\frac{x+2}{2+y}\right)$; d) $\frac{4x-16}{x+3}:\frac{4xy-16y}{8x^2+24x}$.

10. Efectuați ridicarea la putere:

a) $\left(\frac{6}{7}\right)^2$; b) $\left(\frac{-3}{5}\right)^3$; c) $\left(\frac{4}{5}\right)^4$; d) $\left(\frac{3^4\cdot 5^3}{2^5}\right)^2$.

11. Efectuați:

a) $\left(\frac{xy}{3a}\right)^3$; b) $\left[\frac{x(x+y)}{x-y}\right]^2$; c) $\left(\frac{x^2a}{y^5b^3}\right)^3$; d) $\left[\frac{2(x-1)}{3a+b}\right]^2$.

12. Efectuați:

a) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$; b) $\frac{3x+2}{x^2+2x+1}-\frac{4}{x+1}$; c) $\frac{-3(x+a)}{ax+ay}+\frac{3x}{x^2+xy}$.

13. Scrieți sub formă de raport algebric: a) $\frac{x-y}{x+y}+1$; b) $x+y-\frac{x^2+y^2}{x+y}$.

14. Aflați valoarea raportului algebric $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2+1}$ pentru:

a) $x=1+\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}-1$; b) $x=\sqrt{5}-2,\ y=\sqrt{5}+2$.

15. Demonstrați că:

a) $\left(\frac{2a}{a^2-4}-\frac{2}{a-2}+\frac{1}{a+2}\right):\frac{a-6}{4(a+2)}=\frac{4}{a-2}$;

b) $\frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot\left(\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right):\frac{a^2+2a+1}{1-a^2}=\frac{1-a}{a+1}$.

16. Compuneți un raport algebric cu variabilele x și y, a cărui valoare este egală cu:

a) $-\frac{2}{5}$ pentru $x=y=1$; b) 0,8 pentru $x=y=-1$;

c) $\sqrt{5}$ pentru $x=1$ și $y=-1$; d) 0 pentru $x=2$ și $y=3$.

Exerciții și probleme recapitulative

1. Selectați rapoartele algebrice:

a) $\frac{3x-\sqrt{x}}{2x}$, $\frac{9x+\sqrt{8}}{2x+y}$, $\frac{\sqrt{3}x}{5}$, $\frac{9x^2+bx+c}{a-b}$, $\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$, $\frac{ax+y}{2\sqrt{3}+x^2}$;

b) $\frac{x}{y}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{5-x^2}{\sqrt{y+x}}$, $\frac{\sqrt{20-x^2}}{\sqrt{5-x}}$, $\frac{0,7xy}{0,2ab}$, $\frac{(1+xy)^2}{(1-xy)^2}$.

2. Aflați valoarea raportului algebric $\frac{5-4xy}{x^2+1}$ pentru:

a) $x=y=0$; b) $x=-1,\ y=1$; c) $x=0,\ y=-1$; d) $x=2,\ y=-1$.

3. Aflați domeniul valorilor admisibile al raportului algebric:

a) $\frac{y-1}{-3-0,3x}$; b) $\frac{5x-9}{-4x^2+16}$; c) $\frac{x-y}{x^2+x}$; d) $\frac{15y}{2x^3-x^2}$.

4. Amplificați raportul algebric:

a) $\dfrac{x+3}{2x-1}$ cu $2x+1$; b) $\dfrac{x+\sqrt{7}}{x-\sqrt{7}}$ cu $x+\sqrt{7}$;

c) $\dfrac{x-y}{3x-y}$ cu $3x+y$; d) $\dfrac{4x-y}{y+4x}$ cu $y+4x$.

5. Simplificați raportul algebric până la un raport ireductibil:

a) $\dfrac{3x+9}{x^2+6x+9}$; b) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$; c) $\dfrac{a^2-ax}{x^2-a^2}$; d) $\dfrac{x^2-4}{2x-x^2}$.

6. Efectuați:

a) $\dfrac{1}{x^2y}+\dfrac{2}{xy^2}$; b) $\dfrac{5}{x-2y}-\dfrac{3}{x+2y}$; c) $\dfrac{x-1}{2x-6}+\dfrac{1}{3-x}$; d) $\dfrac{5}{x^2-16}-\dfrac{7}{x-4}$.

7. Efectuați:

a) $\dfrac{(x+1)^3}{(x-2)^4}\cdot\dfrac{(x-2)^3}{x+1}$; b) $\dfrac{xy^2}{x+y}\cdot\dfrac{(x+y)^2}{xy}$; c) $\dfrac{3ab}{25yx^4}\cdot\dfrac{15x^2y^2}{18a^2b^3}$; d) $\dfrac{\sqrt{3}a^2x}{1{,}2yz^2}\cdot\dfrac{\sqrt{12}y^2}{5a}$.

8. Efectuați:

a) $\dfrac{3x-6}{3x-1}:\dfrac{xy-2y}{9x^2-1}$; b) $\dfrac{2-x}{3x+12}:\dfrac{x^2-4}{4x+x^2}$; c) $\dfrac{ab^3}{6-6x}:\dfrac{x^2-2x+1}{a^3b^3}$; d) $\dfrac{3ab}{ax+3x}:\dfrac{6ba^2}{9+6a+a^2}$.

9. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\dfrac{ax+ay-bx-by}{xy+x^2}$; b) $\dfrac{x^2-2x+1}{y-xy+z-zx}$; c) $\dfrac{y^2+x^2-2xy}{xz-yz+ty-xt}$; d) $\dfrac{xy-xz-y^2+yz}{x^2-xy}$.

10. Desfaceți parantezele drepte:

a) $\left[\dfrac{a(x+1)^2}{b(x-1)}\right]^3$; b) $\left[\dfrac{x^2(x-1)}{y^3(x+1)^2}\right]^4$; c) $\left[\dfrac{ab^2x^3}{(a-b^2)^2y^4}\right]^2$; d) $\left[\dfrac{\sqrt{5}(a^2-x)^2}{\sqrt{3}y^2x}\right]^4$.

11. Scrieți ca raport algebric:

a) $\left(x-\dfrac{b}{a}\right)^2$; b) $\left(\dfrac{x}{y}-3\right)^2$; c) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$; d) $\dfrac{2}{2a+3}-\dfrac{1}{3-2a}$.

12. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\dfrac{a^2-4a+4}{a^2+ab^2-2a-2b^2}$; b) $\dfrac{x^2+2x+2y^2-y^4}{x^2-xy^2+2y^2-4}$;

c) $\left(\dfrac{x-y}{x^2-xy}-\dfrac{1}{x^2-y^2}:\dfrac{x+y}{(y-x)^2}\right):\dfrac{y^2}{(x+y)^2}$; d) $\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{ab}{a^2-b^2}\right):\dfrac{4a^2}{a^2-2ab+b^2}$.

13. Aduceți la o formă mai simplă și calculați valoarea expresiei pentru $x=-1{,}8$ și $y=0{,}6$.

a) $\left(\dfrac{x^2}{x+y}-\dfrac{x^3}{x^2+y^2+2xy}\right):\left(\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)$; b) $\dfrac{x+y}{x+2y}:\left(\dfrac{x}{x-2y}+\dfrac{y^2}{x^2-4y^2}\right)$;

c) $\dfrac{x^2}{x^2-2xy}:\left(\dfrac{2xy}{x^2-4y^2}-\dfrac{y}{x+2y}\right)$; d) $\left(\dfrac{2xy}{x^2-9y^2}-\dfrac{y}{x-3y}\right):\dfrac{y^2}{x^2+3xy}$.

14. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\dfrac{8x-4x^2-4}{(x^2-1)(1-x)}+\dfrac{(1+x)(x-1)}{1-x}\cdot\dfrac{x}{(x+1)(x^2-2x+1)}+\dfrac{x}{x^2+1-2x}$;

b) $\dfrac{8x^2-24x+18}{9+6x}\cdot\dfrac{4x^2+12x+9}{15-10x}\cdot\dfrac{15x}{4x^2-9}$.

15. Demonstrați că:

a) $\dfrac{x}{x^2-6x+9}:\left(\dfrac{1}{3+x}-\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{3x}{x^2-9}\right)=\dfrac{3+x}{3-x}$;

b) $\left(1+\dfrac{7}{a-3}\right)\cdot\left(\dfrac{a+5}{a^2+a-12}+\dfrac{a}{a+4}-\dfrac{4}{a-3}\right)(3-a)^2=a^2-6a-11$.

16. Demonstrați că:

a) $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdot\ldots\cdot(x^{16}+y^{16})=\dfrac{x^{32}-y^{32}}{x-y}$;

b) $\dfrac{x^{2^{10}}-y^{2^{10}}}{x-y}=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdot\ldots\cdot(x^{2^9}-y^{2^9})$.

17. Compuneți câte un exercițiu similar cu exercițiile **9** şi **14**.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 minute

Varianta 1

1. Completați: (2 p)
DVA al raportului algebric $\dfrac{7x-\sqrt{2}}{-2x-9}$ este $\mathbb{R}\setminus\{\quad\}$.

2. Aflați valoarea raportului algebric $\dfrac{x^2-y^2}{xy}$ pentru $x=1-\sqrt{3},\ y=1+\sqrt{3}$. (2 p)

3. Amplificați raportul algebric $\dfrac{\sqrt{3}x-4}{\sqrt{3}x+4}$ cu $4-\sqrt{3}x$. (2 p)

4. Simplificați raportul algebric: (2 p)
$$\frac{3a^2-12ab+12b^2}{a^2-4b^2}.$$

5. Scrieți sub formă de raport algebric ireductibil: (2 p)
$$\frac{a^2-4a+4}{b+b^3}:\frac{2-a}{b^2+1}.$$

Varianta 2

1. Completați:
DVA al raportului algebric $\dfrac{5x+\sqrt{8}}{-3x+7}$ este $\mathbb{R}\setminus\{\quad\}$.

2. Aflați valoarea raportului algebric $\dfrac{x+y}{x^2y^2}$ pentru $x=\sqrt{2}-1,\ y=\sqrt{2}+1$.

3. Amplificați raportul algebric $\dfrac{\sqrt{5}x-1}{1+\sqrt{5}x}$ cu $\sqrt{5}x+1$.

4. Simplificați raportul algebric:
$$\frac{9x^2-4}{18x^2+24x+8}.$$

5. Scrieți sub formă de raport algebric ireductibil:
$$\frac{3a+2}{a-\sqrt{3}}:\frac{4+6a}{5a^2-15}.$$

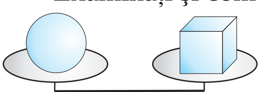
CAPITOLUL 6

Ecuații și inecuații

§1. Noțiunea de ecuație. Recapitulare și completări

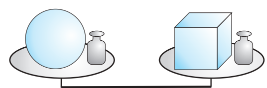
1.1. Relația de egalitate în mulțimea numerelor reale

• Examinați și comentați.



$a=b$

$a=b,\ a,b\in\mathbb{R}$



$a+c=b+c$

① $a+c=b+c,\ c\in\mathbb{R}$

② $a-c=b-c,\ c\in\mathbb{R}$

③ $ac=bc,\ c\in\mathbb{R}^*$

④ $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c},\ c\in\mathbb{R}^*$

1.2. Ecuații cu o necunoscută. Ecuații echivalente

1 Vindetot preconiza să vândă 600 kg de portocale la prețul de 15 lei/kg. La transportare s-au alterat 100 kg de portocale. Cu câți lei trebuie să majoreze Vindetot prețul portocalelor, pentru a obține profitul preconizat?

Explicăm

Fie că prețul trebuie majorat cu x lei. Atunci: $\boxed{(15+x)\cdot 500=15\cdot 600}$

necunoscuta — ecuație cu o necunoscută

$(15+x)\cdot 500=9000 \xrightarrow{④} 15+x=9000:\ \_\_\_ \xrightarrow{②} x=\ \_\_\_$

Răspuns: Cu ___ lei.

Definiție. O egalitate de forma $A(x)=B(x)$, unde necunoscuta x apare în expresia $A(x)$ și/sau $B(x)$, se numește **ecuație cu necunoscuta** x.

Membrul stâng al ecuației $\longrightarrow A(x) = B(x) \longleftarrow$ Membrul drept al ecuației

2 Este oare numărul **–1** soluție a următoarelor ecuații cu o necunoscută:

a) $3x+5=2(2x+3)$;

b) $(y+1)(y-\sqrt{3})=0$;

c) $t^2+1=0$;

d) $2(z+1)-7=2z-5$?

Model:
$3x+5=2(2x+3)$
$3\cdot(-1)+5=2\cdot[2\cdot(-1)+3]$
$2=2$ – Adevărat.
Răspuns: Numărul –1 este soluție a acestei ecuații.

Definiție. Valoarea necunoscutei care transformă ecuația într-o propoziție adevărată se numeşte **soluție a ecuației** date.

Prin urmare, x_0 este soluție a ecuației $A(x)=B(x)$ dacă propoziția $A(x_0)=B(x_0)$ este adevărată.

- A **rezolva ecuația** înseamnă a afla mulțimea soluțiilor ei.
- Mulțimea soluțiilor ecuației se notează, de regulă, cu S.
- O ecuație, în mulțimea numerică indicată, poate să aibă o soluție, o mulțime finită de soluții, o mulțime infinită de soluții sau să nu aibă soluții.

De exemplu, ecuația $(x+1)(x-\sqrt{3})=0$ în mulțimea $\mathbb{R}$ se rezolvă în felul următor:

$x+1=0$ sau $x-\sqrt{3}=0$

$x=-1$ sau $x=\square$. $S=\{\square\}$

• Rezolvați ecuația în mulțimea $\mathbb{Q}$, apoi în mulțimea $\mathbb{N}$.

3 Determinați în care sertar va fi trimisă fiecare dintre ecuațiile:

$3x+5=2(2x+3)$, $(x+1)(x-\sqrt{3})=0$, $x^2+1=0$, $2(x+1)-7=2x-5$.

O soluție în $\mathbb{R}$	Două soluții în $\mathbb{R}$	Nu are soluții în $\mathbb{R}$	Mulțimea soluțiilor este $\mathbb{R}$

• Ce se va schimba, dacă în locul mulțimii $\mathbb{R}$ va fi indicată mulțimea $\mathbb{N}$?

4 Examinați şi completați, astfel încât să obțineți rezolvarea ecuației în $\mathbb{R}$:

$2-(x-4)-3x=7 \quad \Leftrightarrow \quad -x-3x=\square+7 \quad \Leftrightarrow \quad -4x=\square \quad \Leftrightarrow \quad x=\square$

Răspuns: $S=\{\square\}$.

Pentru a rezolva o ecuație, încercăm să găsim o altă ecuație, mai simplă, care să fie echivalentă cu cea dată.

Definiție. Două ecuații cu aceeaşi necunoscută se numesc **echivalente**, dacă mulțimile lor de soluții sunt egale.

Între ecuațiile echivalente se scrie semnul „$\Leftrightarrow$” (se citeşte „echivalent”).

La rezolvarea ecuațiilor se utilizează următoarele reguli, ce rezultă din relațiile de egalitate în mulțimea numerelor reale, care conduc la ecuații echivalente:

> 1* Termenii ecuației se pot trece dintr-un membru în celălalt, schimbându-le semnul.
> 2* Ambii membri ai ecuației se pot înmulți (împărți) la (cu) un număr real nenul.

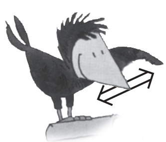
Aplicăm

$5(7-2x)=15(x-1) \overset{2^*}{\Leftrightarrow} 7-2x=3\cdot(x-1) \Leftrightarrow 7-2x=3x-\square \overset{1^*}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow -3x-2x=\square-\square \Leftrightarrow -5x=\square \overset{2^*}{\Leftrightarrow} x=\square.$

Răspuns: $S=\{\square\}$.

• Între care perechi de ecuații poate fi amplasat semnul „$\Leftrightarrow$”? Justificați.



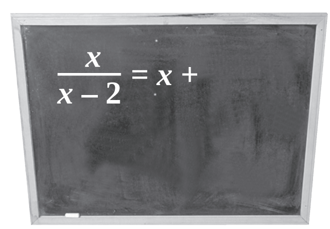
$3(x-8)=9x$		$x-8=3x$
$x(x-1)=2x$		$x-1=2$
$4x-3=x+2$		$4x-x=2+3$
$2x+7=2-3x$		$2x+3x=7-2$

1.3. Domeniul valorilor admisibile (DVA) al ecuației

Pe tablă a fost scrisă o ecuație, însă, din întâmplare, elevul de serviciu a şters o parte din ea.

Profesorul, privind cele scrise pe tablă, a întrebat:

– Putea oare numărul 2 să fie soluție a ecuației scrise?



Explicăm

Pentru $x=2$ expresia $\frac{x}{x-2}$ nu are sens, de aceea numărul 2 nu putea fi soluție a ecuației respective.

> **Definiție.** Mulțimea valorilor lui x pentru care au sens expresiile $A(x)$ şi $B(x)$ ale ecuației $A(x)=B(x)$ se numeşte **domeniul valorilor admisibile (DVA)** al acestei ecuații.

O ecuație se rezolvă în DVA al ei.

• Examinați şi completați:

$2x-3=5$ → DVA: $\mathbb{R}$

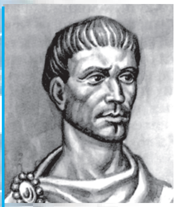
$2(x-7)=4$ → DVA: $\square$

$\frac{2}{x+1}=1$ → DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x+5}$ → DVA: $\mathbb{R}\setminus\{\square, \square\}$

$\frac{3}{\square}=6$ → DVA: $\mathbb{R}^*$

Din istorie...



Diofant din Alexandria (sec. III, î.H.)

Primul care a notat necunoscuta cu o literă a fost matematicianul din Grecia Antică Diofant din Alexandria. Primele descrieri privind transformări ale ecuațiilor au fost incluse în lucrările matematicianului arab Ali Horesmi.
Trecerea termenilor dintr-un membru al ecuației era numită de către Horesmi „nimicire” și „restabilire”. Restabilire, în limba arabă, se pronunță *ali-djebr*. De la acest cuvânt a provenit denumirea *Algebra*.

Ali Horesmi (787–850)

Exerciții și probleme

1. Scrieți ca egalitate propoziția:
a) Numărul 20 este mai mare cu 8 decât numărul x.
b) Numărul x este de trei ori mai mic decât numărul $x+2$.
Cum se numesc egalitățile obținute?

2. Indicați litera corespunzătoare variantei corecte de răspuns.
Numărul –2 este soluție a ecuației:
A $x^2+4=0$. **B** $(x-2)^2=-4$. **C** $(x+1)(x+2)=0$. **D** $-4x=-8$.

3. Arătați că:
a) numărul 4 este soluție a ecuației $3(x-1)=5+x$;
b) numărul –1 nu este soluție a ecuației $7x+2=5x^2$.

4. Care dintre elementele mulțimii $M=\{0; 1; -1; 2\}$ sunt soluții ale ecuației:
a) $x(x+2)=0$; b) $x^2-1=0$?

5. Câte soluții are ecuația $3x-1=7$: a) în mulțimea $\mathbb{R}$; b) în mulțimea $\mathbb{Z}$?

6. Câte soluții are ecuația $\sqrt{3}\cdot x-3=0$: a) în mulțimea $\mathbb{R}$; b) în mulțimea $\mathbb{Q}$?

7. Completați astfel încât să obțineți o ecuație pentru care: a) $S=\varnothing$; b) $S=\mathbb{R}$.

$$2x+1=2x+\square$$

8. *Adevărat* sau *fals*?
a) $2x-9=x \Leftrightarrow 2x+x=9$; b) $12(3+x)=8x \Leftrightarrow 3(3+x)=4x$;
c) $5x+1=x-1 \Leftrightarrow 5x-x=0$; d) $(x+1)(x+2)=2(x+1) \Leftrightarrow x+2=2$.

9. Aflați DVA al ecuației:
a) $\frac{2}{x}+3=1$; b) $x-4=\frac{48}{3x-12}$; c) $x^2-x=0$; d) $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x-1}$.

10. Aflați numărul de soluții reale ale ecuației:
a) $8x+2=0$; b) $x+4=x-2$; c) $(x+1)\cdot 2=2x+2$.

11. Scrieți ca egalitate propoziția:
a) Media aritmetică a numerelor 7 și x este egală cu produsul lor.
b) Numărul x reprezintă 12% din numărul 25.

12. Utilizând egalitatea adevărată $5\cdot 2-3=3\cdot 2+1$, compuneți o ecuație care are mulțimea soluțiilor $S=\{2\}$.

13. Substituiți cu un număr, astfel încât ecuația obținută:
a) să nu aibă soluții în mulțimea $\mathbb{Z}$, dar să aibă soluție în mulțimea $\mathbb{Q}$;
b) să aibă soluție în mulțimea $\mathbb{R}$, dar să nu aibă soluții în mulțimea $\mathbb{Q}$.

$$\square\, x=18$$

14. Completați, astfel încât să obțineți o ecuație echivalentă cu cea dată:
a) $\dfrac{2x-1}{3}=x \Leftrightarrow 2x-1=\square$; b) $2x-(6x-5)=45 \Leftrightarrow 2x-6x=\square$.

15. Găsiți greşeala: $7x-14=5x-10 \Leftrightarrow 7(x-2)=5(x-2) \Leftrightarrow 7=5$ – fals.
Răspuns: $S=\varnothing$.

16. Fie ecuația $|x|=x$ în mulțimea $\mathbb{R}$.
a) Este oare soluție a acestei ecuații numărul 7? b) Dar numărul –7?
c) Aflați mulțimea soluțiilor a acestei ecuații.

17. Aflați DVA al ecuației: a) $\dfrac{x}{x^2-1}=2$; b) $\sqrt{x}+1=3$; c) $\dfrac{2}{x^2+4}=1$; d) $\dfrac{4}{|x|}=1$.

18. Substituiți, astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației obținute să fie:
a) $S=\{1\}$; b) $S=\{0\}$; c) $S=\{-1\}$; d) $S=\varnothing$.

$$4x-3=3x+\square$$

19. Compuneți o ecuație pentru care mulțimea soluțiilor este:
a) $S=\varnothing$; b) $S=\mathbb{R}$; c) $S=\{\sqrt{2}\}$; d) $S=\{0;-2\}$.

20. Compuneți o ecuație ce are o soluție în mulțimea $\mathbb{R}$, dar nu are soluții în mulțimea $\mathbb{Q}$.

21. Compuneți o ecuație ce are o soluție în mulțimea $\mathbb{Q}$, dar nu are soluții în mulțimea $\mathbb{Z}$.

22. Indicați litera corespunzătoare variantei corecte de răspuns.
Mulțimea soluțiilor ecuației $|x|=-x$ este: **A.** $S=\varnothing$; **B.** $S=\mathbb{R}_+$; **C.** $S=\mathbb{R}_-$; **D.** $S=\mathbb{R}_-^*$.

23. Determinați dacă sunt echivalente ecuațiile:
a) $x^2=9$ și $x=3$; b) $|x|=2$ și $x=2$; c) $|x|=0$ și $x=0$; d) $x^2=4$ și $|x|=2$.

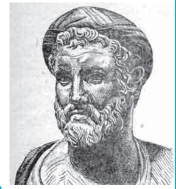
MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

24. De ce pentru orice valoare reală a lui x valoarea expresiei $3(2x-8)-4(1{,}5x-8{,}5)$ este una și aceeași?

§2. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

2.1. Rezolvarea ecuațiilor de gradul I cu o necunoscută

1 Legenda spune că cineva, întâlnindu-se cu matematicianul şi filozoful grec Pitagora, l-a întrebat cât e ora. Pitagora a răspuns: „Până la sfârşitul celor 24 de ore ale zilei curente a mai rămas de două ori câte $\frac{2}{5}$ din timpul care a trecut de la începutul zilei”. Ce oră era?


Pitagora

Explicăm

Fie că de la începutul zilei s-au scurs x ore. Atunci, până la finisarea zilei au mai rămas $2\cdot\frac{2}{5}x=\frac{4}{5}x$ ore. Astfel, $x+\frac{4}{5}x=\frac{9}{5}x$ reprezintă 24 ore; deci $\boxed{\frac{9}{5}x=24}$ ← ecuație de gradul I cu o necunoscută

$$\frac{9}{5}x=24 \quad\Leftrightarrow\quad x=24:\frac{9}{5} \quad\Leftrightarrow\quad x=\boxed{}.$$

Răspuns: Ora ___ şi ___ minute.

$\boxed{ax+b=0,\ \ a,b\in\mathbb{R},\ \ a\neq 0}$ ← **ecuație de gradul I cu o necunoscută** (forma generală)

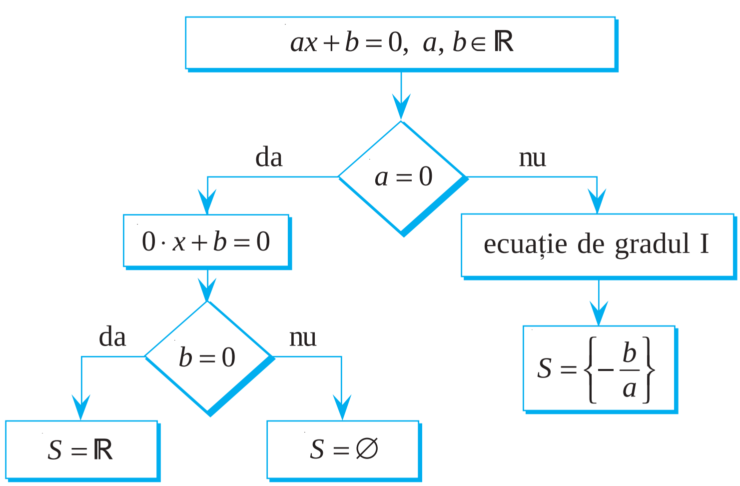
coeficientul necunoscutei (a); necunoscuta (x); termenul liber (b)

Ecuația $ax+b=0,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$ are soluția unică $-\frac{b}{a}$. Prin urmare, $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

• Completați:

$3x-2=0$	$\frac{1}{2}x+1=0$	$\frac{2}{5}x-\frac{3}{4}=0$	$-0{,}1x+8=0$
$S=\{\ \ \}$	$S=\{\ \ \}$	$S=\{\ \ \}$	$S=\{\ \ \}$

• Examinați schema şi explicați cum se rezolvă ecuația $ax+b=0$ în mulțimea $\mathbb{R}$.



2 O butelie plină cu ulei de floarea-soarelui cântăreşte 800 g. După ce din ea s-a luat jumătate din cantitatea de ulei, masa buteliei a devenit 425 g. Ce masă are butelia goală?

Rezolvare:

Fie x g masa buteliei goale, atunci $(800-x)$ g este masa buteliei pline cu ulei. Prin urmare,

$$x+\frac{800-x}{2}=425 \Leftrightarrow 2x+800-x=850 \Leftrightarrow 2x-x=850-\boxed{} \Leftrightarrow x=\boxed{}.$$

Răspuns: $\boxed{}$ g.

2.2. Ecuații de gradul I cu parametru (opțional)

1 Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $mx=10$.

Rezolvare:

Observăm că în ecuația $mx=10$ apare nu numai necunoscuta x, dar şi coeficientul necunoscut m, care se numeşte **parametru**.

1) Dacă $m=0$, atunci obținem ecuația $0\cdot x=10$, care nu are soluții, deci $S=\varnothing$.

2) Dacă $m\neq 0$, atunci obținem ecuația de gradul I $mx=10$ cu soluția $\frac{10}{m}$, deci $S=\left\{\frac{10}{m}\right\}$.

Răspuns: $S=\varnothing$, pentru $m=0$; $S=\left\{\frac{10}{m}\right\}$, pentru $m\neq 0$.

2 Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $(m^2-4)x=m+2$, unde m este un parametru real.

Rezolvare:

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{(m^2-4)x=m+2 \Leftrightarrow (m-2)(m+2)x=m+2} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\boxed{m=2} \arrow[d] & \boxed{m=-2} \arrow[d] & \boxed{m\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}} \arrow[d] \\
\boxed{0\cdot x=4} \arrow[d] & \boxed{0\cdot x=0} \arrow[d] & \boxed{(m-2)(m+2)x=m+2} \arrow[d] & \text{ecuație de gradul I} \arrow[l] \\
\boxed{S=\varnothing} & \boxed{S=\mathbb{R}} & \boxed{S=\left\{\frac{1}{m-2}\right\}} &
\end{tikzcd}$$

Răspuns: $S=\varnothing$, pentru $m=2$; $S=\mathbb{R}$, pentru $m=-2$;

$S=\left\{\frac{1}{m-2}\right\}$, pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$.

Exerciții și probleme

1. a) Selectați ecuațiile de gradul I.
b) Indicați, pentru fiecare dintre ecuațiile obținute la a), coeficientul necunoscutei și termenul liber.

$-2x=2$ $\quad$ $3x+5=0$ $\quad$ $\frac{5}{x}+1=0$ $\quad$ $2x^2-6=0$ $\quad$ $\frac{x}{5}-1=0$ $\quad$ $0\cdot x=2$

2. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $7x=21$; b) $9x=3$; c) $5x-\frac{2}{3}=0$; d) $4x-\frac{1}{7}=0$;
e) $\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}=0$; f) $0{,}2x-10=0$; g) $-10x+0{,}2=5$; h) $24x+1=9$.

3. Pentru ce valori reale ale necunoscutei sunt egale valorile expresiilor:
a) $3x+2$ și $2x-1$; b) $2{,}5y-4$ și $5y+2{,}4$;
c) $3z+4$ și $3-2z$; d) $\sqrt{2}-7x$ și $2x-2\sqrt{2}$?

4. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $5x+4=25-2x$; b) $2z-4=8-z$; c) $6{,}5y-15=4y+3{,}4$;
d) $3x-35=7x-28$; e) $5(x-7)=3(x-4)-13$; f) $3(2z+7)+4=5(z-3)$;
g) $\frac{4}{5}x-2=2\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}$; h) $2\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}=2\frac{1}{3}x+1$; i) $-2x=3(x-5)+6$.

5. Aflați zeroul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă:
a) $f(x)=2x+1$; b) $f(x)=3-5x$; c) $f(x)=\sqrt{10}x$; d) $f(x)=\frac{1}{2}x-7{,}2$.

6. Aflați DVA al raportului algebric: a) $\frac{x}{3x+0{,}2}$; b) $\frac{1-x}{\frac{2}{3}x-5}$; c) $\frac{3x}{2{,}8-0{,}1x}$.

7. Continuați rezolvarea:
a) $\frac{3x-1}{5}-\frac{5x+1}{6}=\frac{x+1}{8}-3 \Leftrightarrow 24\cdot(3x-1)-20\cdot(5x+1)=$
$=\boxed{}\cdot(x+1)-3\cdot120 \Leftrightarrow \ldots$
b) $\frac{4x+1}{3}-\frac{3x-1}{5}=15-\frac{25-x}{4} \Leftrightarrow 20\cdot(4x+1)-\boxed{}(3x-1)=$
$15\cdot60-\boxed{}\cdot(25-x)\Leftrightarrow\ldots$

8. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\frac{8x-1}{5}-1=\frac{50-2x}{9}+\frac{3x+3}{4}$; b) $\frac{3y+1}{3}-\frac{16-y}{6}-\frac{9y+1}{7}=3$.

9. Pentru ce valoare reală a necunoscutei x valoarea expresiei $8x-3$ este de trei ori mai mare decât valoarea expresiei $5x+6$?

10. Pentru ce valoare reală a necunoscutei x valoarea expresiei $3x+2$ reprezintă 25% din valoarea expresiei $x+15$?

11. Completați astfel încât $S=\{2\}$ să fie mulțimea soluțiilor ecuației obținute:
a) $\boxed{}\,x-4=12$; b) $3x+\boxed{}=15$; c) $-5x+8=\boxed{}$; d) $4x+\boxed{}=x+1$.

12. Scrieți propoziția sub formă de ecuație și rezolvați ecuația obținută în mulțimea $\mathbb{R}$:
a) Dacă mărim numărul x cu 12%, atunci obținem numărul 56.
b) Dacă micșorăm numărul x cu 30%, atunci obținem numărul 28.
c) Numărul $3x$ este cu 10 mai mare decât numărul x.
d) Diferența numerelor 15 și $2x$ este de 6 ori mai mare decât numărul $\frac{1}{2}x$.

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $(x-3)(x+4)-2(3x-2)=(x-4)^2$; b) $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(x-5)^2$;
c) $x(x+2)-13=(x-3)(x+3)$; d) $4x(x-1)=(2x+5)(2x-5)+1$.

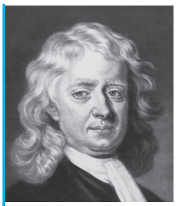
14. Pentru ce valori reale ale parametrului a mulțimea soluțiilor ecuației $ax+5=0$ este:
a) $S=\{5\}$; b) $S=\{-10\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$?

15. Pentru ce valori reale ale parametrului m ecuația are o soluție unică? Aflați această soluție, dacă: a) $mx=4$; b) $(m+1)x+2=0$; c) $(m-3)x=0$.

16*. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $|x|-2=0$; b) $|y|+\sqrt{13}=0$; c) $|x-2|=3$; d) $|2x+1|=0$;
e) $|x-0{,}2|=3$; f) $|4-x|=12{,}3$; g) $|2x+\sqrt{7}|=-5$; h) $\left|\frac{1}{2}x+3\right|=25$.

Indicație. Examinați cele două cazuri: I – când expresia de sub semnul modulului este negativă, II – când expresia menționată este nenegativă.

§3. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor


Isaac Newton

În manualul de algebră, al cărui autor este ilustrul matematician și fizician englez Isaac Newton, scrie: „Pentru a rezolva probleme despre numere sau despre relații între mărimi, trebuie doar să «traducem» această problemă în limbajul algebrei”.

Să urmăm sfatul geniului.

1 La soare se încălzeau câțiva pisoi. Numărul labelor acestora este cu 10 mai mare decât numărul urechilor lor. Câți pisoi se încălzeau la soare?

În limbaj matematic

La soare se încălzeau câțiva pisoi.	x
Numărul labelor acestora	$4x$
Numărul urechilor lor	$2x$
Numărul labelor este cu 10 mai mare decât numărul urechilor.	$2x+10=4x$

Rezolvăm ecuația obținută:

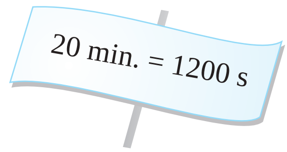
$2x + 10 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad \square\, x = \square \quad \Leftrightarrow \quad x = \square$

Răspuns: $\square$ pisoi.

Rezultatul „traducerii” problemei în limbajul matematic este modelul matematic al acestei probleme.

„Traducerea” problemei în limbajul matematic poate fi realizată în diverse moduri, de aceea rezolvările problemei date pot fi diverse.

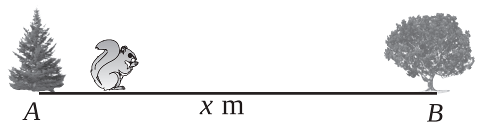
2 În 20 minute veverița aduce în scorbură o nucă. La ce distanță de la bradul cu scorbura creşte nucul, dacă se ştie că veverița se deplasează fără de nucă cu viteza de 5 m/s, iar cu nuca – cu viteza de 3 m/s?



Rezolvare:

Metoda 1

Distanța de la brad până la nuc: x metri.



Timpul necesar veveriței pentru a ajunge la nuc: $\frac{x}{5}$ s.

Timpul necesar veveriței pentru întoarcere: $\frac{x}{\square}$ s.

$\frac{x}{5} + \frac{x}{\square} = 1200 \Leftrightarrow \square\, x + \square\, x = 1200 \cdot 15 \Leftrightarrow \square\, x = \square \Leftrightarrow x = \square$ (metri).

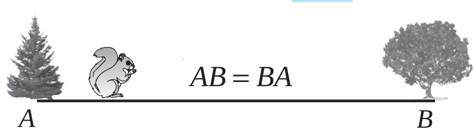
Răspuns: $\square$ metri.

Metoda 2

Timpul necesar veveriței pentru a ajunge la nuc: y s.

Timpul necesar veveriței pentru întoarcere: $(1200 - y)$ s.

Distanța de la brad până la nuc: $5y$ metri sau $\square \cdot (1200 - y)$ metri.



$5y = \square \cdot (1200 - y) \Leftrightarrow 5y + \square\, y = 1200 \cdot 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \square\, y = 3600 \Leftrightarrow y = \square$ (secunde).

$AB = 5 \cdot \square = \square$

Răspuns: $\square$ metri.

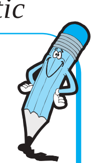
Exerciții și probleme

1. „Traduceți” în limbaj matematic şi aflați numărul x:
a) Dacă mărim numărul x de 4 ori şi rezultatul obținut îl micşorăm cu 2, atunci obținem numărul 22.
b) Dacă mărim numărul x de 3 ori, atunci diferența dintre numărul obținut şi numărul x va fi egală cu 92.

2. Într-o cutie sunt x grame de bomboane, iar în alta – de 3 ori mai multe. Ce semnifică scrierea:
a) $x+3x=800$; b) $3x-x=400$; c) $3x-200=x+200$?

3. Într-un coş sunt de 2 ori mai multe kilograme de struguri decât în al doilea coş. Dacă din primul coş se vor muta 3 kg de struguri în coşul al doilea, atunci în ambele coşuri va fi aceeaşi cantitate de struguri. Câte kilograme de struguri erau în fiecare coş?
Completați tabelul şi rezolvați problema.

	În limbaj matematic
În coşul II (kg)	x
În coşul I (kg)	$\square\, x$
Dacă din coşul I se vor lua 3 kg.	$\square - \square$
Dacă în coşul II se vor pune cele 3 kg luate din coşul I.	$\square + \square$
Cantitatea de struguri în ambele coşuri va fi aceeaşi.	$\square = \square$



4. În clasele a 7-a A şi a 7-a B învață 64 de elevi. Dacă doi elevi din clasa a 7-a A vor fi transferați în clasa a 7-a B, atunci în ambele clase va fi acelaşi număr de elevi. Câți elevi învață în clasa a 7-a B?

5. Pentru a ajunge la şcoală, Ana parcurge o porțiune din drum cu autobuzul, apoi merge pe jos. Tot drumul îl parcurge în 25 min. Ana se deplasează pe jos cu 5 min. mai mult decât cu autobuzul. Câte minute se deplasează Ana cu autobuzul?
Completați tabelul şi rezolvați problema.

	În limbaj matematic
Ana se deplasează cu autobuzul (min.).	x
Ana merge pe jos cu 5 min. mai mult decât cu autobuzul.	$x + \square$
Ana parcurge tot drumul în 25 min.	$\square = \square$

6. Mihai a rezolvat două probleme în 35 min. Pentru rezolvarea primei probleme, el a cheltuit cu 7 min. mai mult decât pentru rezolvarea problemei a doua. În câte minute a rezolvat Mihai problema a doua?

7. Suma a trei numere naturale consecutive este egală cu 33. Aflați aceste numere.

8. La dreapta unui număr natural s-a scris cifra 0. S-a obținut un număr cu 405 mai mare decât primul. Aflați primul număr.

9. Pentru 3 acvarii sunt necesare 61 *l* de apă. Capacitatea primului acvariu este de 1,5 ori mai mare decât a celui de-al treilea, iar a celui de-al doilea – cu 5 *l* mai mare decât a celui de-al treilea acvariu. Care este capacitatea fiecărui acvariu?

10. Trei ouă de struț african și 60 de ouă de găină cântăresc împreună 9 kg. Aflați greutatea unui ou de struț, dacă se știe că el este de 20 de ori mai greu decât un ou de găină.

11. Autobuzul se deplasează cu viteza de 50 km/h și parcurge distanța de la Chișinău până la Edineț cu 1,5 ore mai mult decât un automobil ce se deplasează cu viteza de 80 km/h. La ce oră va sosi autobuzul la Edineț, dacă el s-a pornit din Chișinău la ora 9:00?

12. O barcă cu motor parcurge distanța dintre două debarcadere după cursul apei râului în 6 ore, iar contra cursului apei – în 10 ore. Aflați viteza apei, dacă viteza bărcii în apă stătătoare este de 16 km/h.

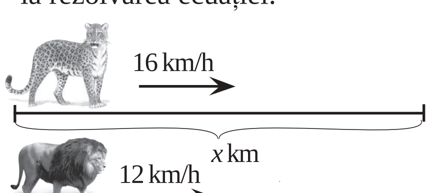
13. Maria și mama ei au lipit împreună 220 de colțunași. Maria a lipit colțunași timp de 2 ore, iar mama – timp de 3 ore. Într-o oră, împreună, ele lipeau 86 de colțunași. Câți colțunași a lipit Maria?

14. Vasile a parcurs cu bicicleta distanța de acasă până la râu cu viteza de 15 km/h, iar la întoarcere – cu viteza de 10 km/h. Aflați distanța dintre casa lui Vasile și râu, dacă pentru tot drumul Vasile a cheltuit o oră.
Rezolvați problema prin două metode.

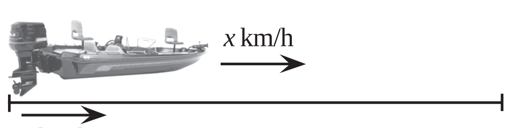
15. Radu a parcurs distanța de la stația de autobuz până la livadă cu viteza de 6 km/h. La întoarcere, a avut o viteză cu 2 km/h mai mică, deoarece ducea două găleți cu cireșe. Pentru tot drumul (dus-întors) Radu a cheltuit o oră. La ce distanță de la stație se află livada?
Rezolvați problema prin două metode.

16. Compuneți o problemă după desen, astfel încât rezolvarea ei să se reducă la rezolvarea ecuației:

a) $3x = 2(x+2)$.



b) $\frac{x}{16} + 1 = \frac{x}{12}$.



c) $5 \cdot (x+3) = 8 \cdot (x-3)$.

§ 4. Inecuații cu o necunoscută

4.1. Proprietățile inegalităților numerice

1 Examinați, comentați și completați adecvat.

Inegalități numerice adevărate

$-7{,}2 \le -7{,}1$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

$1 < \sqrt{3} < 2$

$\square < 0$

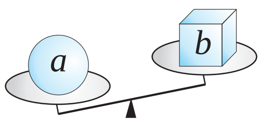
$\square \ge 8{,}1$

$\frac{1}{3} < \square < \frac{1}{2}$

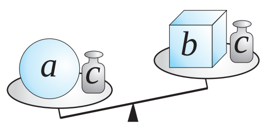
$a > b;\ a > c;\ b > c$

$c \quad b \quad a$ (pe axă)

$c < b < a$



$a > b$



$a + c > b + c$

• Comparați:

$12 \ \bigcirc \ -6$

$12 + 7 \ \bigcirc \ -6 + 7$

$12 - 9 \ \bigcirc \ -6 - 9$

① Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a > b$, atunci $a + c > b + c$.

2 Comparați:

$-3 \ \bigcirc \ -7$ $\qquad$ $30 \ \bigcirc \ 15$

$-3 \cdot 4 \ \bigcirc \ -7 \cdot 4$ $\qquad$ $30 : 3 \ \bigcirc \ 15 : 3$

$-3 \cdot (-2) \ \bigcirc \ -7 \cdot (-2)$ $\qquad$ $30 : (-5) \ \bigcirc \ 15 : (-5)$

② Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ și $c \in \mathbb{R}^*_+$, atunci $ac > bc$.

③ Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ și $c \in \mathbb{R}^*_-$, atunci $ac < bc$.

④ Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ și $c \in \mathbb{R}^*_+$, atunci $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

⑤ Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ și $c \in \mathbb{R}^*_-$, atunci $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

• Comparați, știind că $x, y \in \mathbb{R}$ și $x > y$:

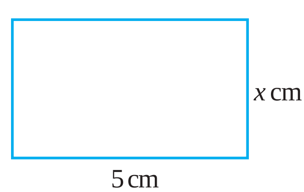
$2x \ \bigcirc \ 2y$ $\qquad$ $0 \cdot x \ \bigcirc \ 0 \cdot y$

$\frac{1}{3}x \ \bigcirc \ \frac{1}{3}y$ $\qquad$ $x + 1 \ \bigcirc \ y + 1$

$-5x \ \bigcirc \ -5y$ $\qquad$ $x - 7 \ \bigcirc \ y - 7$

4.2. Inecuații

1 Lungimea unei laturi a dreptunghiului este de 5 cm. Ce lungime trebuie să aibă latura a doua pentru ca perimetrul dreptunghiului să fie mai mare decât 16 cm?



$\boxed{(5 + x) \cdot 2 > 16}$

necunoscuta $\qquad$ inecuație cu o necunoscută

$(5 + x) \cdot 2 > 16$ $\xrightarrow{④}$ $5 + x > 8$ $\xrightarrow{①}$ $x > \square$

Răspuns: $\square$

• Este oare numărul -4 soluție a inecuației:

a) $3x+6<0$;

b) $\frac{1}{2}x \geq 8$;

c) $x^2+x \leq 13$;

d) $x+1>x+3$?

Model:
$2x+1 \leq 0$
$2 \cdot (-4)+1 \leq 0$
$-7 \leq 0$ – adevărat
Răspuns: Numărul -4 este soluție a inecuației.

Definiție. Se numeşte **soluție a inecuației cu o necunoscută** valoarea necunoscutei care transformă această inecuație într-o inegalitate numerică adevărată.

2 Găsiți două soluții diferite ale inecuației:

a) $2x+1<0$;
b) $\frac{1}{2}x \geq 8$;
c) $x^2+x \leq 13$;
d) $x+1<x+3$.

A rezolva inecuația în mulțimea dată înseamnă a găsi mulțimea soluțiilor ei ce aparțin mulțimii date. Mulțimea soluțiilor inecuației se notează cu *S*.

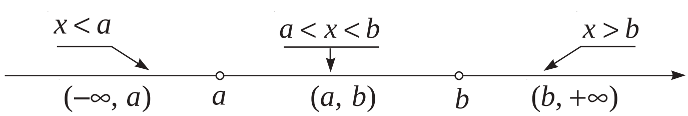
Definiție. Două inecuații se numesc **echivalente** dacă mulțimile lor de soluții sunt egale.

Între inecuațiile echivalente se scrie semnul „$\Leftrightarrow$”. Astfel, $2x+1<0 \Leftrightarrow 2x<-1$.

• Pentru care dintre inecuațiile de mai sus $S=\mathbb{R}$?

4.3. Intervale de numere reale și operații cu ele

Mulțimea soluțiilor inecuației cu o necunoscută, de regulă, se scrie ca **interval de numere reale**:



1 Examinați, comentați și completați:

	Reprezentăm pe axă	*Scriem*	*Citim*
$x>3$	3	$S=(3, +\infty)$	Intervalul numeric de la 3 la plus infinit, exclusiv 3.
$x \leq 2$	2	$S=(-\infty, 2]$	Intervalul numeric de la minus infinit la 2, inclusiv 2.
$-1 \leq x<0$	-1 0	$S=[-1, 0)$;	Intervalul numeric de la -1 la 0, inclusiv -1, exclusiv 0.
$2 \leq x \leq 5$	2 5	$S=[\ \ ,\ \ ]$	?

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a < b$.

Mulțimea	Intervalul numeric	
	Reprezentarea pe axă	Notarea
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$		$[a, b]$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$		$[a, b)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$		$(a, b]$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$		(a, b)
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > a\}$		$(a, +\infty)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \ge a\}$		$[a, +\infty)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < b\}$		$(-\infty, b)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \le b\}$		$(-\infty, b]$
$\mathbb{R}$		$(-\infty, +\infty)$

2 Efectuați:

a) $[-3, 8] \cup [0, 12) = [-3, 12)$.

$[-3, 8] \cap [0, 12) =$

b) $(-\infty, 2] \cup (3, 7) =$

$(-\infty, 2] \cap (3, 7) =$

c) $(-10, 5] \cup [5, +\infty) =$

$(-10, 5] \cap [5, +\infty) =$

Exerciții și probleme

1. Selectați inegalitățile adevărate:

a) $-2 > 0$; b) $3 < 7$; c) $-3 < -7$; d) $6 \ge 6$;

e) $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$; f) $\frac{5}{8} > \frac{9}{16}$; g) $-\frac{3}{4} \le -\frac{2}{3}$; h) $3\sqrt{2} \le 2\sqrt{3}$.

2. Scrieți ca inegalitate propoziția:

a) Şapte este mai mare decât unu.
b) Minus trei este mai mic decât zero.
c) Cinci nu este mai mare decât opt întregi şi cinci zecimi.
d) Minus şase nu este mai mic decât minus doisprezece.

3. Se știe că $a, b \in \mathbb{R}$ și $a > b$. Determinați valoarea de adevăr a propoziției:

a) $0{,}1a > 0{,}1b$; b) $\frac{a}{7} < \frac{b}{7}$; c) $a - 3 > b - 3$;
d) $-3a > -3b$; e) $-5 + a < -5 + b$.

4. Este oare numărul –2 soluție a inecuației:

a) $-3x - 7 < 0$; b) $2x > 1$; c) $-5 < x \le 0$;
d) $\frac{1}{2}x \ge -1$; e) $3x + 6 > 0$; f) $10 - x > 10$?

5. Găsiți o soluție a inecuației:

a) $x > 18$; b) $x < -27$; c) $9 < x \le 10$;
d) $1 < x < 2$; e) $-1{,}5 < x < -1$; f) $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$.

6. Citiți:

a) $[-2; 3)$; b) $(-1; 5]$; c) $(2; 7)$; d) $[0; 11]$;
e) $(0; +\infty)$; f) $(-\infty; -100]$; g) $[-17; +\infty)$; h) $(-\infty; 3{,}2)$.

7. Completați tabelul după modelul indicat în prima linie:

$x < 2$	2	$(-\infty; 2)$	Intervalul numeric de la $-\infty$ la 2, exclusiv 2
		$[5; +\infty)$	
	-3 1		
			Intervalul numeric de la 3 la 4, inclusiv 3, exclusiv 4
$-1 \le x \le 15$			

8. *Adevărat* sau *fals*?

a) $5 \in (-1; 7)$; b) $3 \in (3; +\infty)$; c) $2 \in (-\infty; 2]$;
d) $10{,}2 \in (10{,}1; 10{,}19)$; e) $7 \in [-3; 7)$; f) $0 \in [0; 100)$.

9. „Traduceți” în limbaj matematic și scrieți ca interval numeric următoarele restricții:

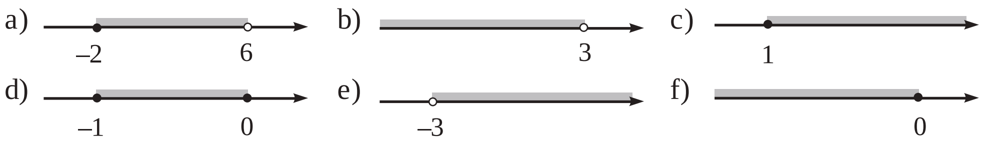
a) pe ambalajul unui joc pentru copii; b) privind viteza deplasării pe autostradă; c) la vamă.

Fără a fi declarați, pot fi trecuți nu mai mult de 5000 $.

10. Reprezentați pe axă intervalul numeric:

a) $(-2; 1]$; b) $[0; 5]$; c) $[1; 3)$; d) $(2; +\infty)$;
e) $(-\infty; -1]$; f) $(-\infty; 4)$; g) $[7; +\infty)$; h) $(-4,5; +\infty)$.

11. Scrieți intervalul numeric reprezentat pe axă:



12. Selectați inegalitățile adevărate:

a) $-\frac{11}{23} < -\frac{1}{2}$; b) $\frac{7}{8} > \frac{11}{12}$; c) $\frac{7}{29} \leq \frac{1}{3}$; d) $\pi \leq 3{,}14$;
e) $0{,}11 > -\frac{10}{11}$; f) $\sqrt{5} > 2\sqrt{2}$; g) $-\sqrt{11} < -3{,}5$; h) $0 < -6{,}(3)$.

13. Comparați numerele a și b, dacă:

a) $a+3 > b+3$; b) $\frac{a}{6} < \frac{b}{6}$; c) $-\frac{1}{3}a > -\frac{1}{3}b$; d) $a-5 > b-5$.

14. Ambii membri ai inegalității $7 > 6$ se înmulțesc cu a^4, $a \in \mathbb{R}$. Se poate afirma că $7a^4 > 6a^4$? Argumentați răspunsul.

15. Găsiți două soluții ale inecuației:

a) $0 < x < \frac{1}{2}$; b) $2{,}5 < x \leq 2{,}6$; c) $-0{,}25 \leq x < 0$; d) $\frac{3}{4} < x \leq 1$.

16. Aflați cel mai mare și cel mai mic număr întreg ce aparțin intervalului:

a) $(-10; -2)$; b) $[-1; 2]$; c) $(5; 9]$; d) $[3; 18)$;
e) $(1{,}1; 7{,}21)$; f) $(-3{,}1; 5{,}02]$; g) $[-9{,}2; 0{,}8]$; h) $\left[-\frac{9}{2}; \frac{11}{3}\right)$.

17. Scrieți ca interval și reprezentați pe axă mulțimea soluțiilor inecuației:

a) $x \geq -6{,}2$; b) $x \leq 15$; c) $\frac{1}{8} < x < \frac{2}{3}$;
d) $x > 8$; e) $x < -13{,}2$; f) $2 \leq x \leq 2{,}5$.

18. Efectuați:

a) $[0, 5] \cup (-10, 7)$; b) $(-3; -1) \cup [-1; 78]$; c) $(-\infty, 3) \cup (-8; +\infty)$;
d) $(-7{,}3; 0{,}2) \cup (-1; 3{,}5]$; e) $(-\infty; +\infty) \cup [-7; \sqrt{3}]$; f) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-10; 1]$.

19. Efectuați:

a) $(-3, 2) \cap (-2, 3)$; b) $(-\infty; 5) \cap (-1, 2)$; c) $(8{,}3; +\infty) \cap [-3, 7]$;
d) $(-\infty, +\infty) \cap (0, +\infty)$; e) $(-\sqrt{7}; -2{,}3] \cap [-2; 7)$; f) $(-3; 7] \cap [7; +\infty)$.

20. Efectuați:

a) $\mathbb{R}\cap[0, 3]\cup(0, +\infty)$; b) $\mathbb{Z}\cap[-3, 4)$;
c) $\mathbb{N}\cap[-1; 5{,}5)$; d) $[-3, 0]\cap[-7, 1]\cup\mathbb{R}$.

21. Găsiți trei soluții ale inecuației:

a) $\frac{1}{3}<x\leq\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{3}\leq x<\frac{3}{4}$; c) $\sqrt{2}<x<\sqrt{3}$.

22. Argumentați de ce orice număr negativ este soluție a inecuației:

a) $x^2>x$; b) $0\cdot x>-1$; c) $x^2-2x\geq 0$.

23. Găsiți toate numerele negative ce aparțin intervalului numeric:

a) $(\sqrt{2}, \sqrt{17})$; b) $[-\sqrt{11}, -\sqrt{3})$; c) $[\pi, \sqrt{27}]$; d) $(-\pi, -\sqrt{2}]$.

24. Copiați și completați cu un interval numeric, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată:

a) $\square\cup[-1, 1)=[-1, 3]$; b) $(2, 5)\cup\square=[-5, 5)$;
c) $\square\cap[0, 2]=(0, 1)$; d) $(-7, 9]\cap\square=\{9\}$.

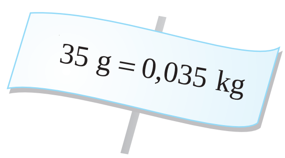
§5. Inecuații de gradul I cu o necunoscută

5.1. Noțiunea de inecuație de gradul I cu o necunoscută

1 Masa unui caiet de matematică este de 35 g. Ce număr maxim de caiete poate să ia acasă pentru verificare profesoara de matematică, dacă greutatea sacoşei ei cu manuale este de 3,5 kg, iar medicul i-a interzis să ridice o greutate mai mare de 5 kg?

Explicăm

Fie x numărul maxim de caiete.



Atunci: $\boxed{0{,}035x+3{,}5\leq 5}$

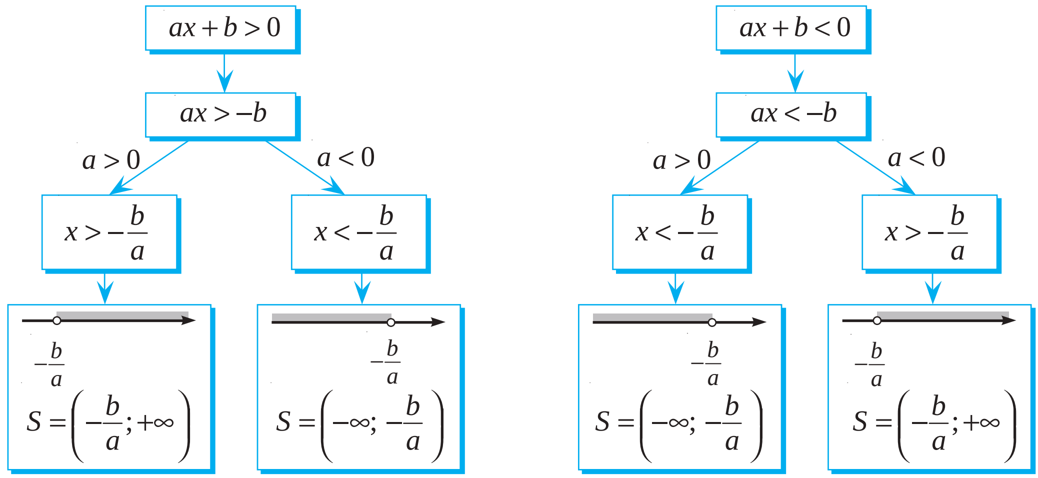
inecuație de gradul I cu o necunoscută

$$0{,}035x+3{,}5\leq 5 \Leftrightarrow 0{,}035x\leq \square+5 \Leftrightarrow x\leq \square$$

Răspuns: $\square$ caiete.

Definiție. Inecuațiile de forma $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b\leq 0$, unde $a, b\in\mathbb{R}$ şi $a\neq 0$, se numesc **inecuații de gradul I cu o necunoscută**.

2 Examinați schemele:



- Alcătuiți scheme similare pentru rezolvarea inecuațiilor de forma $ax+b\geq 0$ și $ax+b\leq 0$, $a,\ b\in\mathbb{R}$ și $a\neq 0$. Utilizând schemele alcătuite, completați:

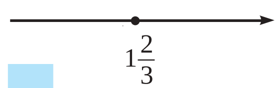
a) $2x-7\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x\geq 7 \Leftrightarrow x \bigcirc 3{,}5$

$S=\boxed{}$

b) $5-3x\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x \bigcirc -5 \Leftrightarrow x \bigcirc 1\frac{2}{3}$

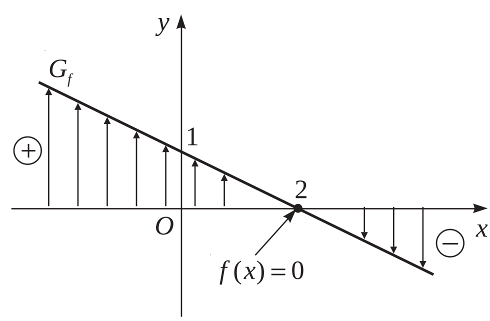


$S=\boxed{}$

3 Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-\frac{1}{2}x+1.$

Aflați valorile reale ale lui x pentru care:

a) $f(x)=0$; b) $f(x)>0$; c) $f(x)<0$.



Explicăm

a) $f(x)=0$ pentru $-\frac{1}{2}x+1=0.$

Deci, $-\frac{1}{2}x+1=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\boxed{}$

b) $f(x)>0$ pentru $-\frac{1}{2}x+1>0.$

$-\frac{1}{2}x>-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<\boxed{}$

$x\in\boxed{}$

c) $f(x)<0$ pentru $-\frac{1}{2}x+1<0.$

$-\frac{1}{2}x<-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>\boxed{}$

$x\in\boxed{}$

• Observați modelul şi rezolvați similar inecuațiile:

a) $0 \cdot x \geq 3$;

b) $0 \cdot x < 0$;

c) $0 \cdot x > -1$.

Model:
$0 \cdot x > 2$
$0 > 2$ – fals
$S = \varnothing$

5.2. Inecuații reductibile la inecuații de gradul I cu o necunoscută

Pentru a rezolva o ecuație, încercăm să găsim altă ecuație, mai simplă, echivalentă cu cea dată, aplicând proprietățile relației de egalitate.

Aplicăm

$\frac{7-2x}{3} = 5 \Leftrightarrow$

$7 - 2x = 5 \cdot 3 \Leftrightarrow$

$-2x = \square \Leftrightarrow$

$x = \square$.

Răspuns: $S = \{\square\}$.

Pentru a rezolva o inecuație, încercăm să găsim altă inecuație, mai simplă, echivalentă cu cea dată, aplicând proprietățile inegalităților numerice.

Aplicăm

$\frac{7-2x}{3} > 5 \Leftrightarrow$

$7 - 2x > 5 \cdot 3 \Leftrightarrow$

$-2x > \square \Leftrightarrow$

$x < \square$.

Răspuns: $S = (-\infty; \square)$.

Rezolvarea inecuațiilor se bazează pe următoarele **reguli, care conduc la inecuații echivalente cu inecuația dată**:

- În inecuație se pot trece termenii dintr-un membru în celălalt, schimbându-le semnul.
$$3x - 5 > 2x + 1 \Leftrightarrow 3x - 2x > 5 + 1.$$
- Dacă ambii membri ai inecuației se înmulțesc (împart) cu (la) unul şi acelaşi număr pozitiv, atunci semnul inecuației nu se schimbă.
$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} > 2 \Leftrightarrow 2x - 1 > 2 \cdot 3.$$
- Dacă ambii membri ai inecuației se înmulțesc (împart) cu (la) unul şi acelaşi număr negativ, atunci semnul inecuației se schimbă.
$$-3x > 6 \Leftrightarrow x < -2.$$
- Dacă se schimbă locurile membrilor inecuației, atunci semnul inecuației se schimbă.
$$-3\sqrt{2} > x \Leftrightarrow x < -3\sqrt{2}.$$

Exerciții și probleme

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $2x > 12$; b) $-3x \geq 15$; c) $8x < 24$; d) $-\frac{1}{2}x \leq -1$;
e) $5x < -2{,}5$; f) $0 \cdot x < -2$; g) $2x - 71 \leq 1$; h) $-15 - 11x > 18$.

2. Găsiți două soluții întregi ale inecuației:
a) $\frac{x-1}{3} < 1$; b) $3x - 1 \leq 2 + 7x$; c) $3 - 2x > 2x - 13$;
d) $\frac{x}{2} < 1 + \frac{x}{3}$; e) $x + 1 \geq \frac{x}{2}$; f) $\frac{2x-1}{6} < \frac{x+3}{12}$.

3. Aflați valorile lui x, $x \in \mathbb{R}$, pentru care valoarea expresiei $5 + 8x$ este:
a) negativă; b) mai mare decât 15; c) nenegativă; d) nu întrece 21.

4. Aflați cea mai mare soluție întreagă a inecuației:
a) $2x + 5 \leq 3$; b) $6x - 2 < 4$; c) $5{,}4 - x > 1{,}2$; d) $8 - 3x \geq 18$.

5. Aflați cea mai mică soluție întreagă a inecuației:
a) $5x + 2 \geq 17$; b) $3x - 19 > 2$; c) $-2x - 3 < 4$; d) $10 - \frac{1}{3}x < 0{,}1$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația și determinați elementele mulțimii
$M = \left\{-21; -\frac{1}{5}; 0; \sqrt{2}; 101\right\}$ care aparțin mulțimii soluțiilor inecuației:
a) $2x + 3 \geq 5 - x$; b) $\frac{1}{2}(x+5) \leq x - 3$;
c) $5 - 3x > 6 + 2x$; d) $7(3x - 5) < 28 - 21x$.

7. Pentru ce valori reale ale necunoscutei x valoarea expresiei $5 - x$ nu este mai mare decât valoarea expresiei $\frac{1-3x}{2}$?

8. Pentru ce valori reale ale necunoscutei y valoarea expresiei $7 - 2y$ nu este mai mică decât valoarea expresiei $\frac{1+3y}{2}$?

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $4x - 7(x-2) < 10 - (3x - 5)$; b) $10 + 3(x-1) > 2x - 5(3x+1)$;
c) $5 - 4(2x+3) \geq 1 - 2(3x-7)$; d) $12x - (x+4) \leq -3 - (x-2)$.

10. a) Aflați mulțimea S a soluțiilor inecuației $-5(2x+8) > x - 4(x+6)$.
b) Determinați dacă este adevărată propoziția $[-5; -3] \subset S$.

11. a) Aflați mulțimea S a soluțiilor inecuației $3(6-9x)<15x-2(x+1)$.

b) Determinați dacă este adevărată propoziția $[-1;\ 2]\subset S$.

12. Determinați valorile reale ale variabilei x pentru care au loc relațiile $f(x)=0$, $f(x)>0$, $f(x)<0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$, dacă $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=3x+51$; b) $f(x)=-\frac{1}{4}x+15$; c) $f(x)=2-8x$.

---

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $(\sqrt{3}-2)x<2\sqrt{3}-4$; b) $(\sqrt{5}-2)x+3\sqrt{5}\geq 6$.

14. Pentru ce valori ale lui x, $x\in\mathbb{R}$, valoarea expresiei:

a) $\dfrac{14-2x}{x^2+1}$ este pozitivă; b) $\dfrac{3x+18}{|x|+1}$ este nepozitivă.

15. Aflați soluțiile negative ale inecuației $-2x-\dfrac{x-3}{2}\leq 14$.

16. Aflați soluțiile pozitive ale inecuației $3x-\dfrac{2-x}{3}\leq 6$.

17. Pentru ce valori ale lui a, $a\in\mathbb{R}$, mulțimea soluțiilor inecuației:

a) $2x-a\geq 3$ este $S=[5,+\infty)$;

b) $ax+2\leq 7$ este $S=(-\infty,1]$;

c) $ax-10>2$ este $S=(-\infty,-3)$?

18. Scrieți o inecuație pentru care mulțimea soluțiilor este:

a) $S=(2;+\infty)$; b) $S=(-\infty;-3)$; c) $S=[-1;+\infty)$;

d) $S=(-\infty;0]$; e) $S=\mathbb{R}$; f) $S=\varnothing$.

19. Aflați mulțimea soluțiilor comune ale inecuațiilor:

a) $2x+5>7$ și $7x-2\leq 26$;

b) $7x+3\geq 2x+10$ și $2-3x<4x-12$.

20. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $|x|\geq 3$;

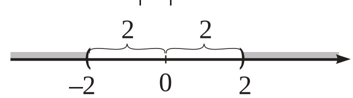
b) $|x|\leq 5$;

c) $|2x|<7$;

d) $4|x|>24$.

Model:

$|x|>2$



$x>2$ sau $x<-2$

Răspuns: $S=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

Exerciții și probleme recapitulative

1. Pentru ce valori ale lui x, $x \in \mathbb{R}$, valoarea expresiei $8x+2$ este de trei ori mai mare decât valoarea expresiei $5x-18$?

2. Pentru ce valori ale lui y, $y \in \mathbb{R}$, valoarea expresiei $3y-1$ este de două ori mai mică decât valoarea expresiei $10y-18$?

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $12x-3=9$; b) $7x+11=4$; c) $3x+7=x-2$; d) $8x-(3x+1)=9$.

4. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 32 cm. Lățimea dreptunghiului este cu 6 cm mai scurtă decât lungimea acestuia. Aflați lungimile laturilor dreptunghiului.

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația și reprezentați pe axă mulțimea soluției ei:
a) $-2\cdot(x+5)<12$; b) $-\frac{1}{2}(x+2)\geq -3$; c) $5\cdot(3-2x)\leq 15$; d) $4\cdot(8-3x)>12$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $5(x-3)-2(x-7)=7-7(2x+6)$; b) $5(8x-1)-7(4x+1)=9-8(7-4x)$;
c) $\frac{4x-51}{3}-\frac{17-3x}{4}=\frac{x+5}{2}$; d) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x-2}{5}=\frac{7x+5}{15}$.

7. După ce prețul scurtei a fost micșorat cu 20%, ea costa 320 lei. Care a fost prețul inițial al scurtei?

8. *Adevărat* sau *fals*?
a) $3x-2\leq 0 \Leftrightarrow 2-3x\geq 0$; b) $x^2+1>0 \Leftrightarrow (x+1)^2<0$.

9. Rezolvați inecuația în $\mathbb{R}$ și indicați două soluții iraționale ale acesteia:
a) $\frac{2x-3}{7}<1-\frac{3-x}{2}$; b) $(3x-5)^2>x\cdot(9x-1)+54$.

10. Aflați soluțiile întregi pozitive ale inecuației $4-\frac{x-1}{2}\geq x-\frac{2x-1}{3}$.

11. Efectuați operațiile, utilizând reprezentările respective ale intervalelor:
a) $(-\infty, 3)\cup[0{,}5; 7)$; b) $[-5; \sqrt{3})\cup(-2,(3); 10)$;
c) $[-5, 8)\cap(0, 3)$; d) $(-6, +\infty)\cap(-2; -0{,}3)$;
e) $[-8; 3)\cap(0, 1)\cup(8, +\infty)$; f) $(3; +\infty)\cup(-2{,}6; 5)\cap(0; 25)$.

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $x(x+2)-(x-3)(x+3)=13$; b) $4x(x-1)-(2x+5)(2x-5)=1$;
c) $(x-3)(x+4)-2(3x-2)=(x-4)^2$; d) $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(x-5)^2$.

13. Numărul 2 este soluție a ecuației $kx+5=x-1$.
Aflați soluția ecuației $k(x-1)=3x+7$.

14. Pentru ce valori ale parametrului m, $m \in \mathbb{R}$, nu are soluții ecuația:
a) $(m-4)x=12$; b) $2x=5-mx$?

15. Pentru ce valori ale parametrului a, $a \in \mathbb{R}$, ecuația $|x| = a$:
a) nu are soluții; b) are două soluții; c) are o soluție unică?

16. Din sac s-a luat o jumătate din nuci, apoi încă jumătate din rest şi, în sfârşit, încă jumătate din ceea ce a mai rămas. Câte nuci erau inițial în sac, dacă au rămas 10 nuci?

17. Aflați mulțimea soluțiilor comune ale inecuațiilor $|x| \le 3$ şi $\dfrac{3-5x}{1-x} < 5$.

PENTRU CAMPIONI

18. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $4^{23}x - 32^9 x = 16^4 \cdot (4^4)^4$; b) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x-3}{4} + \ldots + \dfrac{x-2011}{2012} + 2011 = 0.$

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 minute

Varianta 1

1. Completați: (1 p)
$5x - 7 = 2x + 1 \Leftrightarrow \square\, x = \square$

2. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (2 p)
$f(x) = \dfrac{x-7}{2}$, $g(x) = 3x - 1$.
a) Aflați zerourile funcțiilor f şi g.
b) Pentru ce valori reale ale lui x, $f(x) \ge g(x)$?

3. Efectuați, reprezentând intervalele pe axă: $(-\infty, \sqrt{3}) \cap (-3, +\infty)$. (2 p)

4. Aflați cea mai mică soluție întreagă a inecuației $3(x-1) > 6 - 2(x+1)$. (2 p)

5. Pentru a vinde o cantitate de banane în perioada de timp preconizată, trebuia să se vândă zilnic câte 40 kg. În fiecare zi s-au vândut cu 20 kg de banane mai mult şi, astfel, toate bananele au fost vândute cu 3 zile înainte de termen. Pentru câte zile era preconizată vânzarea bananelor? (3 p)

Varianta 2

1. Completați: (1 p)
$3 - 2x = x + 6 \Leftrightarrow \square\, x = \square$

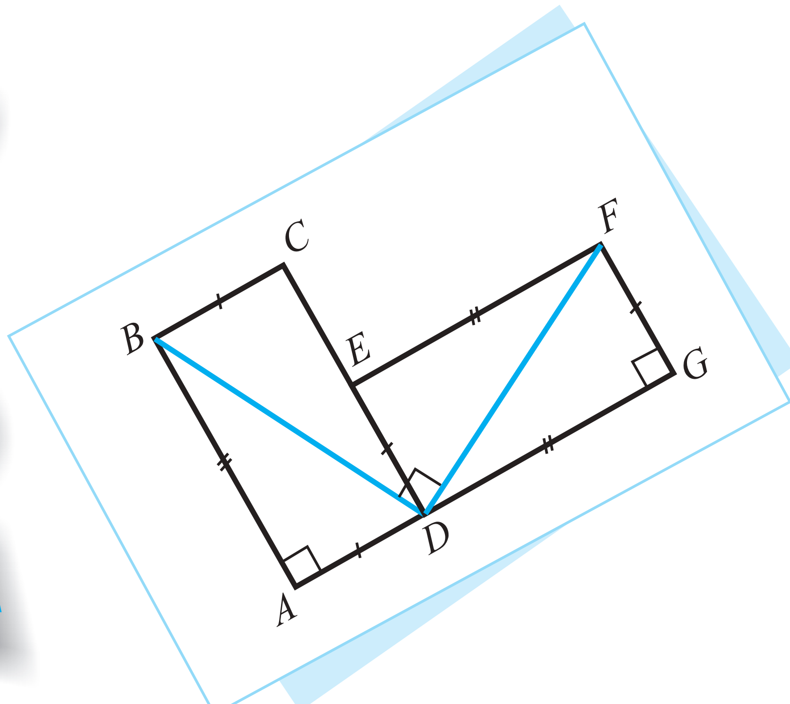
2. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (2 p)
$f(x) = \dfrac{5-x}{2}$, $g(x) = 5x + 1$.
a) Aflați zerourile funcțiilor f şi g.
b) Pentru ce valori reale ale lui x, $f(x) \ge g(x)$?

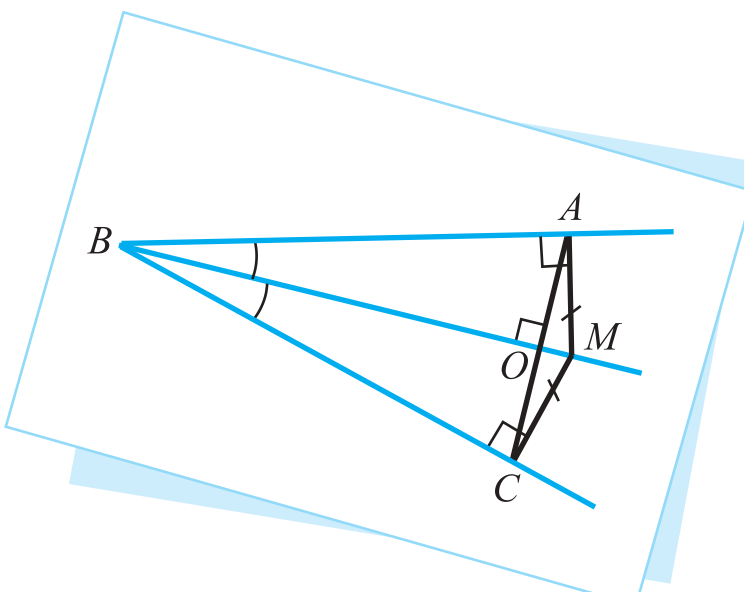
3. Efectuați, reprezentând intervalele pe axă: $(-4, 0) \cap [-2, 10)$. (2 p)

4. Aflați cea mai mare soluție întreagă a inecuației $2(x+1) < 4 - 3(x-2)$. (2 p)

5. Ştefan a calculat că, pentru a reuşi să citească o carte în vacanță, trebuie să citească zilnic 50 de pagini. Ştefan a citit zilnic cu 20 de pagini mai mult şi, astfel, a terminat de citit cartea cu 4 zile înainte de sfârşitul vacanței. Câte zile a durat vacanța? (3 p)

GEOMETRIE



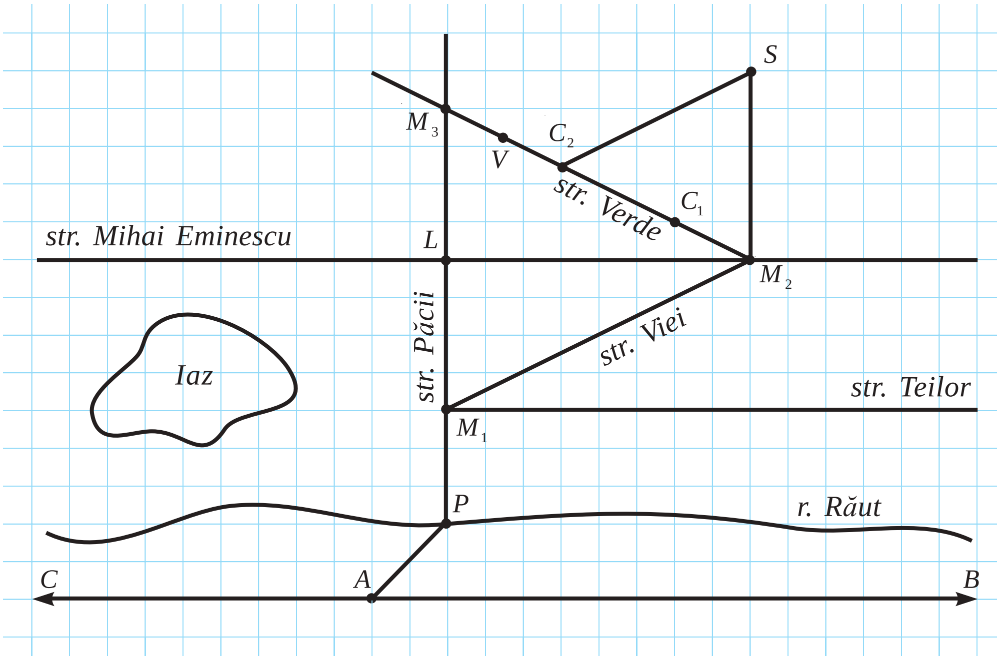


CAPITOLUL 1

Noțiuni geometrice fundamentale

§1. Puncte, drepte, plane. Recapitulare și completări

1 La tabăra de vară Vlad şi-a făcut un prieten. Acum, într-o scrisoare, îl invită în vizită. A desenat şi o hartă a localităţii, menţionând că literele din ea semnifică: A – autogara, B – direcţia Bălţi, C – direcţia Chişinău, P – pod, M_1, M_2, M_3 – magazine, L – librăria, S – şcoala, C_1, C_2 – case, iar V – casa lui.



Examinaţi harta.

a) Ce a reprezentat Vlad prin puncte şi cum le-a notat?

b) Ce a reprezentat prin drepte, semidrepte, linii curbe?

c) Notaţi pe caiet: punctele; dreptele; semidreptele; segmentele.

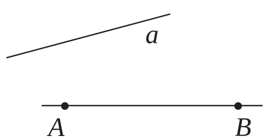
• Desenaţi o hartă similară a localităţii voastre (a cartierului vostru).

✓ **Punctul** este cea mai simplă figură geometrică. Toate celelalte figuri geometrice sunt compuse din puncte. O **figură geometrică** este o mulțime de puncte. Două figuri geometrice sunt **egale** dacă ele sunt formate din aceleaşi puncte.

Reprezentăm:	*Notăm*:
• sau ×	Punctele se notează cu literele mari ale alfabetului latin: A, B, ... Uneori punctele se notează cu A_1, A_2, ... (citim: „A unu”, „A doi”, ...).

✓ Dreapta

Noțiunea de dreaptă, ca şi noțiunea de punct, nu poate fi definită. Ea poate fi doar explicată. Dreapta se desenează cu ajutorul riglei. De fapt, cu ajutorul acestui instrument se reprezintă doar o porțiune a dreptei. Dreptele sunt nemărginite, deci pot fi prelungite oricât dorim.

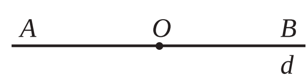
Reprezentăm:	*Notăm*:	*Citim*:
	Dreptele se notează cu literele mici ale alfabetului latin: a, b, ... sau cu două litere mari: AB, CD, ...	Dreapta a, dreapta AB (sau BA).

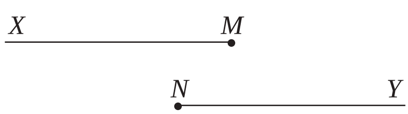
Definiție. Punctele care aparțin unei drepte se numesc **puncte coliniare.**

Dacă trei sau mai multe puncte nu sunt coliniare, atunci ele se numesc puncte ***necoliniare***.

✓ Semidreapta

Orice punct O al unei drepte împarte această dreaptă în două figuri, numite **semidrepte**. Punctul O se numeşte **originea semidreptelor.**



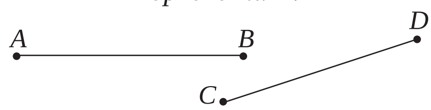
Reprezentăm:	*Notăm*:
	Semidreptele se notează cu două litere mari ale alfabetului latin: $[MX$, $[NY$, ..., prima literă indicând originea semidreptei.

Definiție. Două semidrepte care au originea comună şi formează o dreaptă se numesc **semidrepte opuse**.

$[AB$ şi $[AC$ sunt semidrepte opuse.

✓ **Segmentul** este o parte a dreptei, formată din toate punctele acestei drepte, situate între două puncte ale ei, numite **extremitățile segmentului**.

Reprezentăm:



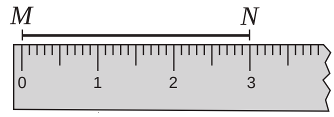
Notăm:

$[AB]$ sau $[BA]$

$[CD]$ sau $[DC]$

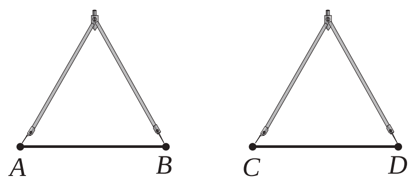
Lungimea segmentului se poate stabili cu ajutorul riglei gradate.

Pentru **a compara lungimile** a două segmente, putem utiliza rigla gradată sau compasul.



$MN = 3$ cm

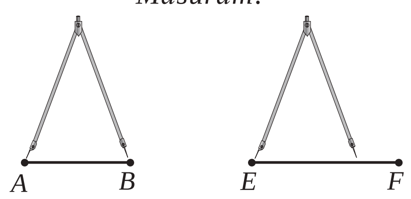
Măsurăm:



Notăm: $AB = CD$

Citim: Lungimea segmentului AB este egală cu lungimea segmentului CD.

Măsurăm:



Notăm: $AB < EF$ sau $EF > AB$

Citim: Lungimea segmentului AB este mai mică decât lungimea segmentului EF sau lungimea segmentului EF este mai mare decât lungimea segmentului AB.

Definiție. Două segmente cu lungimi egale se numesc **segmente congruente**.

Notăm: $[AB] \equiv [CD]$. *Citim*: Segmentul AB este congruent cu segmentul CD.

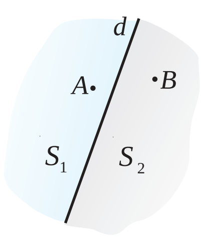
Evident, orice segment determină o dreaptă. Această dreaptă se numește **dreapta suport** a segmentului respectiv. Fiind dat segmentul $[AB]$, dreapta AB este dreapta suport a acestui segment.

2 Completați adecvat:

O dreaptă d din plan împarte planul în ______ mulțimi de puncte S_1 și S_2.

Dacă segmentul AB intersectează dreapta d și punctul A aparține mulțimii S_1, atunci $B \in$ ______.

Dacă segmentul CD nu intersectează dreapta d și $D \in S_1$, atunci $C \in$ ______.



✓ Plane şi semiplane

Noțiunea *plan*, ca şi noțiunile *punct*, *dreaptă*, nu se defineşte.

Reprezentăm:	*Notăm*:
	Planele se notează cu literele mici ale alfabetului grec: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ (citim: „alfa”, „beta”, „gama”, „delta”, ...).

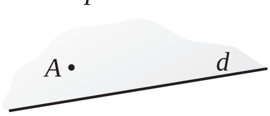
Definiție. Două **figuri geometrice** se numesc **coplanare** dacă ele sunt incluse în acelaşi plan.

Dacă două figuri geometrice nu sunt incluse în acelaşi plan, atunci ele se numesc ***figuri necoplanare***.

Luând în considerare că figurile geometrice sunt mulțimi de puncte, dacă figura F este inclusă în planul α, notăm $F \subset \alpha$. În cazul în care un punct M aparține figurii F, notăm $M \in F$.

O dreaptă d din plan separă planul în două mulțimi de puncte, numite **semiplane**.

Dreapta d se numeşte **frontiera semiplanelor**.

Reprezentăm:	*Notăm*:	*Citim*:
	$[dA$	Semiplanul determinat de dreapta d şi punctul A.

Exerciții şi probleme

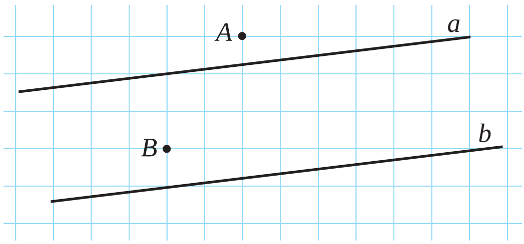
1. Selectați figurile geometrice care nu se definesc:
dreaptă, pătrat, plan, triunghi, cerc, punct, semidreaptă, segment, unghi.

2. Construiți o figură geometrică formată din:
a) trei puncte; b) cinci puncte; c) două drepte;
d) trei semidrepte; e) cel puțin 100 de puncte; f) patru segmente.

3. Punctul N aparține segmentului MK. Aflați:
a) MN, dacă $MK = 4{,}4$ cm, $NK = 26$ mm;
b) NK, dacă $MK = 6{,}3$ cm, $MN = 17$ mm;
c) MK, dacă $KN = 5{,}6$ cm, $MN = 0{,}9$ dm;
d) NM, dacă $KN = 3{,}8$ cm, $MK = 0{,}12$ m.

4. Stabiliți dacă punctele A, B, C sunt coliniare, ştiind că:
a) $AB = 17$ cm, $AC = 3$ dm, $BC = 13$ cm;
b) $AB = 29$ cm, $AC = 420$ mm, $BC = 1{,}3$ dm;
c) $AB = 4$ dm, $AC = 15$ mm, $BC = 38{,}5$ cm;
d) $AB = 48$ mm, $AC = 6$ cm, $BC = 12$ cm.

5. Reproduceți desenul şi construiți două puncte coliniare cu punctele A şi B:
a) situate pe dreptele a şi b;
b) situate de părți diferite ale dreptei a;
c) situate în semiplanul $[bA$;
d) situate în semiplanul $[aA$.



6. Examinați desenul problemei precedente. Aplicând operațiile cu mulțimi, scrieți cum se poate nota porțiunea planului cuprinsă între dreptele a şi b.

7. Punctele M, N, K sunt coliniare.
Ce punct, în mod sigur, nu se află între celelalte două, dacă:
a) $MN < NK$; b) $KM < KN$; c) $NK > KM$; d) $NM > NK$?

8. Construiți un desen corespunzător situației.
a) Dreptele a şi b se intersectează, punctul A aparține dreptei a, punctul B (diferit de A) aparține ambelor drepte.
b) Dreptele a, b, c nu au un punct comun şi fiecare două se intersectează (drepte concurente două câte două).
c) Dreapta a conține semidreapta $[OA$ şi punctele O, A, B sunt coliniare.
d) Punctul C aparține intersecției semidreptelor $[AB$ şi $[BA$.

9. În câte regiuni împart planul 3 semidrepte cu originea comună?

10. Citiți:
a) $M \in [AB]$; b) $d \subset \alpha$; c) $M \in \alpha$; d) $[AB] \subset \alpha$.

11. Notați:
a) Punctul O aparține semidreptei $[AB$.
b) Punctul X nu aparține segmentului MN.
c) Punctele A, B, C sunt coliniare şi punctele A şi B aparțin dreptei a.
d) Planul α include segmentul AB.

12. *Adevărat* sau *fals*?

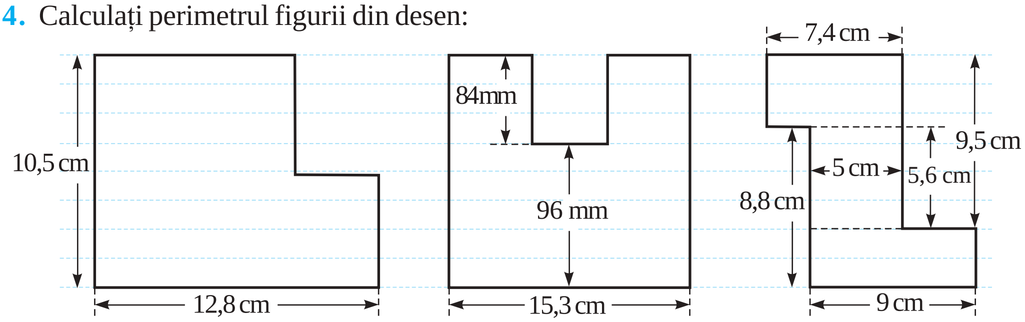
a) $[AB] \subset AB$; b) $[AB \subset [AB]$;
c) $[AB \cap [BA = \varnothing$; d) $[AB] \cap [AB = [AB$;
e) $[AB] \cup [AB = [AB$; f) $AB \setminus [AB = [AB]$.

13. Câte semidrepte diferite determină:

a) trei puncte coliniare; b) trei puncte necoliniare;

c) patru puncte coliniare; d) patru puncte, necoliniare fiecare trei?

14. Calculați perimetrul figurii din desen:

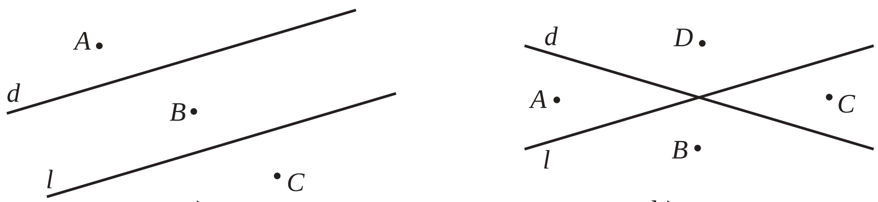


a) b) c)

15. În câte moduri poate fi notată dreapta din desen?

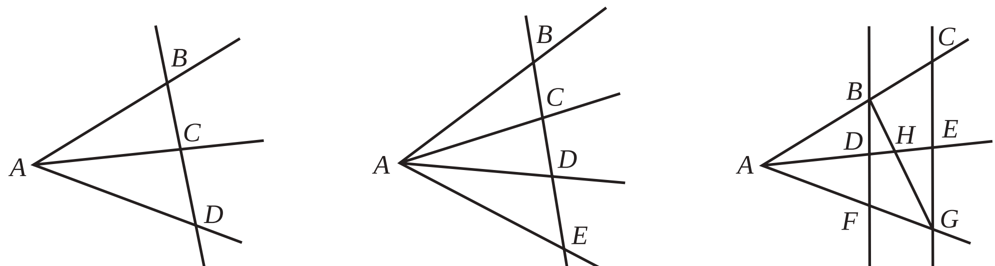
a) b)

16. Notați toate semiplanele diferite care pot fi puse în evidență.



a) b)

17. Câte segmente diferite pot fi puse în evidență?



a) b) c)

18. Construiți:

a) 5 puncte necoliniare fiecare 3;

b) 7 puncte necoliniare fiecare 3;

c) 20 de puncte necoliniare fiecare 3.

§2. Poziții relative

✓ Două puncte

Puncte identice sau confundate

$A \bullet_B$

Notăm: $A = B$

Puncte distincte

$A \bullet \qquad \bullet B$

Notăm: $A \neq B$

Proprietate fundamentală
Dacă punctele A şi B sunt diferite, atunci există o unică dreaptă care trece prin punctele A şi B.

✓ Un punct şi o dreaptă

Punctul aparține dreptei

Notăm: $A \in d$

Punctul nu aparține dreptei

Notăm: $A \notin d$

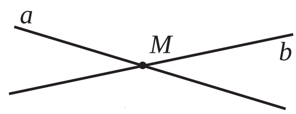
Proprietate fundamentală
Oricare ar fi dreapta, există puncte ce aparțin acestei drepte şi puncte ce nu-i aparțin.

✓ Două drepte coplanare

Drepte confundate sau coincidente

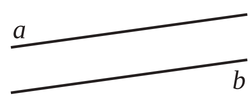
Notăm: $a = b$

Drepte concurente sau secante



Notăm: $a \cap b = \{M\}$

Drepte paralele



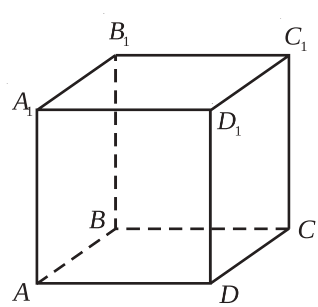
Notăm: $a \parallel b$

Definiție. Două drepte concurente care formează un unghi drept se numesc **drepte perpendiculare**.

Notăm: $a \perp b$. *Citim*: Dreptele a şi b sunt perpendiculare.

• Examinați harta lui Vlad (pag. 124) şi precizați:
a) dreptele concurente;
b) dreptele paralele;
c) punctele care aparțin dreptei C_1C_2;
d) punctele care nu aparțin dreptelor M_2L şi C_1C_2;
e) punctul de intersecție a dreptelor C_1C_2 şi M_2L.

• Examinați cubul şi precizați muchiile ale căror drepte suport:
a) sunt paralele;
b) sunt concurente;
c) nu sunt nici paralele, nici concurente;

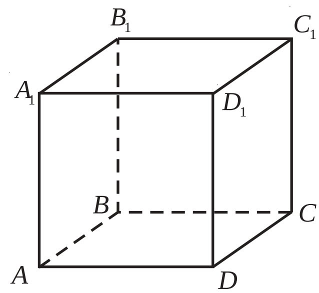


Observație. Spunem că două ***segmente*** sunt ***paralele*** dacă dreptele lor suport sunt paralele.

Exerciții și probleme

1. Citiți:
a) $M \in d$; b) $M \notin AB$; c) $\{A, B, C\} \subset d$; d) $\{A, B, C\} \subset \alpha$.

2. Examinați cubul din desen.
a) Notați două drepte paralele cu dreapta AD.
b) Notați șapte drepte care conțin punctul A.
c) Notați patru drepte concurente cu dreapta AD.



3. Scrieți toate perechile de drepte determinate de vârfurile cubului din desen care nu sunt nici paralele, nici concurente.

4. Câte drepte diferite se pot construi prin:
a) trei puncte necoliniare; b) patru puncte necoliniare fiecare trei;
c) cinci puncte necoliniare fiecare trei; d) zece puncte necoliniare fiecare trei?

5. Realizați un desen corespunzător situației:
a) $a \parallel b$, $b \cap c = \{A\}$, $B \neq a \cap c$, $B \in a$; b) $a \cap b = \{A\}$, $b \cap c = \{B\}$, $a \cap c = \{C\}$;
c) $a \cap b \cap c = \{X\}$, $\{X, Y, Z\} \subset a$; d) $[AB] \cap d = \{C\}$, $AC = BC$, $D \in [dA$.

6. Se poate stabili poziția relativă a dreptelor a și b, dacă:
a) dreptele a și c sunt paralele, iar dreptele b și c sunt necoplanare;
b) dreptele a și c sunt concurente, iar dreptele b și c sunt necoplanare;
c) dreptele a și c sunt concurente, iar dreptele b și c sunt paralele;
d) dreptele a și c sunt coplanare și dreptele b și c sunt coplanare?
Argumentați răspunsul.

7. *Posibil* sau *imposibil*?
a) Trei drepte au două puncte de intersecție.
b) Trei drepte au trei puncte de intersecție.
c) Trei drepte au patru puncte de intersecție.
d) Trei drepte au un singur punct de intersecție.

8. Construiți 4 drepte care se intersectează în:
a) 3 puncte; b) 4 puncte; c) 5 puncte; d) 6 puncte.

9. În câte regiuni disjuncte împart planul:
a) două drepte paralele intersectate de a treia dreaptă;
b) trei drepte paralele concurente cu a patra dreaptă;
c) patru drepte concurente într-un punct?

10. E posibil ca din trei drepte fiecare două să fie concurente, iar toate trei să fie necoplanare? Justificați.

§3. Distanțe în plan. Congruența figurilor

3.1. Distanțe

Distanța dintre două figuri geometrice F_1 și F_2 este lungimea celui mai scurt segment cu o extremitate aparținând figurii F_1 și cealaltă extremitate aparținând figurii F_2.

Evident, distanța dintre punctele A și B este lungimea segmentului AB.

Notăm: $d(A, B)$ sau AB.

1 Examinați desenul și completați tabelul. Trageți concluzia.

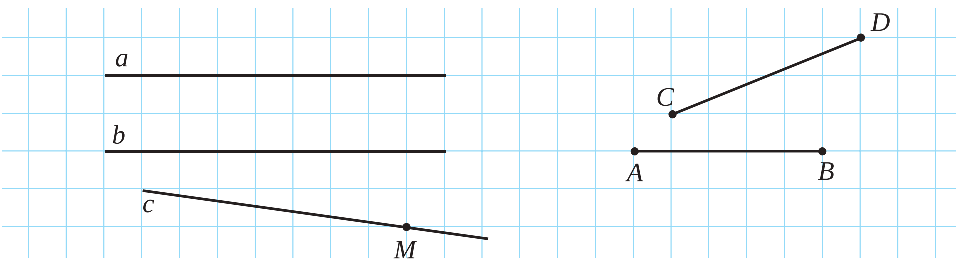
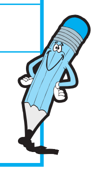


Figura ①	A	a	a	$[AB]$	M	C	A
Figura ②	B	b	c	$[CD]$	a	AB	b
Distanța dintre figurile ① și ② (cm)							



2 Observați proprietățile distanței dintre două puncte, comentați și exemplificați prin desene.

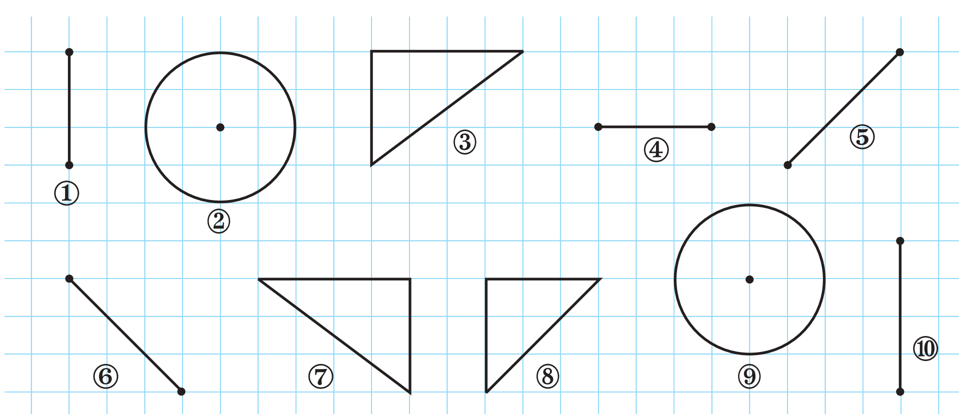
Proprietățile distanței dintre două puncte

1° $d(A, A) = 0$; 2° $d(A, B) = d(B, A)$; 3° $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

• Care este poziția relativă a punctelor A, B, C, dacă $d(A, B) < d(A, C) + d(C, B)$?

3.2. Congruența figurilor

1 Examinați și selectați perechile de figuri care, prin suprapunere, coincid.



Definiție. Două figuri geometrice F_1 și F_2 care, prin suprapunere, coincid se numesc **figuri congruente**.

Notăm: $F_1 \equiv F_2$. *Citim*: „Figura F_1 este congruentă cu figura F_2”.

- Utilizând definiția figurilor congruente, completați încât să obțineți propoziții adevărate:
  a) Două segmente sunt congruente, dacă ... sunt egale.
  b) Două cercuri sunt congruente, dacă ... sunt egale.
  c) Două unghiuri sunt congruente, dacă ... sunt egale.
  d) Două dreptunghiuri sunt congruente, dacă ... sunt egale.

2 Fie figurile geometrice F_1, F_2, F_3. Ce se poate spune despre congruența figurilor F_1 și F_2, dacă $F_1 \equiv F_3$ și $F_2 \equiv F_3$?

Teoremă

Dacă $F_1 \equiv F_3$ și $F_2 \equiv F_3$, atunci $F_1 \equiv F_2$.

Exerciții și probleme

1. Examinați desenul și completați tabelul.

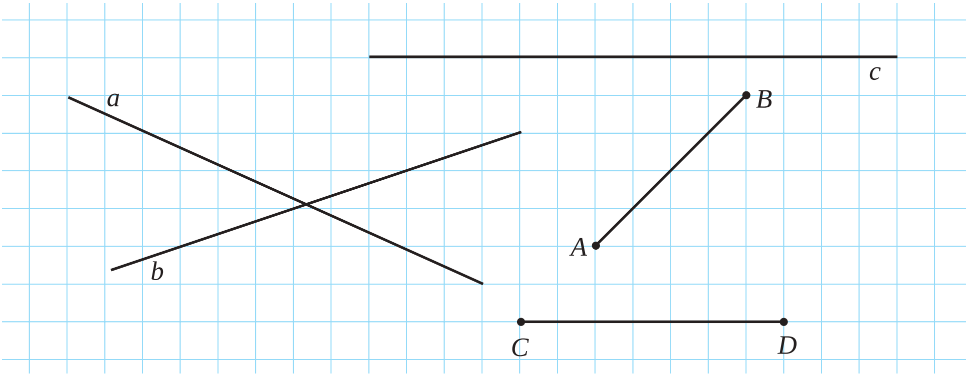


Figura ①	a	a	b	a	$[CD]$	$[AB]$	$[AB]$
Figura ②	b	$[CD]$	AB	c	c	$[CD]$	c
Distanța dintre figurile ① și ② (cm)	0						

2. Completați astfel încât să obțineți o propoziție adevărată.

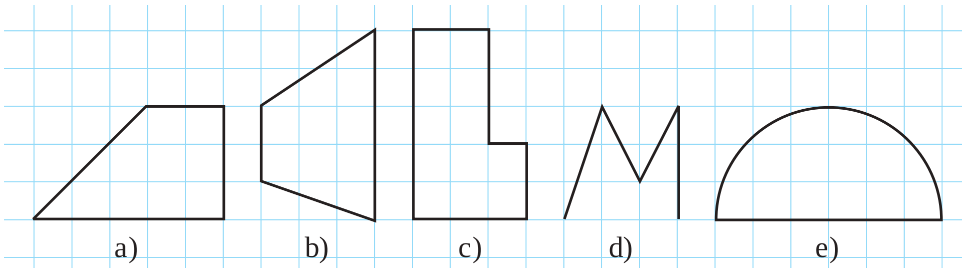
a) Distanța dintre două drepte concurente este egală cu ______.

b) Dacă distanța dintre punctul A și dreapta a este egală cu 0, atunci ______.

c) Dacă distanța dintre două drepte coplanare este diferită de 0, atunci dreptele sunt ______.

d) Dacă $AB + AC = BC$, atunci punctele A, B, C sunt ______.

3. Construiți o figură congruentă cu figura din desen:



4. *Adevărat* sau *fals*?

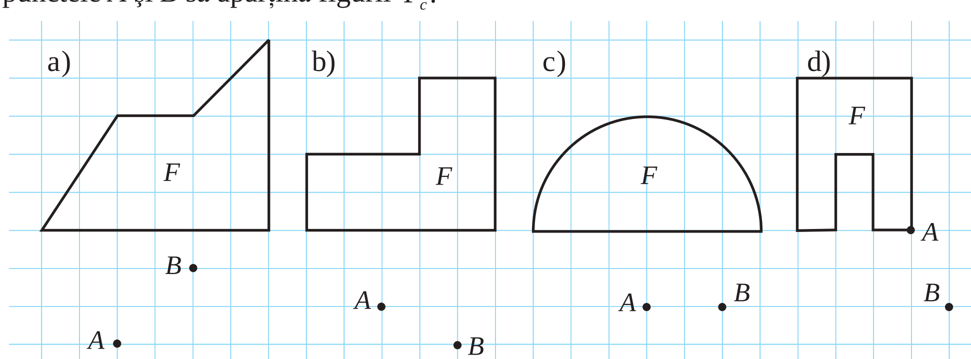
a) Orice două drepte sunt congruente.
b) Orice două semidrepte sunt congruente.
c) Orice două pătrate sunt congruente.
d) Orice două laturi ale unui pătrat sunt congruente.

5. Distanța dintre două segmente congruente este de 18 cm. Aflați distanța dintre mijloacele segmentelor, dacă extremitățile lor sunt coliniare şi lungimea unui segment este egală cu 10 cm.

6. Distanța dintre două segmente congruente este de 24 cm. Aflați lungimea segmentelor, dacă se ştie că ea este de 2 ori mai mică decât distanța de la mijlocul unui segment până la celălalt segment şi extremitățile segmentelor sunt coliniare.

7. Dreptele a, b, c sunt paralele. Distanța dintre dreptele a şi c este de două ori mai mică decât distanța dintre dreptele b şi c. Care pot fi distanțele dintre dreptele a şi c, b şi c, dacă distanța dintre dreptele a şi b este de 12 cm?

8. Reproduceți şi construiți o figură F_c, congruentă cu figura F din desen, astfel încât punctele A şi B să aparțină figurii F_c.

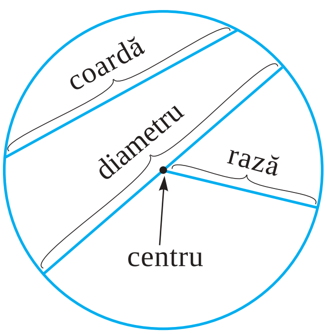


9. Punctele M, N şi L sunt coliniare. Calculaţi distanţa dintre mijloacele segmentelor MN şi NL, dacă $MN = 10$ cm şi $[MN] \equiv [NL]$. Cercetaţi toate cazurile posibile.

10. Latura unui pătrat este congruentă cu o latură a unui dreptunghi şi perimetrul pătratului este de 2 ori mai mic decât perimetrul dreptunghiului. De câte ori lungimea laturii pătratului este mai mică decât cealaltă dimensiune a dreptunghiului?

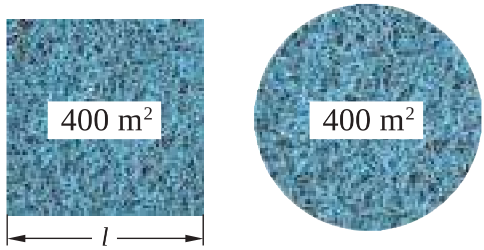
§4. Cercul. Discul. Recapitulare

1 Amintiţi-vă de elementele cercului şi completaţi:



- Toate punctele cercului sunt egal depărtate de un punct, numit ________.
- Segmentul care uneşte centrul cercului cu un punct al cercului se numeşte ________.
- Segmentul care uneşte două puncte ale cercului se numeşte ________.
- Coarda care conţine centrul cercului se numeşte ________.
- Porţiunea planului mărginită de cerc se numeşte ________.
- Cercul, împreună cu interiorul său, se numeşte ________.

2 Examinaţi imaginea şi stabiliţi pentru împrejmuirea cărui lot de pământ vom cheltui mai multă plasă.



$\mathscr{A}_\square = l^2$
$\mathscr{P}_\square = 4l$

$\mathscr{A}_\bigcirc = \pi R^2$
$L_\bigcirc = 2\pi R$

Rezolvăm

① Calculăm perimetrul pătratului:

$$l = \sqrt{\mathscr{A}_\square} = \sqrt{400} = 20 \text{ (m)}.$$

$$\mathscr{P}_\square = 4 \cdot 20 = 80 \text{ (m)}.$$

② Calculăm lungimea cercului:

$$R^2 = \frac{A_\bigcirc}{\pi}; \quad R = \sqrt{\frac{A_\bigcirc}{\pi}} = \sqrt{\frac{400}{\pi}} = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{\pi}} = \frac{20}{\sqrt{\pi}} \text{ (m)}.$$

$$L_\bigcirc = 2\pi \cdot \frac{20}{\sqrt{\pi}} = \frac{40 \cdot \pi}{\sqrt{\pi}} = 40\sqrt{\pi} < 40 \cdot 2 = 80 \text{ (m)}.$$

$$\sqrt{\pi} < \sqrt{4} = 2$$

$L_\bigcirc < 80$ m.

Răspuns: Pentru lotul pătratic vom cheltui mai multă plasă.

Exerciții și probleme

1. Fie R raza unui cerc, iar d distanța de la punctul M până la centrul acestui cerc. Stabiliți poziția punctului M față de cerc, dacă:

a) $R = 10$ cm, $d = 10$ cm; b) $R = 8$ cm, $d = 9$ cm;
c) $R = \sqrt{20}$ cm, $d = 3\sqrt{3}$ cm; d) $R = 13$ cm, $d = 4\pi$ cm.

2. Calculați lungimea cercului cu raza de:

a) 5 m; b) $2\frac{1}{4}$ m; c) $\frac{3}{\pi}$ m; d) $\sqrt{7}$ m.

3. Calculați lungimea cercului cu diametrul de:

a) 8 m; b) 1,(4) m; c) $\frac{6}{\pi}$ m; d) $4\sqrt{5}$ m.

4. Calculați aria discului cu raza de:

a) 7 m; b) $2\sqrt{3}$ m; c) 3,(6) m; d) 1,25 m.

5. Calculați aria discului cu diametrul de:

a) 8 m; b) 6,(6) m; c) $\frac{3}{\pi}$ m; d) $2\sqrt{11}$ m.

6. Aflați raza cercului cu lungimea de:

a) 6π m; b) 9π m; c) 1 m; d) 20 m.

7. Aflați diametrul discului cu aria de:

a) 100π m^2; b) 25π m^2; c) 100 m^2; d) 400 m^2.

8. Ce lungime minimă trebuie să aibă latura unui pătrat, pentru ca în interiorul lui să putem desena un cerc cu raza de:

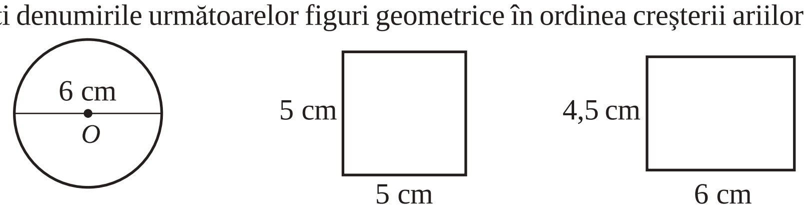
a) 3 cm; b) 4π cm; c) $2\sqrt{3}$ cm; d) $\frac{2}{7}$ cm?

9. Fie O un punct din plan. Reprezentați mulțimea:

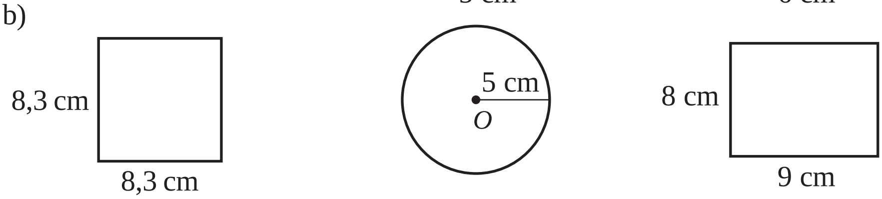
a) $A = \{M \mid OM = 3 \text{ cm}\}$; b) $B = \{M \mid OM = 4{,}5 \text{ cm}\}$;
c) $C = \{M \mid OM \le 4 \text{ cm}\}$; d) $D = \{M \mid OM \le 3{,}5 \text{ cm}\}$.

10. Scrieți denumirile următoarelor figuri geometrice în ordinea creșterii ariilor lor:

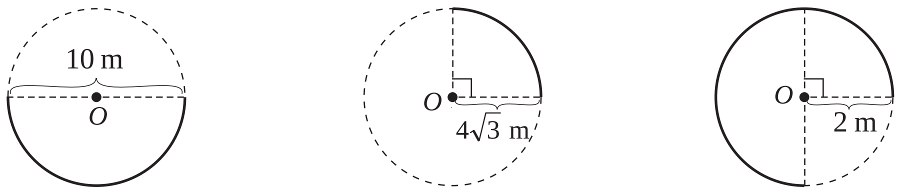
a)



b)

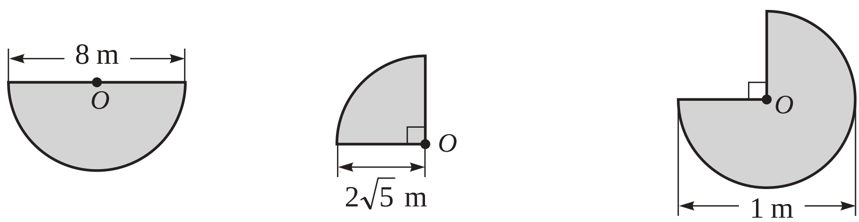


11. Examinați desenul și calculați lungimea porțiunii de cerc (O este centrul cercului).



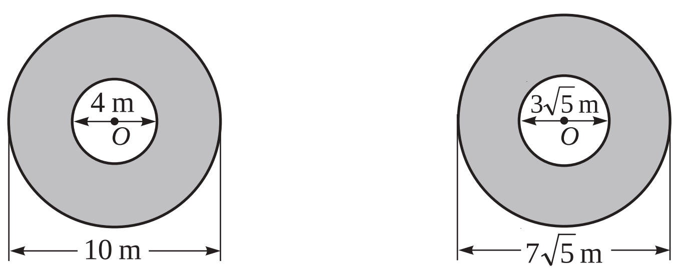
a) b) c)

12. Examinați desenul și calculați aria porțiunii de disc (O este centrul discului).



a) b) c)

13. Calculați aria coroanei circulare din desen (O este centrul cercurilor care mărginesc coroana).



a) b)

14. Fie O un punct din plan. Reprezentați mulțimea:

a) $A = \{M \mid 2 \text{ cm} \le OM \le 4 \text{ cm}\}$; b) $B = \{M \mid 3 \text{ cm} \le OM \le 5 \text{ cm}\}$;

c) $C = \{M \mid OM \ge 2 \text{ cm}\}$; d) $D = \{M \mid OM \ge 3{,}5 \text{ cm}\}$.

15. a) Construiți un triunghi cu vârfurile pe un cerc, astfel încât o latură să fie diametrul cercului. Măsurați unghiurile triunghiului. Trageți concluzia.

b) Utilizând concluzia din a), aflați lungimea laturii mai mari a unui triunghi cu un unghi de 90° și ale cărui vârfuri se află pe un cerc cu raza de 10 cm.

16. Aria unui disc de carton este egală cu 400 m^2. Prin decuparea din acest disc a altui disc s-a obținut o coroană circulară cu aria de 175 m^2. Care este raza discului decupat?

§5. Propoziții matematice. Axiome. Teoreme

5.1. Enunțuri și propoziții

1 Care dintre următoarele enunțuri poate fi apreciat cu *adevărat* sau *fals*?

a) „Numărul 8 se divide cu 2”.
b) „Pe planeta Marte există viață”.
c) „Salut!”.
d) „Pătratul are 5 laturi”.

Explicăm

Enunțul a) este o propoziție adevărată.

Enunțul b) este o propoziție adevărată sau este o propoziție falsă (deoarece savanții, la moment, nu se pot pronunța cu certitudine dacă există sau nu viață pe planeta Marte).

Enunțul c) nu este o propoziție (este absurd să spunem că acest enunț este adevărat sau fals).

Enunțul d) este o propoziție falsă.

O propoziție (matematică) este un enunț despre care se poate stabili cu certitudine că este adevărat sau că este fals.

Dacă o propoziție este **adevărată**, spunem că ea are **valoarea de adevăr „Adevăr”**.
Dacă o propoziție este **falsă**, spunem că ea are **valoarea de adevăr „Fals”.**

• Selectați propozițiile și stabiliți valoarea lor de adevăr.
a) „Două drepte concurente au un punct comun”.
b) „Dacă ultima cifră a numărului întreg este 0, atunci acest număr se divide cu 5”.
c) „Furnica este insectă”.
d) „Ion are 15 ani”.
e) „Mihai este pasionat de fotbal”.

2 Comparați valorile de adevăr ale propozițiilor:

a) „Numărul 7 **este** prim” și „Numărul 7 **nu este** prim”.

b) „Ecuația $x^2=-1$ **are** o soluție întreagă” și „Ecuația $x^2=-1$ **nu are** o soluție întreagă”.

Explicăm

a) Prima propoziție este *adevărată*, a doua – *falsă*.
b) Prima propoziție este *falsă*, a doua – *adevărată*.

Fiecărei propoziții îi corespunde o altă propoziție, numită **negația propoziției** date și care, de regulă, se obține din ea inserând cuvântul *nu* înainte de verb. O propoziție și negația ei au valori de adevăr diferite.

Astfel propoziţia „Numărul 7 nu este prim” este negaţia propoziţiei „Numărul 7 este prim”.

• Formulaţi negaţia propoziţiei şi stabiliţi valorile de adevăr ale ambelor propoziţii.
a) „Triunghiul are diagonale”. b) „$2+2=4$”.

4.2. Axiome. Teoreme

Propoziţiile matematice adevărate care se admit fără demonstraţii se numesc **axiome**.

O propoziţie matematică al cărei adevăr se demonstrează se numeşte **teoremă**.

Demonstraţia teoremei este un şir de deducţii bazate pe axiome, teoreme şi proprietăţi (deja demonstrate).

Exemple:

1. Propoziţiile „Oricare ar fi dreapta, există puncte ce aparţin acestei drepte şi puncte ce nu-i aparţin” şi „Oricare două puncte diferite determină o unică dreaptă” sunt axiome.

2. Propoziţia „Dacă două drepte au două puncte comune diferite, atunci ele sunt confundate” este o teoremă. Adevărul ei poate fi demonstrat.

O teoremă poate fi enunţată astfel: „Dacă I, atunci C”.

Propoziţia I se numeşte **ipoteza** teoremei, iar C – **concluzia** teoremei.

Ipoteza teoremei este o propoziţie adevărată. Concluzia teoremei este o propoziţie al cărei adevăr trebuie demonstrat.

Schimbând locurile ipotezei şi concluziei teoremei, obţinem o nouă propoziţie, numită **reciproca teoremei** date. Reciproca teoremei poate fi o propoziţie adevărată (adică o nouă teoremă) sau o propoziţie falsă. Dacă reciproca teoremei date este, de asemenea, teoremă, atunci teorema dată se mai numeşte **teoremă directă**, iar reciproca ei – teoremă reciprocă.

Exemple:

1. Reciproca teoremei „Dacă ultima cifră a numărului întreg este 0, atunci numărul se divide cu 10” este propoziţia adevărată (teorema) „Dacă numărul întreg se divide cu 10, atunci ultima cifră a lui este 0”.

2. Reciproca teoremei „Dacă ultima cifră a numărului întreg este 0, atunci numărul se divide cu 5” este propoziţia falsă „Dacă numărul întreg se divide cu 5, atunci ultima cifră a lui este 0”.

Există diferite metode de demonstraţie a teoremelor.

Uneori, în loc să demonstrăm că propoziţia C este adevărată, este mai uşor să demonstrăm că ea nu poate fi falsă. Această metodă de demonstrare se numeşte *metoda reducerii la absurd* şi se bazează pe faptul că:

Propoziţia „Dacă ***I***, atunci ***C***” este adevărată dacă şi numai dacă este adevărată propoziţia „Dacă **negaţia lui *C***, atunci **negaţia lui *I***”. (*)

Etapele demonstrației prin metoda reducerii la absurd

1. Se presupune că concluzia C este falsă (adică negația lui C este adevărată).
2. În baza presupunerii, se parcurge un raționament logic, până când se ajunge la o contradicție sau până când se arată că ipoteza I este falsă (adică negația lui I este adevărată).
3. În conformitate cu afirmația (∗), concluzia C a teoremei este adevărată.

Exemplu:

Să demonstrăm prin metoda reducerii la absurd teorema:

„Dacă două drepte au două puncte comune diferite, atunci dreptele sunt confundate”.

Demonstrație:

1. Presupunem că concluzia „dreptele sunt confundate” nu este adevărată, adică fie că dreptele sunt diferite.
2. Obținem că prin două puncte diferite trec **două** drepte diferite, ceea ce contrazice axioma „Oricare două puncte diferite determină o **unică** dreaptă”.
3. Contrazicerea obținută demonstrează că presupunerea este greşită (falsă), adică concluzia „dreptele sunt confundate” este adevărată. Ceea ce trebuia demonstrat (c.c.t.d.).

• Demonstrați teorema:

„Dacă trei puncte sunt necoliniare, atunci fiecare două dintre ele sunt diferite”.

Observație. Pentru a demonstra că o propoziție nu este adevărată, este suficient să găsim un exemplu (numit **contraexemplu**) care contrazice propoziția.

• Demonstrați că propoziția „Dacă numărul întreg se divide cu 5, atunci ultima cifră a lui este 0” este falsă.

Exerciții și probleme

1. Selectați propozițiile şi stabiliți valoarea lor de adevăr.

a) „Prin trei puncte coliniare se pot construi două drepte diferite”.

b) „Perimetrul pătratului cu latura de $0{,}75$ cm este egal cu 30 mm”.

c) „$3\cdot 3=10$”.

d) „Vara, temperatura aerului nu este mai mică de 5 °C”.

e) „Există pisici albe”.

f) „Viteza sunetului este mai mare decât viteza luminii”.

2. Formulați negația fiecărei propoziții de la exercițiului **1**.

3. Pentru ce valori întregi ale lui a se obține o propoziție adevărată?

a) $a+2=3$. b) $a+a=a$. c) $|a|=4$. d) $2a-3a=-a$.

4. Precizați ipoteza și concluzia teoremei:
a) Dacă $a \parallel b$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel c$.
b) Dacă un număr se divide cu 8, atunci el se divide și cu 4.
c) Dacă fiecare trei puncte din patru puncte date sunt coliniare, atunci toate cele patru puncte sunt coliniare.
d) Dacă a, b, c sunt numere reale, $a > b$ și $b > c$, atunci $a > c$.

5. Formulați reciprocele teoremelor din exercițiul **4**. Stabiliți valoarea lor de adevăr.

6. Demonstrați că următoarele propoziții sunt false, găsind un contraexemplu.
a) „Dacă ultima cifră a unui număr natural este 7, atunci numărul este prim”.
b) „Orice număr de forma $\sqrt{a}$ este irațional”.
c) „Nu există cuvinte în limba română care să conțină o secvență de 4 consoane alături”.
d) „Ecuația $x^2 = 2x$ nu are soluții întregi”.

7. Aplicând metoda reducerii la absurd, demonstrați adevărul propozițiilor.
a) „Dacă $a \neq b$, atunci $a + 3 \neq b + 3$”.
b) „Dacă mâine este duminică, atunci astăzi este sâmbătă”.
c) „Dacă lungimea laturii unui triunghi echilateral este de 8 cm, atunci perimetrul triunghiului este 24 cm”.
d) „Numărul 19 este prim”.

☑☑☐

8. Formulați negația propoziției.
a) „Orice număr natural este rațional”.
b) „Există numere negative”.
c) „Toate numerele sunt întregi”.
d) „Există numere naturale care nu sunt întregi”.
Ce observați?

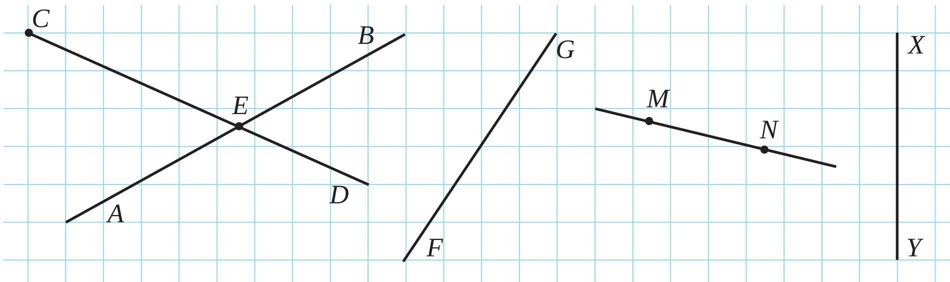
9. Fie teorema „Dacă un număr natural este divizibil cu 3, atunci suma cifrelor lui este divizibilă cu 3”. Formulați teorema reciprocă. Precizați ipoteza și concluzia teoremei reciproce.

☑☑☑

10. Demonstrați că:
a) pentru orice număr întreg n, dacă $n^2 \not\vdots\, 16$, atunci $n^2 \not\vdots\, 4$;
b) în orice triunghi există cel mult un unghi obtuz.

Exerciții și probleme recapitulative

1. Examinați desenul şi precizați: a) dreptele; b) semidreptele; c) segmentele.



2. Citiți notațiile:

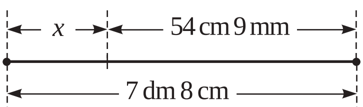
a) MN, $[MN$, $[MN]$, $[NM$, m, $[mN$, α; b) d, $[dA$, $[DA]$, $[AD$, AD, $[DA$, β.

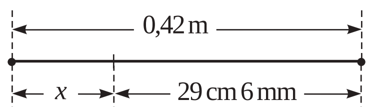
3. Citiți propoziția:

a) $M \in d$ şi $M \notin l$; b) $\{X, Y, Z\} \subset \alpha$; c) $a \cap b = \{M\}$;

d) $C \in [AB$; e) $X \notin AB$; f) $XY = YZ$.

4. Aflați x:

a)


b)


5. Realizați un desen corespunzător situației:

a) Punctele M, R, S sunt coliniare şi dreptele AB şi CD sunt concurente în punctul R.

b) Dreptele a, b, c sunt concurente fiecare două în punctele A, B, C, $a \cap b = \{A\}$, $B \notin c$.

c) Semidreptele $[MN$ şi $[MP$ nu sunt semidrepte opuse şi punctele L, N, P sunt coliniare.

d) Punctele X şi Y aparțin semidreptelor $[AB$ şi $[CD$.

6. Măsurați cu rigla şi calculați lungimea în realitate:

a) a automobilului; b) a camionului.

Scara 1 : 90

Scara 1 : 160

Indicație. Dacă scara unui desen este 1 : n, atunci obiectul desenat este, în realitate, de n ori mai mare.

7. Punctul M aparține segmentului AB. Aflați distanța dintre mijloacele segmentelor AM şi MB, dacă AB = 6 cm.

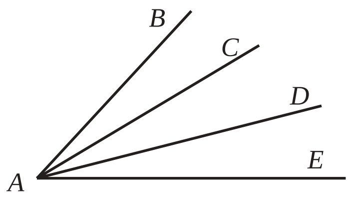
8. Un sfert din lungimea segmentului MN este egal cu o jumătate din lungimea segmentului KP, care este cu 24 cm mai scurt. Aflați lungimea fiecărui segment.

9. Punctele A, B, C, D sunt coliniare, $AB = 1$ cm, $BC = 2$ cm, $CD = 4$ cm. Care poate fi lungimea segmentului AD?

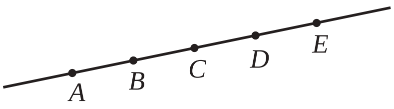
10. Pe o riglă sunt indicate doar notațiile 0 cm, 7 cm şi 11 cm. Cum se poate construi, cu ajutorul acestei rigle, un segment de:
a) 18 cm; b) 5 cm; c) 10 cm?

11. Punctul C aparține segmentului AB. Aflați:
a) $\frac{AB}{AC}$, dacă $\frac{AC}{BC} = \frac{2}{5}$;
b) $\frac{BC}{AB}$, dacă $\frac{BC}{AC} = 0{,}75$;
c) $\frac{AC}{BC}$, dacă $\frac{AB}{BC} = 1,(3)$.

12. a) Câte unghiuri observați în desen?
b) Câte unghiuri se vor obține, dacă vom construi în interiorul unui unghi:
5 semidrepte; 6 semidrepte?
c) Câte semidrepte trebuie să construim în interiorul unui unghi, pentru a obține:
21 de unghiuri; 28 de unghiuri?



13. Examinați desenul şi precizați toate semidreptele.



14. Examinați desenul problemei 13 şi determinați:
a) $[AC]\cap[BE]$; b) $[CA]\cup[AD]$; c) $[AB]\setminus[CD]$;
d) $[BE\cup[CD$; e) $[BD\cap[CA$; f) $AE\cap[BC\cap[CD$.

15. Punctul A este mijlocul segmentului BC, $D\in BC$, astfel încât $AD = 3,(3)$ cm şi $AB = 3{,}75$ cm. Ce lungime poate avea segmentul CD?

16. Determinați valoarea de adevăr a propoziției.
a) „Numărul 5 este divizor al numărului 20”.
b) „Diferența oricăror două numere naturale este număr natural”.
c) „Cuvântul *matematica* este format din 9 litere”.
d) „Negația propoziției adevărate este falsă”.

17. Formulați reciprocele propozițiilor.

a) „Dacă astăzi este 1 mai, atunci peste 60 de zile va fi vară”.

b) „Dacă Ion are 100 de lei, atunci îi ajung bani pentru a cumpăra un cadou de 90 de lei”.

c) „Dacă $a = 0$, atunci $\frac{8}{a}$ nu are sens”.

d) „Dacă patrulaterul este un pătrat, atunci el are toate unghiurile drepte”.

18. Aflați valorile de adevăr ale propozițiilor din exercițiul **17** și ale reciprocelor lor.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 minute

Varianta 1

1 p

1. Realizați un desen corespunzător situației:

$A \in BC$, $D \notin BC$, $[AB] \equiv [AC]$ și $[BD] \equiv [DC]$.

2 p

2. *Adevărat* sau *fals*?

$$[AB] \cup [BA = AB.$$

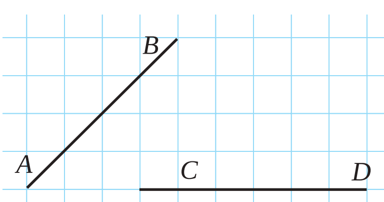
2 p

3. Calculați:

$$42 \text{ cm} + 260 \text{ mm} - 3{,}6 \text{ dm}.$$

2 p

4. Aflați distanța dintre dreptele AB și CD.



3 p

5. Formulați și stabiliți valoarea de adevăr a reciprocei propoziției:

„Dacă $5a = 0$, atunci $a = 0$”.

Varianta 2

1. Realizați un desen corespunzător situației:

$M \in [AB$, $N \in [AC$, $K \in [AD$ și $N \in MK$.

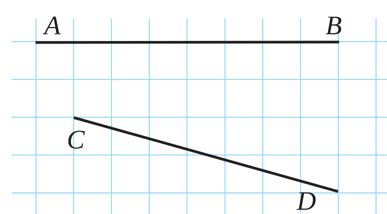
2. *Adevărat* sau *fals*?

$$[AB \cup [BA = [AB].$$

3. Calculați:

$$1{,}8 \text{ dm} + 380 \text{ mm} - 27 \text{ cm}.$$

4. Aflați distanța dintre dreptele AB și CD.



5. Formulați și stabiliți valoarea de adevăr a reciprocei propoziției:

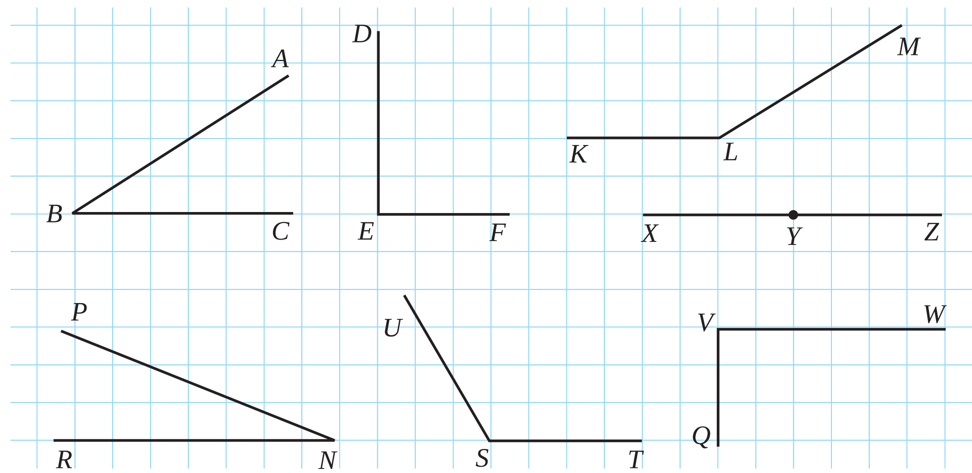
„Dacă $n \,\vdots\, 4$, atunci $n \,\vdots\, 2$”.

CAPITOLUL 2

Unghiuri. Triunghiuri

§1. Unghiuri. Recapitulare și completări

1 Examinați desenele şi completați adecvat.



a) Unghiul este o figură geometrică formată din...

b) Elementele unghiului *ABC* sunt...

c) Unghiurile *DEF* şi *QVW* sunt...

d) Unghiurile *ABC* şi *PNR* sunt...

e) Unghiurile ______ şi ______ sunt unghiuri obtuze.

f) Unghiul *XYZ* este unghi ____________.

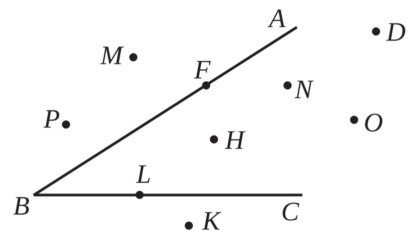
g) Unghiul cu laturile confundate se numeşte unghi ____________.

Ne amintim

Se numeşte **unghi** figura geometrică formată din două semidrepte (**laturile** unghiului) cu originea comună (**vârful** unghiului).
Măsura unghiului **ascuțit** este mai mică decât 90°.
Măsura unghiului **obtuz** este cuprinsă între 90° şi 180°.
Măsura unghiului **drept** este egală cu 90°.
Măsura unghiului **alungit** este egală cu 180°.
Măsura unghiului **nul** este egală cu 0°.

• Utilizând raportorul, aflați măsurile în grade ale unghiurilor reprezentate. Rotunjiți rezultatele până la zeci.

2 Examinați desenul și precizați care puncte aparțin:
a) interiorului unghiului ABC;
b) exteriorului unghiului ABC.

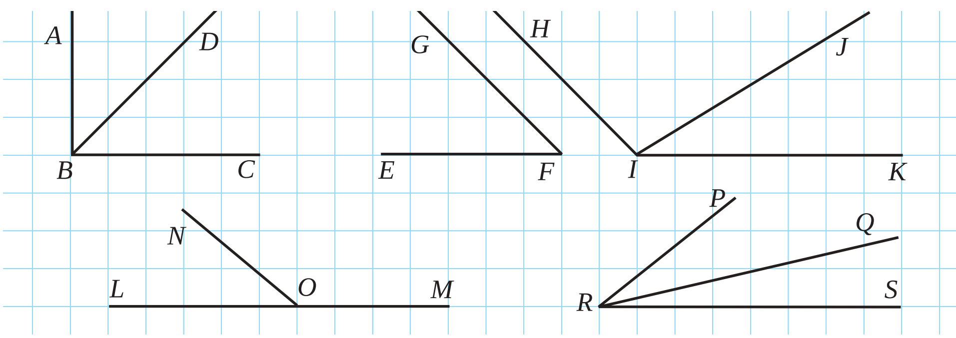


Un unghi ABC separă planul în două mulțimi, numite **interiorul unghiului** (mulțimea punctelor cuprinse între laturile unghiului, care se notează $\mathrm{Int}\angle ABC$) și **exteriorul unghiului** (se notează $\mathrm{Ext}\angle ABC$).

Definiții.
- Unghiurile cu măsuri egale se numesc **unghiuri congruente**.
- Două unghiuri coplanare se numesc **unghiuri adiacente** dacă au vârful comun și o latură comună, situată între celelalte două laturi ale unghiurilor.
- Unghiurile A și B se numesc **unghiuri complementare** dacă suma măsurilor lor este 90°. În acest caz unghiul A este **complementul** unghiului B și reciproc.
- Unghiurile A și B se numesc **unghiuri suplementare** dacă suma măsurilor lor este 180°. În acest caz, unghiul A este **suplementul** unghiului B, iar unghiul B – suplementul unghiului A.

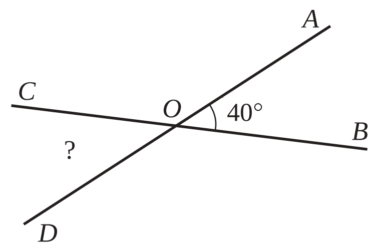
Aplicăm

3 Examinați, măsurați și completați adecvat cu una (sau mai multe) dintre noțiunile *complementare, suplementare, adiacente*.



a) Unghiurile ABD și CBD sunt unghiuri ______.
b) Unghiurile EFG și HIK sunt unghiuri ______.
c) Unghiurile HIJ și JIK sunt unghiuri ______.
d) Unghiurile LON și MON sunt unghiuri ______.
e) Unghiurile PRQ și QRS sunt unghiuri ______.

4 Calculați măsura unghiului *COD* din desen, dacă $m(\angle AOB) = 40°$.



Explicăm

Unghiurile *AOB* şi *AOC* sunt adiacente suplementare.

Prin urmare, $m(\angle AOC) = 180° - \square$.

Unghiurile *AOC* şi *COD* sunt adiacente suplementare.

Prin urmare, $m(\angle COD) = 180° - \square = \square$.

• Calculați şi comparați măsurile unghiurilor *BOD* şi *AOC*. Trageți concluzia.

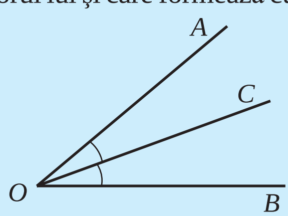
Definiție. Două unghiuri se numesc **unghiuri opuse la vârf** dacă au vârful comun şi laturile lor sunt semidrepte opuse.

Proprietatea unghiurilor opuse la vârf

Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.

• Câte perechi de unghiuri opuse la vârf formează două drepte concurente?

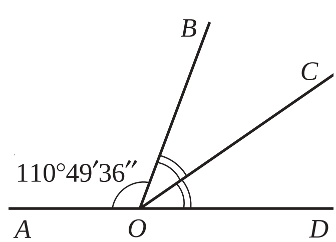
Definiție. **Bisectoarea unghiului** este semidreapta cu originea în vârful unghiului, inclusă în interiorul lui şi care formează cu laturile unghiului două unghiuri congruente.



[*OC* este bisectoarea unghiului *AOB*.

Aplicăm

5 Calculați $m(\angle COD)$, dacă $m(\angle AOB) = 110°49'36''$ şi semidreapta [*OC* este bisectoarea unghiului *BOD*.



Explicăm

① Calculăm întâi $m(\angle BOD)$.

Unghiurile *AOB* şi *BOD* sunt adiacente suplementare.

Prin urmare, $m(\angle BOD) = 180° - m(\angle AOB)$.

grade, minute, secunde

$180° - 110°49'36'' = ?$ → $\begin{array}{r} 180°\ 0'\ 0'' \\ -\ 110°49'36'' \\ \hline ? \end{array}$ (1°) → $\begin{array}{r} 179°60'\ 0'' \\ -\ 110°49'36'' \\ \hline ? \end{array}$ (1′) → $\begin{array}{r} 179°\ 59'\ 60'' \\ -\ 110°\ 49'\ 36'' \\ \hline \square°\ \square'24'' \end{array}$

$m(\angle BOD) = \square° \square' 24''$.

② $m(\angle COD)=m(\angle BOD):2=69^\circ\overset{1^\circ}{\frown}10'\,\square'':2=68^\circ\,\square'\,\square'':2=\square^\circ\,\square'\,\square''$.

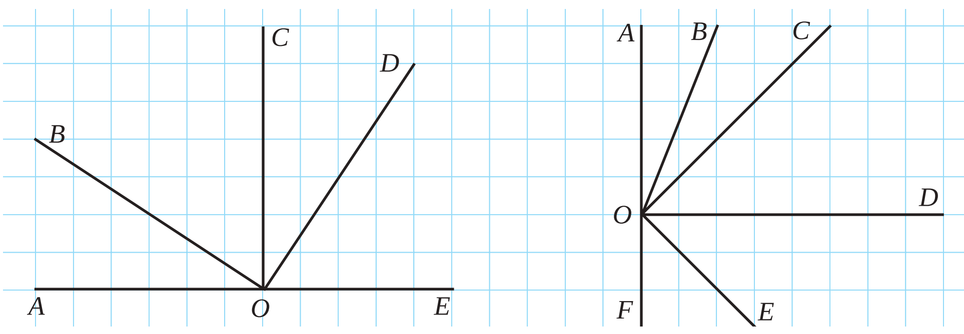
Răspuns: $\square$.

Observație. La efectuarea operațiilor aritmetice cu măsuri de unghiuri se va ține cont că $1^\circ=60'$ şi $1'=60''$.

Exerciții și probleme

1. Examinați desenul şi precizați unghiurile:

a) ascuțite; b) drepte; c) obtuze; d) alungite.



a) b)

2. Examinați desenul exercițiului **1** şi precizați perechile de unghiuri:

a) suplementare; b) complementare; c) adiacente;

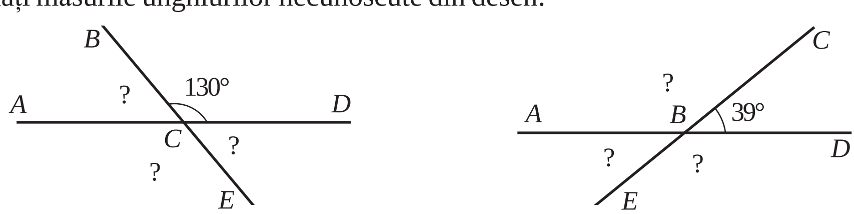
d) adiacente complementare; e) adiacente suplementare.

3. Calculați măsura:

a) complementului unui unghi de 60°; b) complementului unui unghi de 38°;

c) suplementului unui unghi de 70°; d) suplementului unui unghi de 11°.

4. Calculați măsurile unghiurilor necunoscute din desen:



a) b)

5. Aflați măsura unui unghi, dacă măsura complementului lui este:

a) de 2 ori mai mare; b) de 8 ori mai mică; c) cu 20° mai mare; d) cu 40° mai mică.

6. Aflați măsura unui unghi, dacă măsura suplementului lui este:

a) de 3 ori mai mare; b) de 5 ori mai mică; c) cu 50° mai mare; d) cu 150° mai mică.

7. Calculați:

a) $48°30' + 54°40'$; b) $112°48' + 49°15'$;

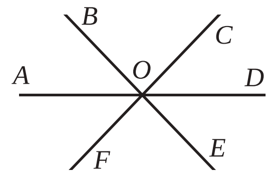
c) $99°25'34'' + 27°28'29''$; d) $36°37'38'' + 39°38'37''$.

8. Calculați:

a) $88°12' - 26°41'$; b) $170° - 64°39$; c) $95°40' - 28°54'43''$; d) $100° - 37°48'59''$.

9. Calculați: a) $47°24' : 2$; b) $125°37' : 2$; c) $19° : 3$; d) $21° : 4$.

10. Examinați desenul și determinați mulțimea:



a) $\angle AOC \cap \angle BOC$; b) $\angle FOD \cap \angle AOE$;

c) $\angle FOE \cap \angle DOE$; d) $\angle BOF \cap \angle DOF$.

11. Examinați desenul și aflați măsurile unghiurilor *AOB* și *BOC*:

a) b)

12. Un unghi are măsura de 44°. Aflați măsurile unghiurilor formate de bisectoarea lui şi de laturile complementului adiacent cu acest unghi.

13. Un unghi are măsura de 68°. Aflați măsurile unghiurilor formate de bisectoarea lui şi de laturile suplementului adiacent cu acest unghi.

14. Diferența măsurilor a două unghiuri suplementare este cu 100° mai mică decât suma lor. Aflați măsurile unghiurilor.

15. *Adevărat* sau *fals*?

a) Măsurile unghiurilor opuse la vârf şi suplementare sunt egale cu 90°.

b) Măsurile unghiurilor opuse la vârf şi complementare sunt egale cu 90°.

c) Măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri complementare este egală cu 45°.

d) Măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri suplementare este egală cu 90°.

16. La intersecția a două drepte concurente se formează 4 unghiuri. Care sunt măsurile unghiurilor, dacă suma măsurilor a 3 unghiuri este egală cu 200°?

17. Laturile a două unghiuri cu același vârf sunt perpendiculare două câte două. Ce poziții relative pot avea bisectoarele acestor unghiuri?

18. Calculați măsura unghiului format de acele ceasornicului la ora 2 şi 10 minute.

§2. Triunghiul și elementele lui. Recapitulare și completări

Ne amintim

Figura geometrică formată din reuniunea segmentelor [*AB*], [*AC*], [*BC*], unde *A*, *B*, *C* sunt trei puncte necoliniare, se numeşte **triunghiul *ABC***. Punctele *A*, *B*, *C* se numesc **vârfurile** triunghiului, segmentele [*AB*], [*AC*], [*BC*] – **laturile** triunghiului, iar unghiurile *ABC*, *ACB*, *BAC* – **unghiurile** triunghiului *ABC*.

Observație. Interiorul triunghiului *ABC* se notează cu $\mathrm{Int}\Delta ABC$, iar exteriorul lui – cu $\mathrm{Ext}\Delta ABC$.

1 Observați cum se clasifică triunghiurile şi denumirile elementelor lor.

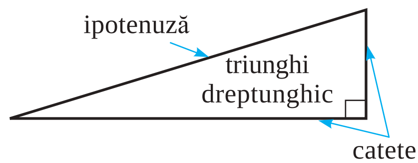
Clasificarea triunghiurilor

✓ **după unghiuri**

Triunghiul **ascuțitunghic** are toate unghiurile ascuțite.

Triunghiul **dreptunghic** are un unghi drept.

Triunghiul **obtuzunghic** are un unghi obtuz.

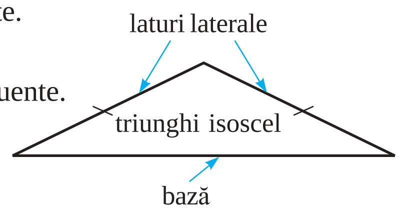


✓ **după laturi**

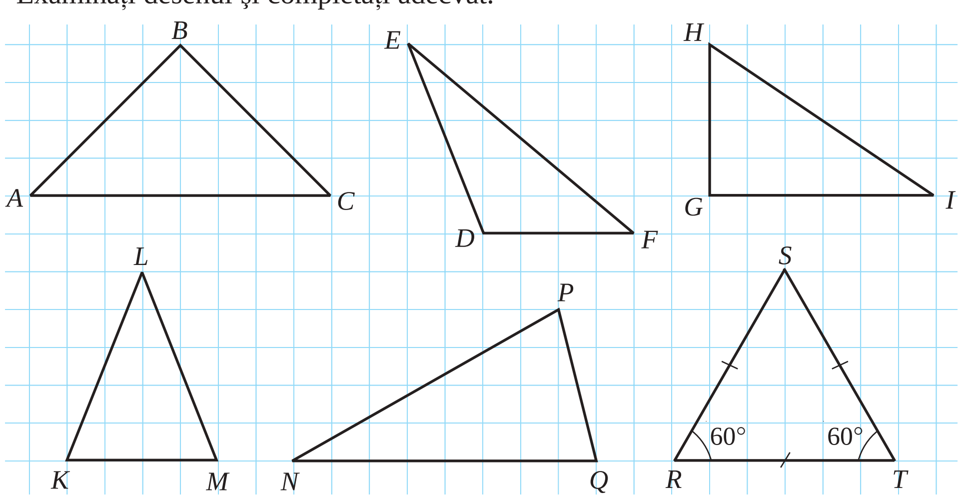
Triunghiul **scalen** are laturile de lungimi diferite.

Triunghiul **isoscel** are două laturi congruente.

Triunghiul **echilateral** are toate laturile congruente.



• Examinați desenul şi completați adecvat.



a) Triunghiurile *KLM* şi ______ sunt ascuțitunghice, deoarece...

b) Triunghiurile *ABC* şi *HGI* sunt ______, deoarece...

c) Laturile HG şi GI se numesc ______ triunghiului HGI. Latura ______ se numeşte ipotenuza triunghiului ABC.

d) Triunghiul DEF este ______, deoarece $m(\angle D) >$ ______.

e) Triunghiurile ______ şi ______ sunt isoscele, deoarece...

f) Triunghiul NPQ este ______, deoarece...

g) Triunghiul ______ este echilateral, deoarece...

h) Dacă $m(\angle N) = 35°$ şi $m(\angle Q) = 75°$, atunci $m(\angle P) =$ ______.

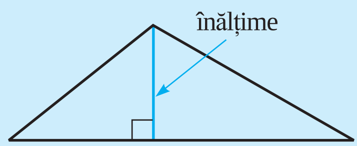
Proprietăți

1° Din proprietățile distanței rezultă că între laturile oricărui triunghi ABC există relațiile: $AB + AC > BC$, $AB + BC > AC$, $AC + BC > AB$ (**inegalitățile triunghiului**).

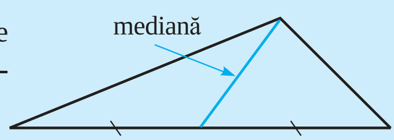
2° Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°.

Definiții.

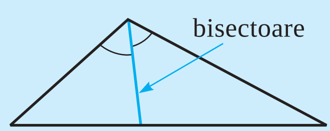
- **Înălțime** a triunghiului se numeşte segmentul determinat de un vârf al triunghiului şi de punctul în care perpendiculara dusă din acest vârf intersectează dreapta suport a laturii opuse.



- **Mediană** a triunghiului se numeşte segmentul determinat de un vârf al triunghiului şi de mijlocul laturii opuse.



- **Bisectoare** a triunghiului se numeşte segmentul determinat de un vârf al triunghiului şi de punctul în care bisectoarea unghiului cu acest vârf al triunghiului intersectează latura opusă.



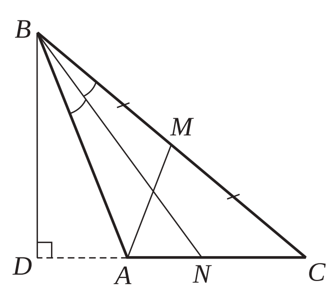
Aplicăm

2 Examinați şi completați cu una dintre noțiunile *înălțime*, *mediană*, *bisectoare*:

a) Segmentul BD este o ______ a triunghiului ABC, deoarece...

b) Segmentul AM este o ______ a triunghiului ABC, deoarece $[BM] \equiv [MC]$.

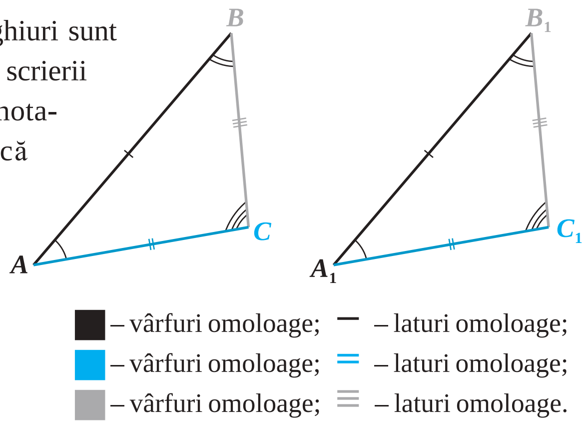
c) Segmentul BN este o ______ a triunghiului ABC, deoarece...



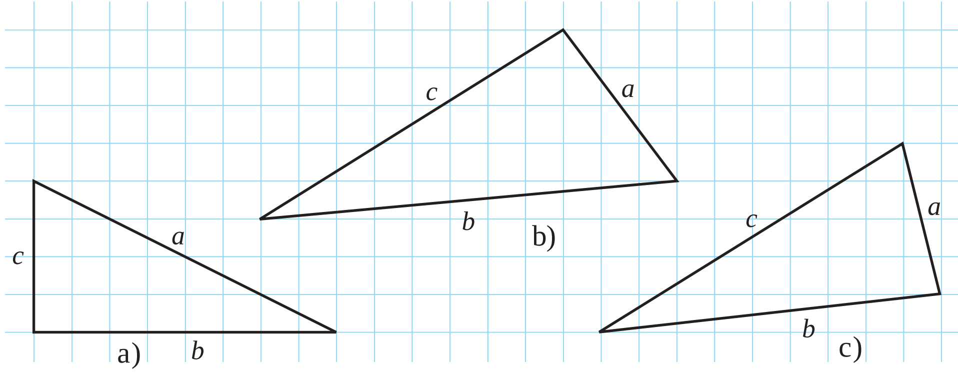
3 Amintiți-vă definiția figurilor congruente şi stabiliți ce relații există între laturile şi între unghiurile respective ale două triunghiuri congruente.

Definiție. Două **triunghiuri** se numesc **congruente** dacă au laturile şi unghiurile respectiv congruente.

Observație. Notând că două triunghiuri sunt congruente, vom respecta ordinea scrierii vârfurilor triunghiurilor. Astfel, notația $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ înseamnă că $\angle A \equiv \angle A_1$, $\angle B \equiv \angle B_1$, $\angle C \equiv \angle C_1$ şi $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[AC] \equiv [A_1C_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$. În general, dacă $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, nu înseamnă că, de exemplu, $\Delta ABC \equiv \Delta B_1A_1C_1$.



4 Examinați desenul. Utilizând compasul şi raportorul, comparați lungimile laturilor, apoi măsurile unghiurilor triunghiului.



Completați adecvat:

a) ☐ $< b < a$; b) $a <$ ☐ $<$ ☐; c) ☐ $<$ ☐ $< c$;

☐ $< m(\angle B) <$ ☐; $m(\angle A) <$ ☐ $<$ ☐; ☐ $<$ ☐ $< m(\angle C)$.

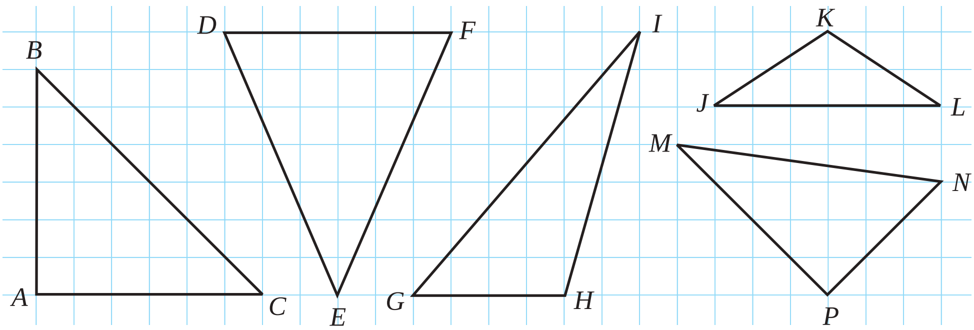
Teoremă
Unghiului de măsură mai mare al triunghiului i se opune o latură de lungime mai mare.

• Reciproca acestei teoreme de asemenea este teoremă. Formulați reciproca teoremei.

Exerciții și probleme

1. Examinați desenul şi precizați triunghiurile:

a) ascuțitunghice; b) dreptunghice;
c) obtuzunghice; d) isoscele;
e) scalene; f) dreptunghice isoscele.



2. Numiți elementele triunghiului ABC din desenul exercițiului **1**. Măsurați cu rigla şi calculați perimetrul triunghiului ABC.

3. Construiți un desen corespunzător situației:

a) Punctele M şi N aparțin triunghiului ABC, punctele K şi L – interiorului triunghiului ABC, iar punctul P – exteriorului triunghiului ABC, astfel încât punctele A, M, N, K, P sunt coliniare.

b) Triunghiul ABC este obtuzunghic isoscel, cu baza de 4 cm.

c) Triunghiurile KLM şi LMN sunt dreptunghice isoscele.

d) Triunghiurile KLM şi KLN sunt obtuzunghice isoscele şi $KM \cap LN = \{R\}$.

4. Fie triunghiul ABC. Calculați $m(\angle A)$, dacă:

a) $m(\angle B) = m(\angle C) = 35°$;

b) $m(\angle B) = 48°$, $m(\angle C) = 84°$;

c) $m(\angle B) + m(\angle C) = 130°$;

d) $m(\angle A) = m(\angle B) = m(\angle C)$.

5. Calculați perimetrul triunghiului ABC, dacă:

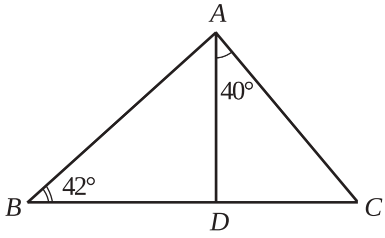
a) $AB = AC = BC = 9{,}7$ cm;

b) $AB = 2AC = 16$ cm, $BC = 10{,}6$ cm;

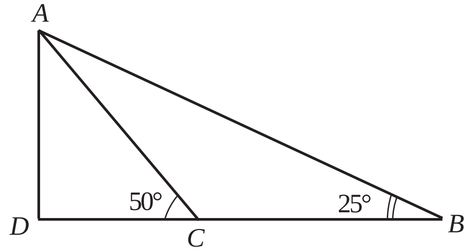
c) $AB = 0{,}8(AC + BC) = 12$ cm;

d) $AB + AC = 15$ cm, $AB + BC = 16$ cm, $AC + BC = 17$ cm.

6. Examinați desenul şi calculați măsura unghiului A al triunghiului ABC, dacă AD este o înălțime a triunghiului ABC.

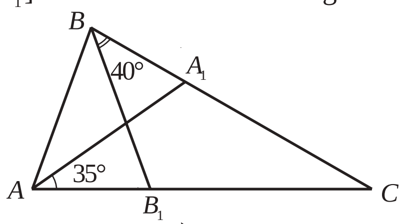


a)

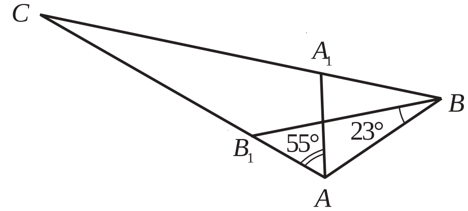


b)

7. Examinați desenul şi calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABC, dacă $[AA_1]$ şi $[BB_1]$ sunt bisectoare ale triunghiului ABC.



a)



b)

8. $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ sunt medianele triunghiului ABC. Calculați perimetrul triunghiului ABC, dacă: a) $AC_1 = 7{,}8$ cm, $BA_1 = 9$ cm, $CB_1 = 8{,}7$ cm;

b) $BC_1 = \sqrt{8}$ cm, $BA_1 = \sqrt{18}$ cm, $AB_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

9. Stabiliți dacă următoarele 3 numere pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi (exprimate în aceeaşi unitate de măsură):
a) 7, 9, 17; b) 3, 10, 13; c) 12, 11, 20; d) $\sqrt{8}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{32}$.

10. Aflați unghiul cu măsura cea mai mare şi unghiul cu măsura cea mai mică ale triunghiului ABC, dacă:
a) $AB = 8$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm; b) $AB = \frac{2}{3}AC$, $AC = 1{,}2BC$;
c) $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = 3\sqrt{5}$ cm, $AC = 7$ cm.

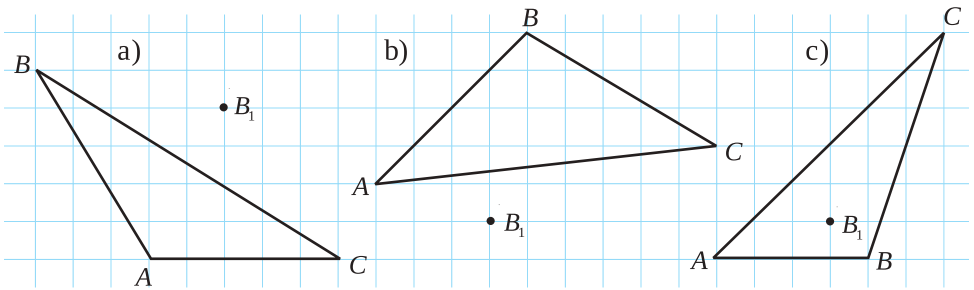
11. Scrieți laturile triunghiului ABC în ordinea crescătoare a lungimilor, dacă:
a) $m(\angle A) = 30°$, $m(\angle B) = 70°$; b) $m(\angle B) = 60°$, $m(\angle C) = 10°$;
c) $m(\angle A) < m(\angle B) < 45°$.

12. Perimetrul triunghiului ABC este de 44 cm, iar perimetrul triunghiului ACD – de 52 cm. Calculați perimetrul triunghiului ABD, dacă $AC = 18$ cm şi $C \in [BD]$.

13. Calculați perimetrul triunghiului echilateral ABC, dacă $M \in [AC]$ şi $AM = 3MC = 12{,}6$ cm.

14. Calculați aria triunghiului ABC, dacă $m(\angle B) = 90°$, $AB = 12{,}4$ cm şi $BC = 8{,}5$ cm.

15. Reproduceți desenul şi construiți triunghiul $A_1B_1C_1$ congruent cu triunghiul ABC, astfel încât punctul B_1 să fie omologul vârfului B.



16. *Adevărat* sau *fals*?

a) Dacă ΔABC este isoscel, cu baza $[AC]$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta CBA$.

b) Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta CBA$, atunci ΔABC este isoscel.

c) Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta CBA \equiv \Delta BAC$, atunci ΔABC este echilateral.

d) Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, $m(\angle B) = 90°$ şi $m(\angle A) + m(\angle D) = 70°$, atunci $m(\angle F) = 20°$.

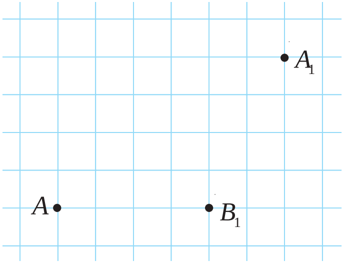
17. Un triunghi cu perimetrul de 54 cm are lungimile laturilor exprimate prin numere naturale consecutive. Aflați lungimile laturilor acestui triunghi.

18. *Adevărat* sau *fals*?

a) Există un triunghi cu laturile de 6 cm, 8 cm, 14 cm.

b) Înălțimea unui triunghi nu este mai lungă decât mediana corespunzătoare aceleiaşi laturi.

19. Punctul A din desen este un vârf al triunghiului ABC, iar punctele A_1 şi B_1 – mijloacele laturilor BC şi, respectiv, AC ale acestui triunghi. Reproduceți desenul şi, utilizând rigla şi compasul, „restabiliți” triunghiul ABC.



20. Fie triunghiul ABC. Măsura unghiului A este de 1,8 ori mai mică decât măsura unghiului B şi de 5 ori mai mare decât cea a unghiului C. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului.

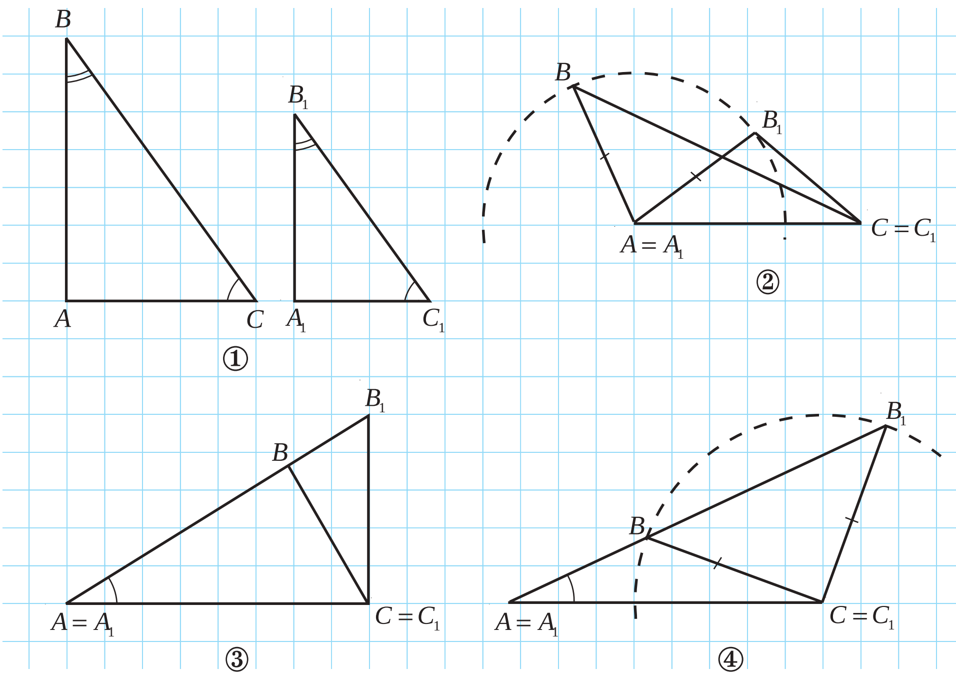
21. Ce lungime poate avea latura unui triunghi, dacă ea este cu 2 cm mai lungă decât jumătatea altei laturi şi cu 32 cm mai scurtă decât dublul lungimii laturii a treia?

22. Demonstrați că, dacă latura AB este cea mai scurtă latură a triunghiului ABC, atunci $m(\angle C) < 90°$.

§ 3. Criteriile de congruență a triunghiurilor

3.1. Criteriile de congruență a triunghiurilor oarecare

Examinați desenele și scrieți pentru fiecare caz perechile de elemente congruente ale triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$.



• Stabiliți dacă propoziția este adevărată.

a) Dacă două triunghiuri au unghiurile respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

b) Dacă două triunghiuri au câte două laturi respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

c) Dacă două triunghiuri au câte o latură și câte un unghi respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

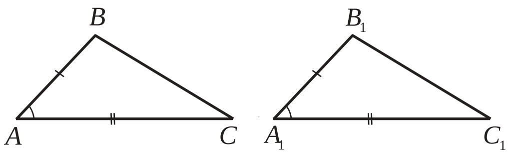
Trageți concluzia.

Observație. Am constatat că pentru a afirma că două triunghiuri sunt congruente nu este suficient să cunoaștem două perechi de elemente ale acestora. Următoarele criterii afirmă că putem conchide că două triunghiuri sunt congruente dacă trei perechi de elemente omoloage ale acestor triunghiuri, dintre care cel puțin o pereche de laturi, sunt respectiv congruente.

Criteriile de congruență a două triunghiuri oarecare

1. Criteriul LUL (latură–unghi–latură)

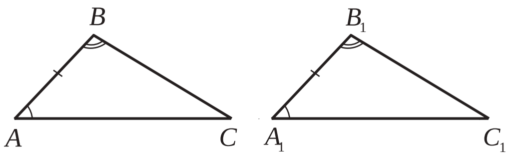
Dacă două laturi şi unghiul cuprins între ele ale unui triunghi sunt respectiv congruente cu două laturi şi unghiul cuprins între ele ale altui triunghi, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A_1B_1]\\ [AC]\equiv[A_1C_1]\\ \angle A\equiv\angle A_1\end{array}\right| \rightarrow \Delta\, ABC\equiv\Delta\, A_1B_1C_1$$

2. Criteriul ULU (unghi–latură–unghi)

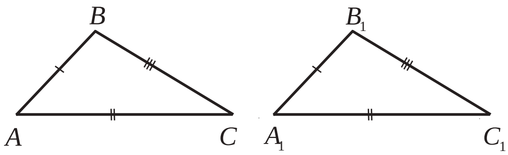
Dacă o latură şi unghiurile alăturate ei ale unui triunghi sunt respectiv congruente cu o latură şi unghiurile alăturate ei ale altui triunghi, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A_1B_1]\\ \angle A\equiv\angle A_1\\ \angle B\equiv\angle B_1\end{array}\right| \rightarrow \Delta\, ABC\equiv\Delta\, A_1B_1C_1$$

3. Criteriul LLL (latură–latură–latură)

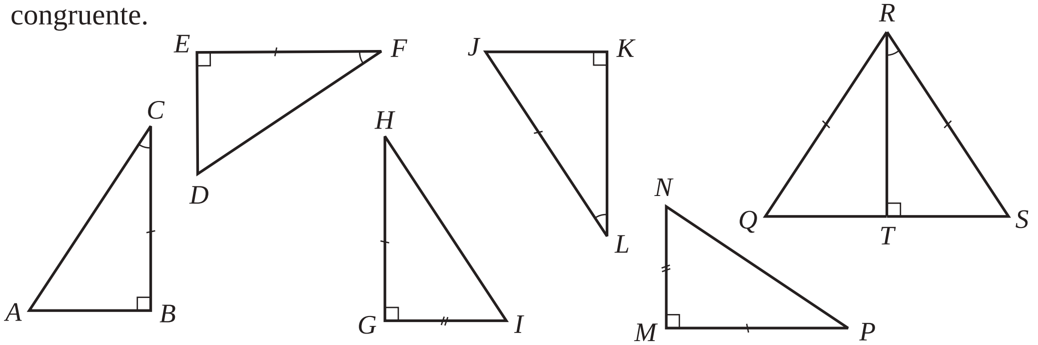
Dacă laturile unui triunghi sunt respectiv congruente cu laturile altui triunghi, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A_1B_1]\\ [AC]\equiv[A_1C_1]\\ [BC]\equiv[B_1C_1]\end{array}\right| \rightarrow \Delta\, ABC\equiv\Delta\, A_1B_1C_1$$

3.2. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice

Examinați desenul. Aplicând criteriile de congruență, găsiți perechile de triunghiuri congruente.



Explicăm

$\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, conform criteriului ______ .

$\Delta HGI \equiv \Delta PMN$, conform criteriului ______ .

$\Delta LKJ \equiv \Delta RTS$, conform criteriului ______ (deoarece $m(\angle J) = 90° - m(\angle L) =$ $= 90° - m(\angle R) = m(\angle S)$).

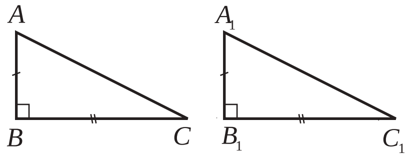
Mai târziu vom arăta că înălțimea cuprinsă între laturile congruente ale triunghiului isoscel este și mediană, și bisectoare a acestui triunghi. Prin urmare, $[QT] \equiv [ST]$; deci ______ $\equiv \Delta SRT$, conform criteriului LLL.

Observație. Deoarece orice două triunghiuri dreptunghice au un unghi drept, rezultă că două triunghiuri dreptunghice sunt congruente, dacă există două perechi de elemente omoloage congruente, dintre care cel puțin o pereche de laturi.

Criteriile de congruență a două triunghiuri dreptunghice

1. Criteriul CC (catetă–catetă)

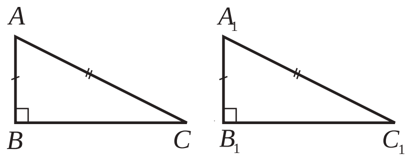
Dacă două triunghiuri dreptunghice au catetele respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l} m(\angle B) = m(\angle B_1) = 90° \\ [AB] \equiv [A_1B_1] \\ [BC] \equiv [B_1C_1] \end{array}\right| \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$$

2. Criteriul IC (ipotenuză–catetă)

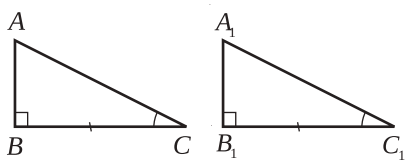
Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele și câte o catetă respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l} m(\angle B) = m(\angle B_1) = 90° \\ [AB] \equiv [A_1B_1] \\ [AC] \equiv [A_1C_1] \end{array}\right| \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$$

3. Criteriul CU (catetă–unghi ascuțit alăturat)

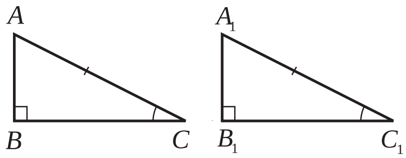
Dacă două triunghiuri dreptunghice au câte o catetă și un unghi ascuțit alăturat catetei respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l} m(\angle B) = m(\angle B_1) = 90° \\ [BC] \equiv [B_1C_1] \\ m(\angle C) = m(\angle C_1) \end{array}\right| \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$$

4. Criteriul IU (ipotenuză–unghi ascuțit)

Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele şi câte un unghi ascuțit respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l} m(\angle B)=m(\angle B_1)=90^\circ \\ [AC]\equiv[A_1C_1] \\ m(\angle C)=m(\angle C_1) \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$$

3.3. Construirea triunghiurilor

1 Să se construiască un triunghi cu laturile de 6 cm, 5 cm, 4 cm, utilizând rigla şi compasul.

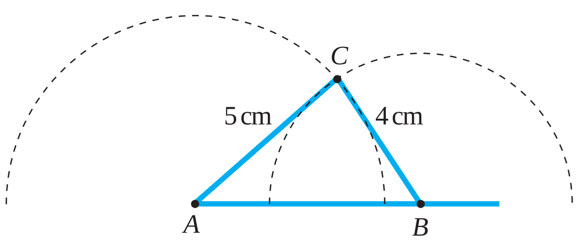
Explicăm

Conform criteriului LLL, datele problemei sunt suficiente pentru a construi triunghiul.

① Construim semidreapta $[AM$ şi depunem cu ajutorul compasului un segment AB, cu lungimea de 6 cm.

② Fixăm piciorul compasului în punctul A şi construim un semicerc cu raza de 5 cm.

③ Construim un semicerc cu centrul în B şi cu raza de 4 cm. Cele două semicercuri se intersectează în punctul C.

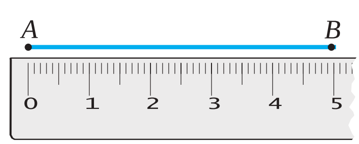


Triunghiul ABC astfel construit satisface condițiile problemei.

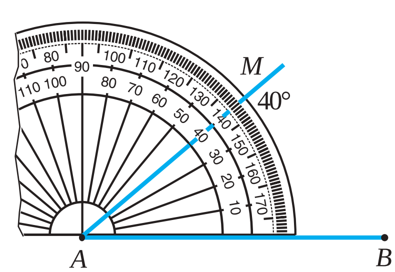
2 Să se construiască un triunghi cu o latură de 5 cm şi unghiurile alăturate ei de 40° şi 45°, utilizând rigla, raportorul şi compasul.

Explicăm

① Construim segmentul AB cu lungimea de 5 cm.

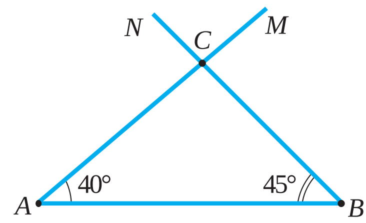


② Fixăm raportorul cu centrul în A şi marcăm punctul M din dreptul gradației 40°. Construim semidreapta $[AM$.



③ Similar, construim semidreapta $[BN$, care formează cu semidreapta $[BA$ un unghi de 45°. Notăm cu C punctul de intersecție a semidreptelor $[AM$ şi $[BN$.

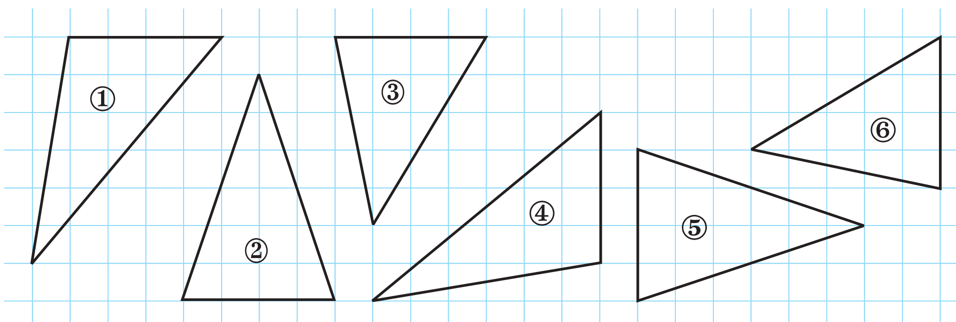
Triunghiul ABC astfel construit satisface condițiile problemei.



• Construiți un triunghi cu laturile de 5 cm şi 6 cm şi unghiul dintre ele de 60°, utilizând rigla, raportorul şi compasul.

Exerciții și probleme

1. Examinați desenul şi stabiliți perechile de triunghiuri congruente.



2. Triunghiurile ABC şi DEF sunt congruente. Copiați şi completați:

$[AB] \equiv [DE]$, ____ $\equiv DF$, $EF \equiv$ ____,

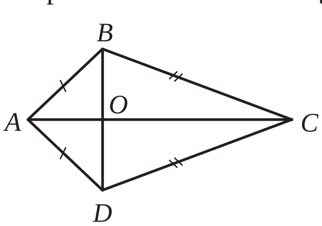
$\angle A \equiv$ ____, $\angle E \equiv$ ____, ____ $\equiv \angle C$.

3. Triunghiurile ABC şi CAD sunt congruente. Copiați şi completați:

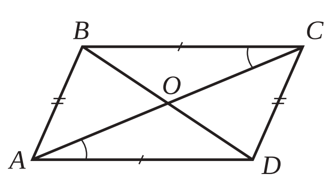
a) ____ $\equiv [AB]$, ____ $\equiv [DC]$, $[BC] \equiv$ ____, $\angle A \equiv$ ____, $\angle B \equiv$ ____.

b) Triunghiurile ABC şi CAD sunt ____.

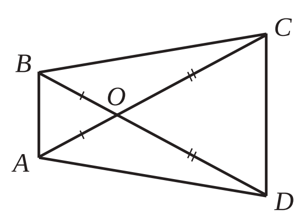
4. Aplicând criteriile de congruență, stabiliți perechile de triunghiuri congruente.



a)



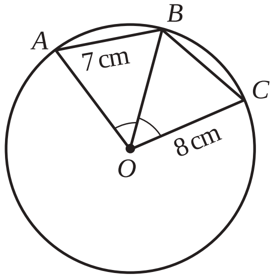
b)



c)

5. Fie triunghiurile ABC şi DEF, unde $\angle A \equiv \angle D$, $[AB] \equiv [DE]$. Scrieți încă o relație între elementele triunghiurilor, astfel încât ele să fie congruente conform criteriului:
a) LUL; b) ULU.

6. Examinați desenul şi aflați lungimile segmentelor AO, BO şi BC, dacă O este centrul cercului.



7. Construiți un triunghi cu laturile de:
a) 6 cm, 7 cm, 8 cm; b) 5 cm, 3 cm, 6 cm.

8. Construiți un triunghi cu două laturi de:
a) 3 cm şi 4 cm şi unghiul format de ele de 45°;
b) 5 cm şi 6 cm şi unghiul format de ele de 120°.

9. Construiți un triunghi:
a) cu o latură de 4 cm şi unghiurile alăturate ei de 30° şi 50°;
b) cu o latură de 6 cm şi unghiurile alăturate ei de 25° şi 60°.

10. Punctul M este mijlocul laturii AB a triunghiului ABC şi $CM \perp AB$. Aflați AC, dacă $BC = 8$ cm.

11. $[EH]$ este bisectoare şi înălțime a triunghiului DEF.
Aflați $m(\angle D)$, dacă $m(\angle F) = 40°$.

---

12. Construiți un triunghi echilateral cu perimetrul de 15 cm.

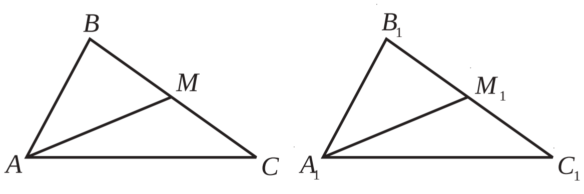
13. Construiți un triunghi isoscel cu baza de 5 cm şi perimetrul de 17 cm.

14. Se poate oare construi un triunghi cu laturile de:
a) 2 cm, 3 cm, 5 cm; b) 3 cm, 7 cm, 3 cm?
Justificați.

15. Segmentele AB şi CD se intersectează în punctul O, care este mijlocul fiecărui segment. Aflați AC şi BC, dacă $AD = 10$ cm, $BD = 9$ cm.

---

16. Examinați desenul.
$[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $[AM] \equiv [A_1M_1]$ şi $[AM]$, $[A_1M_1]$ sunt mediane ale triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$. Demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

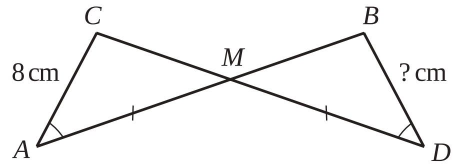


17. Demonstrați că diagonalele rombului se includ în bisectoarele unghiurilor rombului.

18. Unghiurile unui triunghi sunt respectiv congruente cu unghiurile altui triunghi şi două laturi ale primului triunghi sunt congruente cu două laturi ale triunghiului al doilea. Putem afirma că triunghiurile sunt congruente?

§4. Metoda triunghiurilor congruente

1 Segmentele AB şi CD se intersectează în punctul M, astfel încât $AM = DM$, $AC = 8$ cm şi $m(\angle CAM) = m(\angle BDM)$. Să se afle lungimea segmentului BD.



Explicăm

Examinăm triunghiurile AMC şi DMB.

$[AM] \equiv [DM]$.

$\angle CAM \equiv$ ....

Unghiurile AMC şi ...... sunt opuse la vârf. Prin urmare, $\angle AMC \equiv$ ....

Aplicând criteriul ULU, putem afirma că $\Delta AMC \equiv$ .... Prin urmare, $[AC] \equiv$ ...... şi $BD =$ ...... cm.

Răspuns: $BD =$ ...... cm.

La rezolvarea problemei am aplicat *metoda triunghiurilor congruente*.

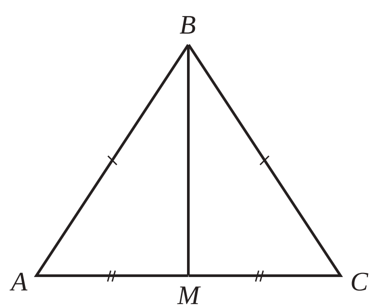
Metoda triunghiurilor congruente se foloseşte pentru a demonstra că două segmente sau două unghiuri sunt congruente. Pentru a realiza demonstrația:
- cele două segmente (sau unghiuri) se încadrează în două triunghiuri a căror congruență poate fi demonstrată cu ajutorul criteriilor LUL, ULU, LLL;
- se consideră că segmentele (sau unghiurile) sunt congruente dacă ele sunt elemente omoloage ale triunghiurilor în care au fost încadrate.

Model de demonstrare a unei teoreme

2 Demonstrați că mediana cuprinsă între laturile congruente ale unui triunghi isoscel este şi bisectoare a acestui triunghi.

Explicăm

① Realizăm un desen corespunzător enunțului.



② Reformulăm enunțul problemei, utilizând notațiile din desen:
„Demonstrați că mediana BM cuprinsă între laturile congruente AB şi BC ale triunghiului isoscel ABC este şi bisectoare a acestui triunghi”.

③ Pentru a evidenția ipoteza şi concluzia propoziției (teoremei), reformulăm ultimul enunț sub forma *Dacă* Ipoteza, *atunci* Concluzia.
Dacă triunghiul ABC este isoscel şi $[BM]$ este mediana cuprinsă între laturile congruente AB şi BC, *atunci* $[BM]$ este bisectoare a triunghiului ABC.

④ Evidențiem ipoteza: ... .
Evidențiem concluzia: ... .

⑤ Scriem prescurtat enunțul și demonstrația:

Ipoteză: ΔABC, $[AB]\equiv[CB]$, $M\in[AC]$, $[AM]\equiv[CM]$.

Concluzie: $\angle ABM \equiv \angle CBM$.

Demonstrație:

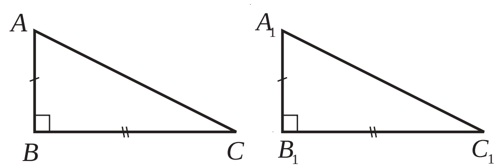
$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[CB]\text{ (din ipoteză)}\\ [AM]\equiv[CM]\text{ (din ipoteză)}\\ [BM]\text{ – latură comună}\end{array}\right\}\overset{\text{LLL}}{\Rightarrow}\Delta ABM\equiv\Delta CBM\overset{\text{def}}{\Rightarrow}\angle ABM\equiv\angle CBM\text{ (c.c.t.d.).}$$ ▶

Observație. De regulă, pașii ②–④ se realizează oral.

3 Utilizând metoda triunghiurilor congruente, să demonstrăm criteriul CC de congruență a triunghiurilor dreptunghice.

Ipoteză: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$ – dreptunghice, $[AB]\equiv[A_1B_1]$, $[BC]\equiv[B_1C_1]$.

Concluzie: $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$



Demonstrație:

① $m(\angle ABC)=m(A_1B_1C_1)=90°$. Prin urmare, $\angle ABC\equiv\angle A_1B_1C_1$. (∗)

② Conform ipotezei și relației (∗), aplicând criteriul LUL de congruență a triunghiurilor oarecare, obținem $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$ (c.c.t.d.). ▶

• Demonstrați similar criteriul CU de congruență a triunghiurilor dreptunghice.

Exerciții și probleme

1. Examinați figura 1 și calculați AD, DC și BD, dacă $AB=9$ cm, $BC=6$ cm, $DE=3$ cm.

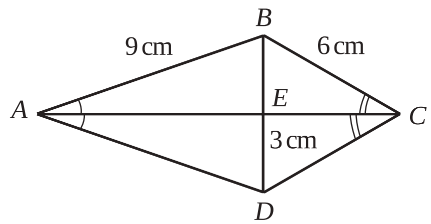


Fig. 1

2. Fie $[AM]$ o mediană a triunghiului ABC și $D\in[AM$, astfel încât $AM=MD$. Aflați BD și CD, dacă $AB=5$ cm, $AC=6$ cm.

3. Examinați figura 2 și precizați celelalte perechi de segmente congruente.

4. Segmentul BD este mediana corespunzătoare bazei triunghiului isoscel ABC. Aflați BD, dacă perimetrele triunghiurilor ABC și ABD sunt, respectiv, de 48 cm și 36 cm.

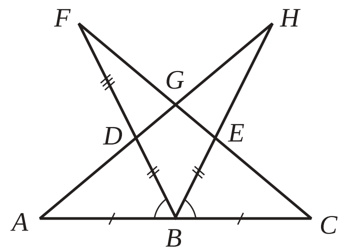


Fig. 2

5. Examinați figura 3. Demonstrați că $[AM]$ este o bisectoare a triunghiului ABC.

6. Examinați figura 4 și aflați măsura unghiului ACD.

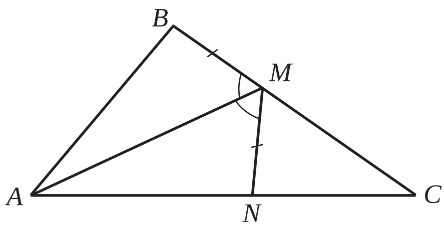


Fig. 3

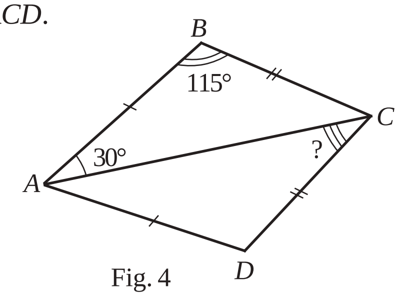


Fig. 4

7. Fie triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, unde $\angle A \equiv \angle A_1$, $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $m(\angle C) = 80°$, iar unghiul C_1 este obtuz. Aflați $m(\angle C_1)$.

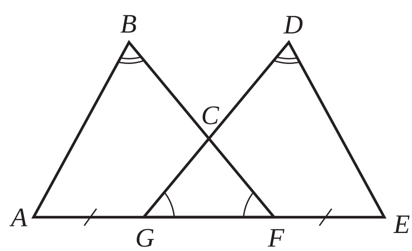


Fig. 5

8. Examinați figura 5. Demonstrați că
$\angle BAF \equiv \angle DEG$ și $[AB] \equiv [DE]$,
dacă $[AG] \equiv [FE]$, $m(\angle B) = m(\angle D)$,
$m(\angle CGF) = m(\angle CFG)$.

9. Examinați figura 6. Aflați AB, dacă $DE = 7$ cm.
Indicație. Cercetați triunghiurile ABE și ADE.

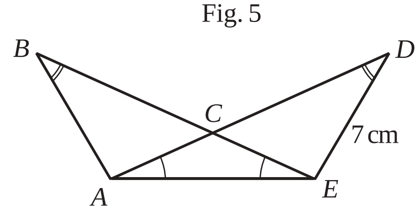


Fig. 6

10. Examinați figura 7. Aflați BE, dacă $FC = 10$ cm.
Indicație. Cercetați triunghiurile ABE și AFC.

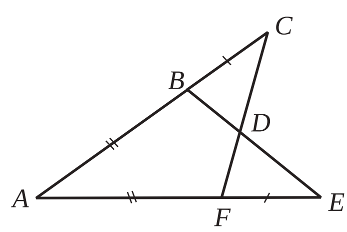


Fig. 7

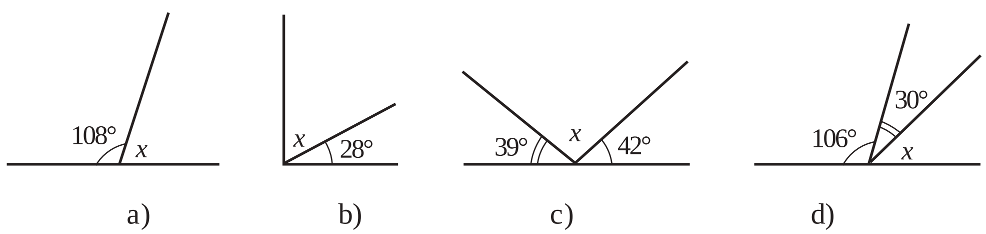
11. Cercurile de centrele O şi O_1 se intersectează în punctele A şi B. Demonstrați că dreptele AB şi OO_1 sunt perpendiculare.

12. Demonstrați că lungimea laturii oricărui triunghi este mai mică decât semiperimetrul triunghiului.

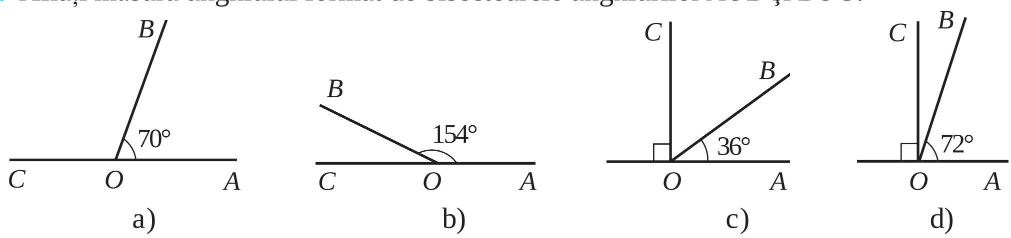
13. Punctul D aparține interiorului triunghiului ABC.
Demonstrați că $m(\angle A) < m(\angle ADC)$.

Exerciții și probleme recapitulative

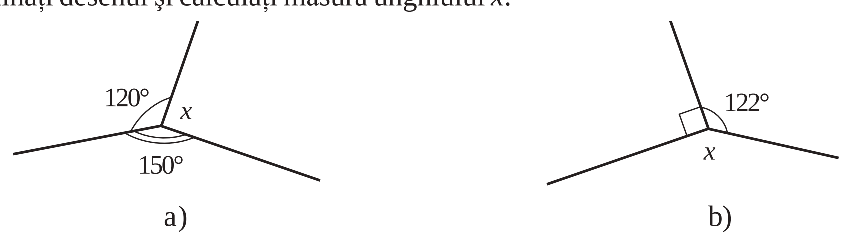
1. Examinați desenul şi calculați măsura unghiului x.



2. Aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOB şi BOC.



3. Examinați desenul şi calculați măsura unghiului x:



4. Suma măsurilor a două unghiuri opuse la vârf A şi B este egală cu 150°. Aflați $m(\angle A)$ şi $m(\angle B)$.

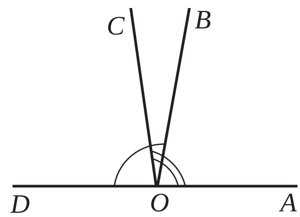
5. Diferența măsurilor a două unghiuri complementare este egală cu 50°. Aflați măsurile unghiurilor.

6. Aflați măsurile a două unghiuri suplementare, dacă diferența lor este egală cu $70°$.

7. Calculați:

a) $81°42' + 32°59'$;
b) $100°20' - 27°34'$;
c) $47°24'39'' + 19°25'44''$;
d) $116°21'5'' - 68°7'28''$.

8. Aflați măsurile unghiurilor formate de bisectoarea unui unghi de $17°34'12''$ cu laturile acestui unghi.



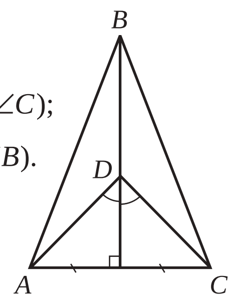
9. Aflați măsura unghiului BOC, dacă $m(\angle AOC) = 98°$, $m(\angle BOD) = 100°$ și $O \in DA$.

10. Calculați perimetrul unui triunghi:

a) echilateral cu latura de 11 cm;
b) isoscel cu o latură de 19 cm și alta de 8 cm;
c) scalen ale cărui laturi au lungimile numere naturale consecutive, cea mai lungă fiind de 10 cm;
d) dreptunghic cu laturile de 5 cm, 12 cm și 13 cm.

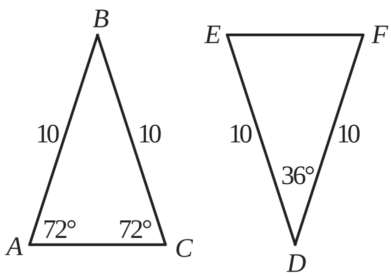
11. Aflați măsura unghiului B al triunghiului ABC, dacă:

a) $m(\angle A) = m(\angle C) = 50°$;
b) $m(\angle A) = 2m(\angle B) = m(\angle C)$;
c) $m(\angle A) = \frac{1}{2}m(\angle B) = m(\angle C)$;
d) $m(\angle A) + m(\angle C) = m(\angle B)$.

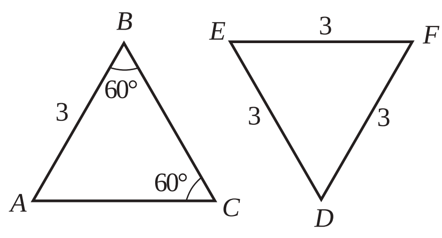


12. Examinați desenul și scrieți perechile de segmente congruente.

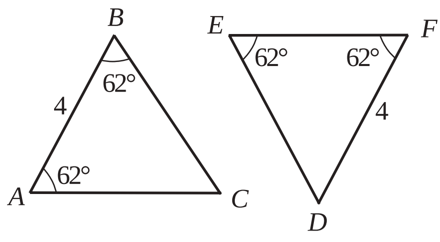
13. Examinați desenul și stabiliți dacă triunghiurile sunt congruente.



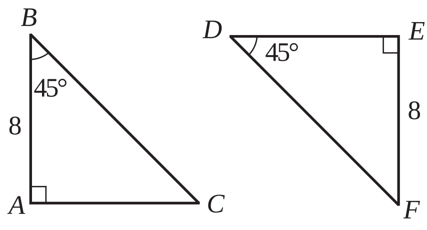
a)



b)



c)



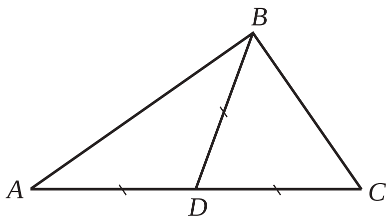
d)

14. Construiți un triunghi cu laturile de 5 cm, 6 cm, 8 cm.

15. Construiți un triunghi cu o latură de 5 cm, alta de 7 cm şi unghiul format de ele de 140°.

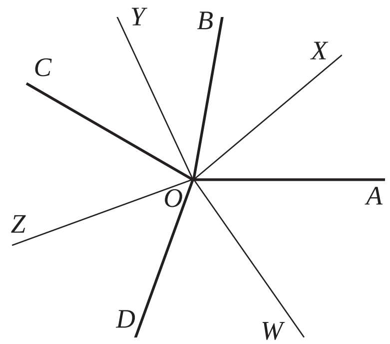
16. Construiți un triunghi cu o latură de 7 cm şi unghiurile alăturate ei de 45° şi 55°.

17. Fie triunghiul ABC şi $D \in [AC]$, astfel încât $[AD] \equiv [BD] \equiv [CD]$.
Demonstrați că $m(\angle ABC) = 90°$.

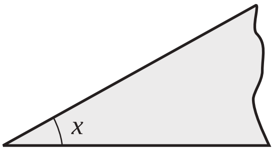


18. 10 drepte sunt concurente într-un punct. Demonstrați că cel puțin unul dintre unghiurile formate are măsura mai mică decât 20°.

19. Dintr-un punct O au fost construite 4 semidrepte $[OA$, $[OB$, $[OC$ şi $[OD$. Semidreptele $[OX$, $[OY$, $[OZ$ şi $[OW$ sunt bisectoarele unghiurilor AOB, BOC, COD şi, respectiv, DOA. Demonstrați că printre unghiurile XOY, YOZ, ZOW, WOX sunt două perechi de unghiuri suplementare.



20. Desenul reprezintă imaginea unui obiect cu ajutorul căruia se poate construi un unghi de $x°$. Cum se poate construi cu ajutorul acestui obiect un unghi de:
a) 9°, dacă $x = 19°$;
b) 4°, dacă $x = 23°$;
c) 3°, dacă $x = 31°$;
d) 19°, dacă $x = 38°$?



21. Calculați măsura unghiului format de acele ceasornicului la ora:
a) 2 şi 20 de minute; b) 1 şi 15 minute.

22. Două cercuri cu razele de 3 cm şi 5 cm se intersectează în două puncte. Demonstrați că distanța dintre centrele lor nu este mai mică de 2 cm şi nu este mai mare de 8 cm.

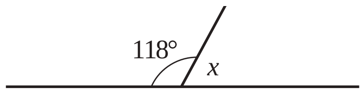
Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 minute

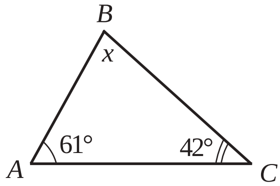
Varianta 1

2 p **1.** Aflați măsura unghiului notat cu x:

a)



b)



2 p **2.** Aflați măsurile complementului și suplementului unghiului A, dacă:

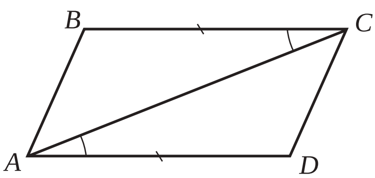
$$m(\angle A) = 36°.$$

2 p **3.** Calculați:

a) $48°36' + 25°31'$;

b) $80° - 34°25'$.

2 p **4.** Scrieți triunghiurile congruente:

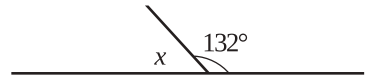


2 p **5.** Lungimile laturilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 4, 5, 6. Aflați aceste lungimi, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 45 cm.

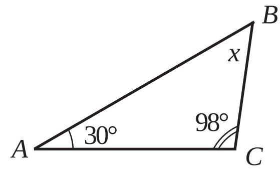
Varianta 2

1. Aflați măsura unghiului notat cu x:

a)



b)



2. Aflați măsurile complementului și suplementului unghiului A, dacă:

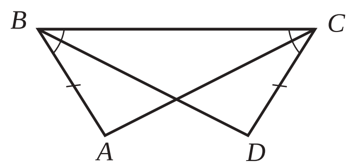
$$m(\angle A) = 28°.$$

3. Calculați:

a) $37°46' + 24°22'$;

b) $90° - 36°27'$.

4. Scrieți triunghiurile congruente:



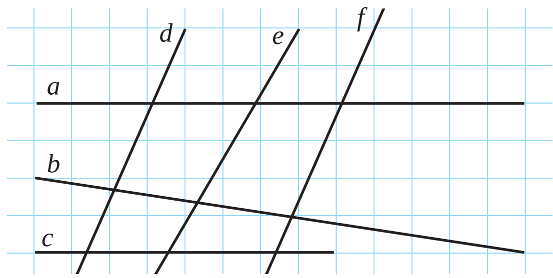
5. Lungimile laturilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 3, 4, 5. Aflați aceste lungimi, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 48 cm.

CAPITOLUL 3 Paralelism şi perpendicularitate

§1. Drepte paralele

1.1. Drepte paralele

1 Examinați desenul. Observați poziția relativă a dreptelor şi completați.



a) Dreptele *a* şi *b* sunt ______, deoarece ______.

b) Dreptele *d* şi *c* sunt ______, deoarece ______.

c) Dreptele *a* şi *c* sunt ______, deoarece ______.

d) Dreptele *e* şi *f* sunt ______, deoarece ______.

Observație. Evident, concluzia că două drepte date sunt sau nu paralele trebuie argumentată matematic riguros. Cu acest scop, ulterior vom studia criteriile de paralelism a două drepte.

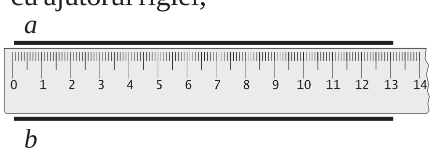
Definiție. Două **drepte** se numesc **paralele** dacă ele sunt situate în acelaşi plan şi nu au puncte comune sau coincid.

Notăm: $a \parallel b$. *Citim*: Dreptele *a* şi *b* sunt paralele.

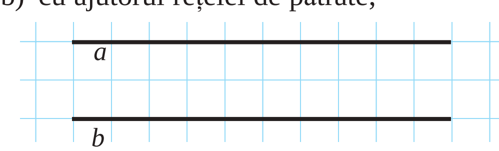
Dacă dreptele *a* şi *b* nu sunt paralele, notăm $a \nparallel b$.

• Putem construi drepte paralele:

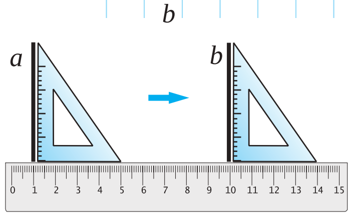
a) cu ajutorul riglei;



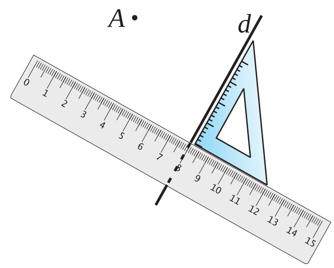
b) cu ajutorul rețelei de pătrate;



c) cu ajutorul riglei şi echerului.



2 Examinați imaginea și explicați cum se poate construi o dreaptă paralelă cu dreapta d, care va conține punctul A. Câte astfel de drepte se pot construi?



Axioma paralelelor (sau **axioma lui Euclid**)

Prin orice punct exterior unei drepte se poate construi o unică dreaptă paralelă cu dreapta dată.

• Luând în considerare că două puncte diferite determină o unică dreaptă, stabiliți câte perechi de drepte paralele pot fi construite, astfel încât orice pereche să conțină trei puncte necoliniare date.

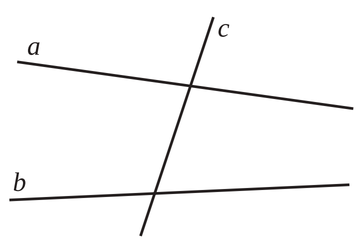
3 Aplicând metoda reducerii la absurd și axioma paralelelor, demonstrați următoarea teoremă.

Teoremă (tranzitivitatea relației de paralelism)
Dacă două drepte sunt paralele cu a treia dreaptă, atunci ele sunt paralele:
dacă $a \parallel c$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel b$.

• Completați și argumentați:
Dacă $a \parallel b$ și $a \cap c = \{M\}$, atunci dreptele b și c sunt ________.

1.2. Criterii de paralelism al dreptelor

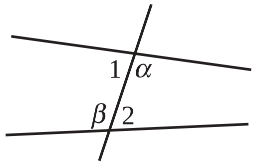
1 a) Câte unghiuri formează dreapta c cu dreptele a și b?
b) Câte perechi de unghiuri congruente observați în desen?
c) Câte perechi de unghiuri suplementare observați în desen?



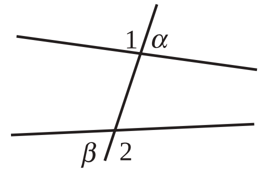
Definiție. Dreapta care intersectează două drepte coplanare se numește **secantă**.

Dreapta c din desen este secantă, deoarece intersectează dreptele a și b.

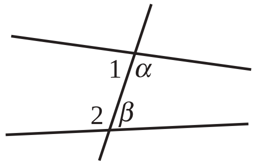
Două drepte formează cu o secantă 8 unghiuri.



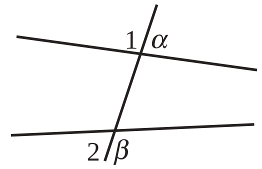
Unghiuri **alterne interne** $(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



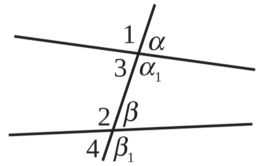
Unghiuri **alterne externe** $(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



Unghiuri **interne de aceeaşi parte a secantei** $(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



Unghiuri **externe de aceeaşi parte a secantei** $(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



Unghiuri **corespondente** $(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle\alpha_1, \angle\beta_1)$; $(\angle 1, \angle 2)$; $(\angle 3, \angle 4)$.

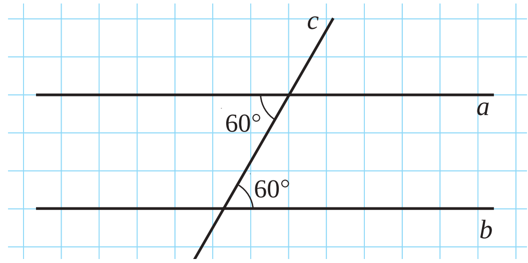
2 Unghiurile alterne interne din desen sunt congruente şi au măsura de 60°. Calculaţi:

a) măsurile unghiurilor alterne externe;

b) suma măsurilor unghiurilor interne de aceeaşi parte a secantei;

c) suma măsurilor unghiurilor externe de aceeaşi parte a secantei;

d) măsurile unghiurilor corespondente.



Teorema 1

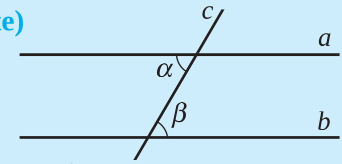
Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci:

1) celelalte două unghiuri alterne interne sunt congruente;
2) unghiurile alterne externe sunt congruente;
3) unghiurile interne de aceeaşi parte a secantei sunt suplementare;
4) unghiurile externe de aceeaşi parte a secantei sunt suplementare;
5) unghiurile corespondente sunt congruente.

Observație. Schimbând locurile ipotezei şi ale oricărei condiții din concluzia teoremei 1, obținem de asemenea o propoziție adevărată, adică o nouă teoremă.

Teorema 2 (Criteriul de paralelism a două drepte)

Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri <u>alterne interne congruente</u>, atunci dreptele sunt paralele.



$$\angle\alpha \equiv \angle\beta \Rightarrow a \parallel b$$

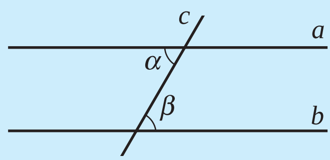
• Demonstrați teorema 2 prin metoda reducerii la absurd.

Observații. **1.** În baza teoremei 1, condiția subliniată din teorema 2 poate fi substituită cu oricare din condițiile 2)–5) ale teoremei 1, obținându-se astfel alte 4 criterii de paralelism a două drepte. Formulați-le.

2. Reciprocele criteriilor de paralelism de asemenea sunt teoreme. Teorema 3 este reciproca teoremei 2. Formulați reciprocele celorlalte criterii.

Teorema 3 (reciproca teoremei 2)

Două drepte paralele formează cu o secantă unghiuri alterne interne congruente.

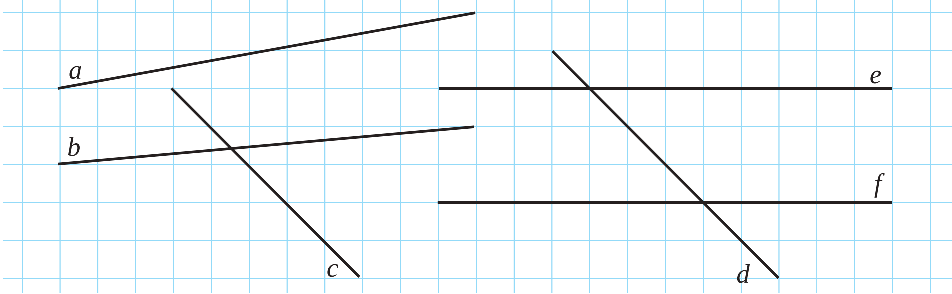


$$a \parallel b \Rightarrow \angle\alpha \equiv \angle\beta$$

• Fie date o dreaptă *a* şi un punct *M* care nu aparține dreptei *a*. Cu ajutorul riglei şi raportorului, construiți o dreaptă *b* paralelă cu dreapta *a*, care va conține punctul *M*.

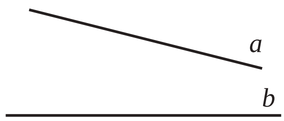
Exerciții și probleme

1. Examinați desenul şi determinați perechile de drepte:
a) paralele; b) concurente.

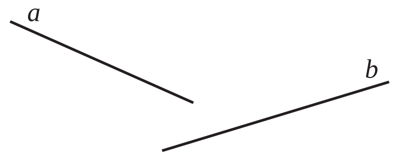


2. Construiți pe caiet cu ajutorul riglei: a) două drepte orizontale;
b) două drepte oblice paralele; c) două drepte concurente oblice.

3. Utilizând raportorul şi echerul, aflaţi măsura unghiului mai mic format la intersecţia dreptelor *a* şi *b* din desen:



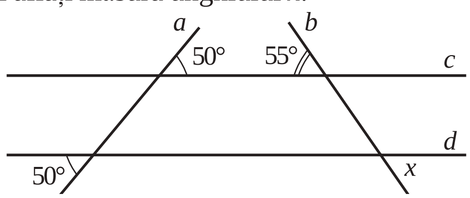
a)



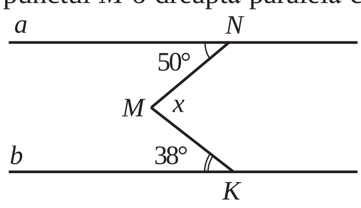
b)

4. În câte regiuni disjuncte împart planul trei drepte secante două câte două?

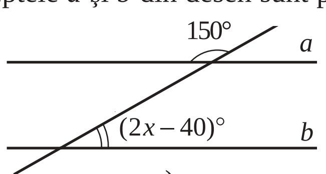
5. Examinaţi desenul şi aflaţi măsura unghiului x.



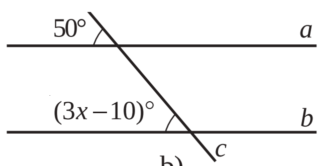
6. Dreptele *a* şi *b* sunt paralele. Calculaţi măsura unghiului x.
Indicaţie. Construiţi prin punctul M o dreaptă paralelă cu dreptele *a* şi *b*.



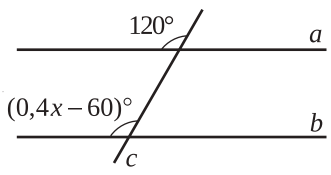
7. Dreptele *a* şi *b* din desen sunt paralele. Calculaţi valoarea lui x.



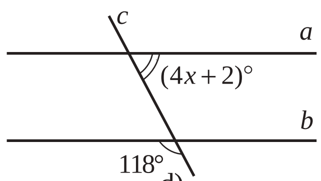
a)



b)

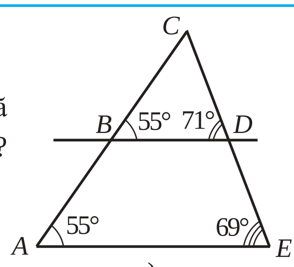


c)

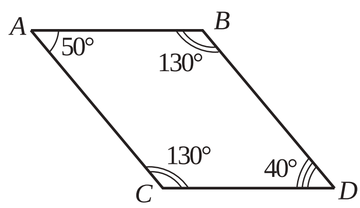


d)

8. Cum se poate argumenta că datele din desen sunt greşite?



a)

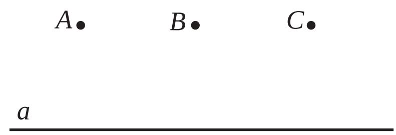


b)

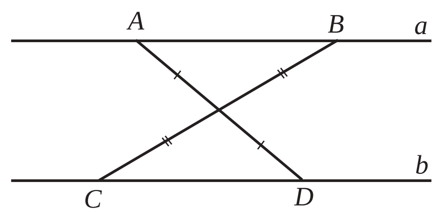
9. Fie punctele $A(3; 0)$, $B(0; 2)$, $C(6; 0)$. Determinați coordonatele a două puncte M şi N, astfel încât $MN \parallel AB$ şi M, N, C sunt puncte coliniare.

10. Suma măsurilor a 6 din cele 8 unghiuri formate de o secantă cu două drepte paralele este 636°. Calculați măsurile celor 8 unghiuri.

11. Punctele A, B, C nu aparțin dreptei a, $AB \parallel a$ şi $BC \parallel a$. Demonstrați prin metoda reducerii la absurd că punctele A, B, C sunt coliniare.

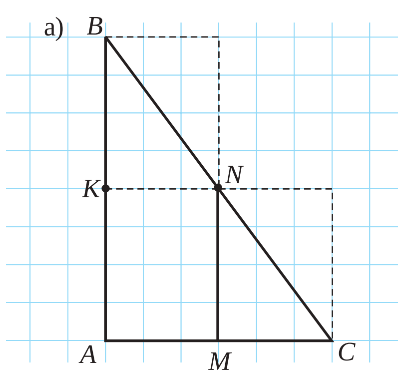


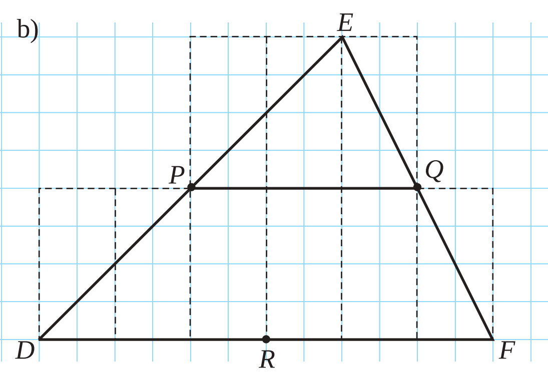
12. Demonstrați că dreptele a şi b din desen sunt paralele.



§2. Linia mijlocie a triunghiului

Examinați desenul şi completați adecvat.





a) Punctul M este ______ laturii AC.
Punctul N este ______ laturii BC.
Dreptele MN şi AB sunt ______.
$\frac{AB}{MN} =$ ______.

b) Punctul P este ______ laturii DE.
Punctul Q este ______ laturii EF.
Dreptele PQ şi DF sunt ______.
$\frac{DF}{PQ} =$ ______.

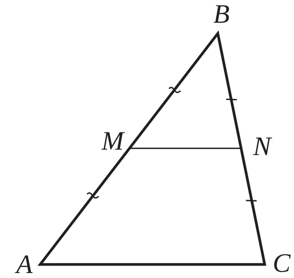
Definiție. Segmentul ce uneşte mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numeşte **linie mijlocie** a triunghiului.

De exemplu, în desen, [MN] este o linie mijlocie a triunghiului ABC, iar [PQ] este o linie mijlocie a triunghiului DEF.

• Punctul K este mijlocul laturii AB, iar punctul R – mijlocul laturii DF. Ce relație există între segmentele KN şi AC? Dar între segmentele QR şi DE?

Teorema 1

Linia mijlocie a unui triunghi este paralelă cu o latură a triunghiului şi are lungimea de două ori mai mică decât lungimea acestei laturi.



Să demonstrăm teorema 1.

Ipoteză: ΔABC, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $[MN]$ este linie mijlocie a triunghiului ABC.

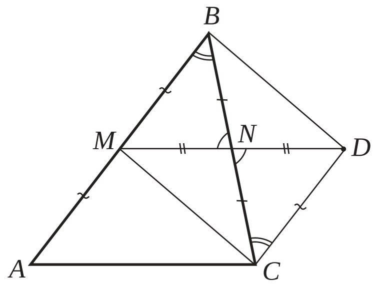
Concluzie: 1) $MN \parallel AC$; 2) $AC = 2MN$.

Demonstrație:

① Construim pe dreapta MN punctul D, astfel încât $ND = MN$.

② Examinăm ΔBNM şi ΔCND:
$[BN] \equiv [CN]$ (conform ipotezei),
$[NM] \equiv [ND]$ (conform construcției),
$\angle BNM \equiv \angle CND$ (unghiuri opuse la vârf).
Conform criteriului LUL, $\Delta BNM \equiv \Delta CND$.
Prin urmare,
$\angle MBN \equiv \angle DCN$ şi $[BM] \equiv [DC]$.

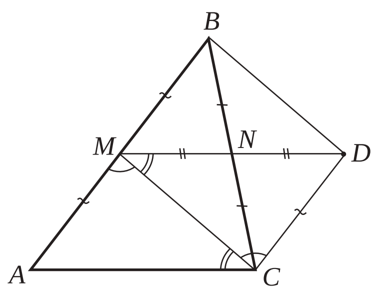
③ Examinăm dreptele MB şi CD, intersectate de secanta BC.
Conform criteriului de paralelism, $MB \parallel CD$ (unghiurile MBN şi DCN sunt alterne interne congruente).



①–③

④ Dreptele paralele MB şi CD formează cu secanta MC unghiurile alterne interne congruente AMC şi DCM.

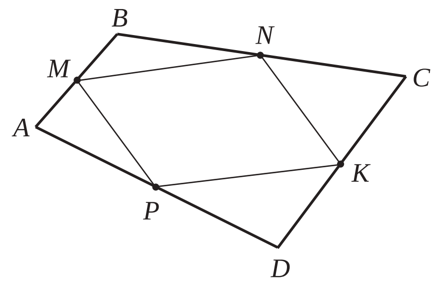
⑤ Conform criteriului LUL, $\Delta AMC \equiv \Delta DCM$.
Prin urmare, $[AC] \equiv [MD]$. Cum $MD = 2MN$ şi $MD = AC$, obținem $AC = 2MN$.
Avem $MN \parallel AC$, deoarece dreptele MN şi AC formează cu secanta MC unghiurile alterne interne congruente DMC şi ACM, c.c.t.d. ▶



④, ⑤

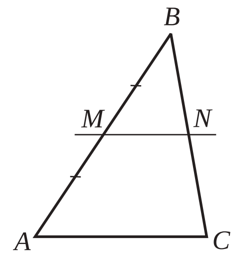
• Punctele M, N, K, P sunt mijloacele laturilor patrulaterului $ABCD$.

Aplicând proprietatea liniei mijlocii într-un triunghi şi tranzitivitatea relaţiei de paralelism a două drepte, demonstraţi că $MN \parallel PK$ şi $MP \parallel NK$.



Teorema 2 (reciproca teoremei 1)

Paralela dusă prin mijlocul unei laturi la o altă latură a triunghiului trece prin mijlocul laturii a treia.



Ipoteză: ΔABC, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $AM = MB$, $MN \parallel AC$.

Concluzie: $BN = NC$.

• Demonstraţi teorema 2 aplicând metoda reducerii la absurd.

Exerciţii şi probleme

1. Calculaţi lungimile liniilor mijlocii ale triunghiului cu laturile de:

a) 3 cm, 4 cm, 5 cm; b) $\frac{5}{8}$ cm, $\frac{6}{7}$ cm, $\frac{4}{5}$ cm;

c) $\sqrt{12}$ cm, $\sqrt{10}$ cm, $\sqrt{14}$ cm; d) $2,(4)$ cm, $3,(6)$ cm, $1,(8)$ cm.

2. Calculaţi perimetrul unui triunghi, dacă liniile mijlocii ale acestuia au lungimile de:

a) $4\frac{1}{3}$ cm, $4\frac{4}{9}$ cm, $3\frac{1}{6}$ cm;

b) $2\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{3}$ cm, $4\sqrt{3}$ cm;

c) $2,(4)$ cm, $2,(6)$ cm, $2,(3)$ cm.

3. O linie mijlocie a triunghiului ABC formează cu laturile lui unghiuri de 45° şi 60°. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului.

4. Segmentul MN este o linie mijlocie a triunghiului ABC, astfel încât $MN \parallel AC$. Calculaţi perimetrul triunghiului BMN, dacă perimetrul triunghiului ABC este egal cu $4\sqrt{7}$ cm.

5. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele AD şi BC. Punctele M şi N sunt mijloacele laturilor AB şi, respectiv, DC. Demonstraţi că $MN \parallel AD$ şi $MN \parallel BC$.

6. Lungimea liniei mijlocii a unui triunghi isoscel, care uneşte mijloacele laturilor congruente, este egală cu 6 cm. Aflaţi lungimile laturilor triunghiului, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 40 cm.

7. Linia mijlocie a unui triunghi isoscel, care nu este paralelă cu baza, are lungimea de 5 cm. Aflaţi lungimile laturilor triunghiului, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 32 cm.

8. Punctele A, B, C, D sunt mijloacele laturilor patrulaterului $MNKP$. Aflaţi lungimile laturilor patrulaterului $ABCD$, dacă $MK = 10$ cm, $NP = 12$ cm.

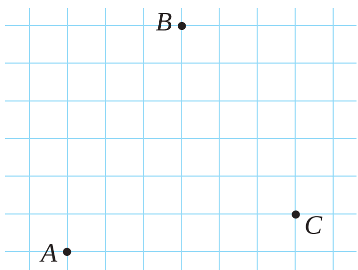
9. Fie $[MN]$ linie mijlocie a triunghiului ABC, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$. Aflaţi lungimile celorlalte două laturi ale triunghiului, dacă:
a) $AB = 8$ cm, $MN = 4{,}5$ cm şi perimetrul triunghiului ABC este egal cu 27 cm;
b) $BC = 11$ cm, $MN = 5{,}4$ cm şi perimetrul triunghiului ABC este egal cu 30 cm;
c) $AB = 4\sqrt{5}$ cm, $MN = 3\sqrt{5}$ cm şi perimetrul triunghiului ABC este egal cu $15\sqrt{5}$ cm;
d) $BC = 9,(4)$ cm, $MN = 5,(2)$ cm şi perimetrul triunghiului ABC este egal cu $28,(6)$ cm.

10. Lungimea liniei mijlocii a unui triunghi echilateral este egală cu 3,(7) cm. Aflaţi perimetrul triunghiului.

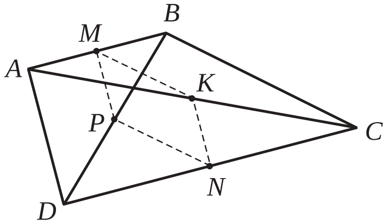
11. Punctele M, N, K sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC. Aflaţi perimetrul triunghiului, dacă $MN + MK = 9{,}3$ cm, $MN + NK = 10{,}1$ cm, $MK + NK = 9{,}8$ cm.

12. Demonstraţi că liniile mijlocii ale unui triunghi îl împart în 4 triunghiuri congruente.

13. Punctele A, B, C din desen sunt mijloacele laturilor triunghiului MNK. Copiaţi şi „restabiliţi” triunghiul MNK cu ajutorul riglei şi al echerului.



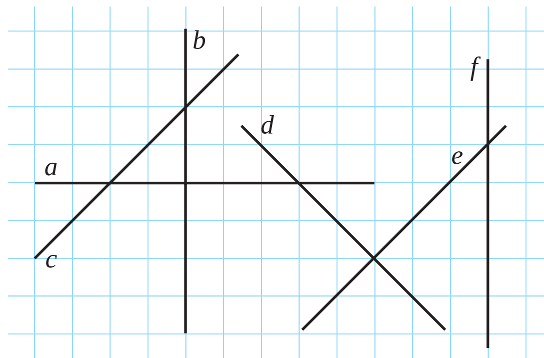
14. Examinaţi desenul. M şi N sunt mijloacele laturilor AB şi CD, iar P şi K – mijloacele diagonalelor BD şi AC, respectiv ale patrulaterului $ABCD$. Demonstraţi că $MP \parallel KN$ şi $MK \parallel PN$.



§ 3. Drepte perpendiculare. Mediatoarea segmentului

3.1. Drepte perpendiculare. Distanța de la un punct la o dreaptă

1 Examinați desenul. Precizați perechile de drepte perpendiculare.



• Care este poziția relativă a două drepte x și y, dacă fiecare dintre ele este perpendiculară pe o dreaptă z?

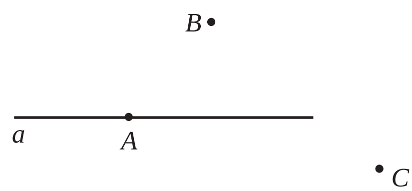
2 Putem construi cu rigla și echerul o dreaptă perpendiculară pe dreapta a din desen, care conține:

a) punctul A;

b) punctul B;

c) punctul C?

Justificați.



• Care drepte se numesc perpendiculare?

• Cum se scrie, utilizând simbolurile matematice, propoziția: „Dreptele a și b sunt perpendiculare”?

Teoremă

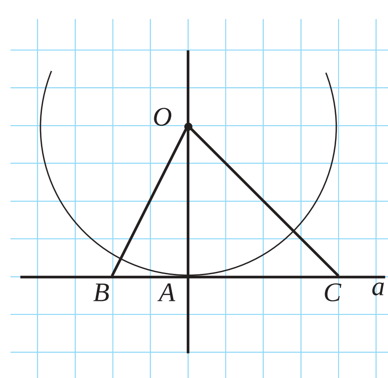
Prin orice punct care aparține sau nu unei drepte se poate construi o unică dreaptă perpendiculară pe dreapta dată.

3 Examinați desenul și completați.

Dreapta OA este perpendiculară pe dreapta ____.

Ordonând crescător lungimile segmentelor OA, OB, OC, obținem: ____ $< OB <$ ____.

Conform definiției distanței dintre două figuri, observăm că distanța dintre punctul O și dreapta a este egală cu lungimea segmentului ____.



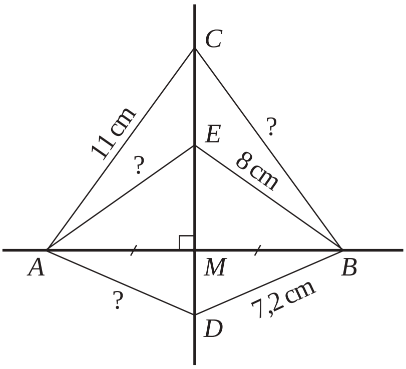
Definiții.

- Punctul în care perpendiculara pe dreapta a, dusă din punctul O, intersectează dreapta a se numeşte **piciorul perpendicularei** duse din punctul O pe dreapta a, sau **proiecția ortogonală a punctului** O pe dreapta a.
- Dreapta determinată de punctul O şi de orice punct al dreptei a, diferit de proiecția ortogonală a punctului O pe a, se numeşte **oblică** la dreapta a.
- **Distanța de la punctul O la dreapta a** este lungimea segmentului determinat de punctul O şi de proiecția ortogonală a acestuia pe dreapta a.

În desenul problemei **3**, punctul A este proiecția ortogonală a punctului O pe dreapta a, dreptele OB şi OC sunt oblice, iar OA este distanța de la punctul O la dreapta a.

3.2. Mediatoarea segmentului

1 Dreptele AB şi CD, din desen, sunt perpendiculare şi punctul M este mijlocul segmentului AB.
Precizați perechile de triunghiuri dreptunghice congruente.
Aflați lungimea segmentelor BC, AE şi AD.
Trageți concluzia.



Definiție. **Mediatoarea unui segment** este dreapta care trece prin mijlocul segmentului şi este perpendiculară pe el.

În desen, dreapta CD este mediatoarea segmentului AB.

Teoremă

Punctele mediatoarei unui segment sunt egal depărtate de extremitățile acestuia.

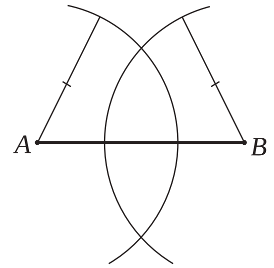
• Reciproca acestei teoreme este de asemenea teoremă. Formulați reciproca şi demonstrați ambele teoreme.

Observație. Conform teoremei despre punctele mediatoarei unui segment şi reciprocei ei, un punct este egal depărtat de extremitățile unui segment dacă şi numai dacă aparține mediatoarei segmentului.

2 Cum se poate construi cu ajutorul riglei şi al compasului mediatoarea unui segment dat?

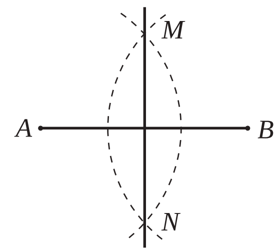
Explicăm

Considerăm segmentul AB.



① Fixăm piciorul compasului în punctul A şi construim un semicerc a cărui rază este mai mare decât $\frac{AB}{2}$.

② Păstrând aceeaşi deschidere a compasului, fixăm piciorul lui în punctul B şi construim alt semicerc.

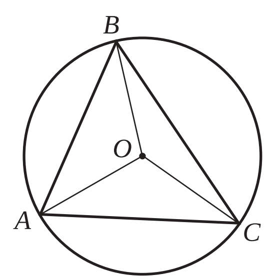


③ Punctele de intersecție a semicercurilor determină mediatoarea segmentului AB.

• Demonstrați că dreapta MN astfel construită este într-adevăr mediatoarea segmentului AB.

• De ce raza semicercurilor trebuie să fie mai mare decât $\frac{AB}{2}$?

3 Examinați desenul. Cum este situat centrul O al cercului față de punctele A şi B? Dar față de A şi C? De B şi C?
Trageți concluzia.



Explicăm

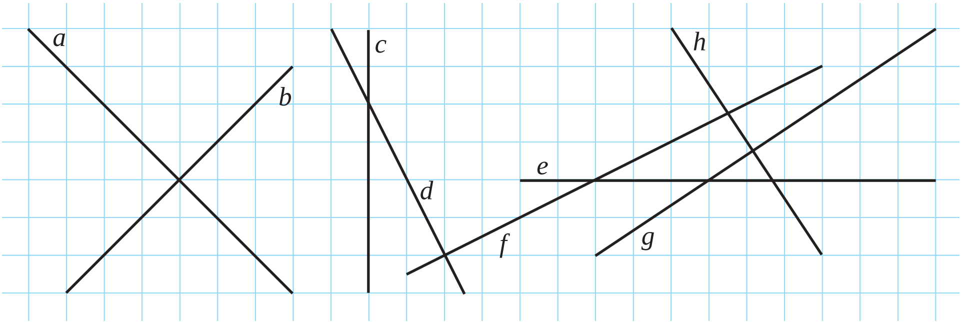
Punctul O este egal depărtat de punctele A şi B, deoarece AO şi OB sunt ______ ale cercului. Prin urmare, punctul O aparține ______ segmentului AB.

Acelaşi lucru se poate spune şi despre poziția punctului O față de punctele A şi C (respectiv B şi C).

Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente.
Punctul lor de intersecție este egal depărtat de vârfurile triunghiului.

Exerciții și probleme

1. Examinați desenul şi cu ajutorul instrumentelor geometrice stabiliți perechile de drepte perpendiculare.



2. Punctul M aparține mediatoarei segmentului AB. Aflați:

a) AM, dacă $BM = 8$ cm; b) BM, dacă $AM = \sqrt{10}$ cm;

c) AM, dacă $AM + BM = 21$ cm; d) BM, dacă $3AM = 17$ cm.

3. Punctul M_1 este proiecția ortogonală a punctului $M\ (a, b)$ pe axa absciselor a unui sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele punctului M_1, dacă:

a) $a = \sqrt{3},\ b = -\frac{5}{12}$; b) $a = \frac{1}{9},\ b = -\frac{1}{5}$;

c) $a = 2,(5),\ b = 1,(4)$; d) $a = 0,\ b = -2$.

4. Punctul M_1 este proiecția ortogonală a punctului $M(a, b)$ pe axa ordonatelor a unui sistem de axe ortogonale. Aflați MM_1, dacă:

a) $a = 3,\ b = -7$; b) $a = -2,\ b = \sqrt{5}$;

c) $a = b = -3,(4)$; d) $a = -5,\ b = 0$.

5. Punctele A_1 şi B_1 sunt proiecțiile ortogonale ale punctelor A şi, respectiv, B pe dreapta a (situate în semiplane diferite determinate de dreapta a), $[AA_1] \equiv [BB_1]$. Aflați:

a) AB_1, dacă $A_1B = 7$ cm; b) $m(\angle A_1AB_1)$, dacă $m(\angle B_1A_1B) = 30°$.

6. Punctele A_1 şi B_1 sunt proiecțiile ortogonale ale punctelor A şi, respectiv, B pe dreapta a (situate în acelaşi semiplan determinat de dreapta a), $[AA_1] \equiv [BB_1]$, M este mijlocul segmentului A_1B_1. Aflați:

a) $m(\angle A_1AM)$, dacă $m(\angle BMB_1) = 50°$;

b) $m(\angle AMB)$, dacă $m(\angle BMB_1) = 40°$.

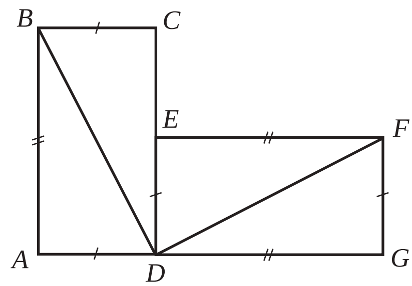
7. Fie triunghiul ABC, punctul D – mijlocul laturii BC, $E \in AD$, $[BE] \equiv [CE]$. Aflați:

a) $m(\angle BED)$, dacă $m(\angle DCE) = 42°$;

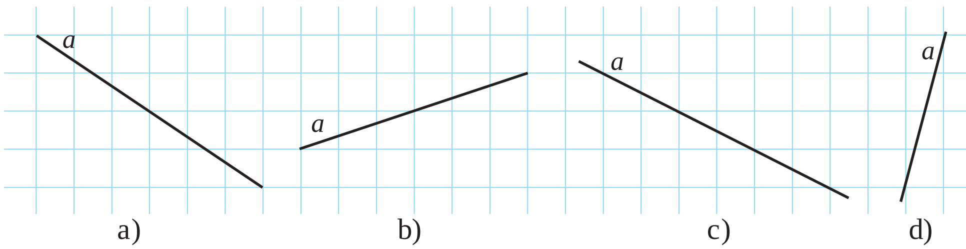
b) $m(\angle CAD)$, dacă $m(\angle ABC) = 35°$.

8. Câte perechi de drepte perpendiculare pot fi duse prin 3 puncte necoliniare?

9. Dreptunghiurile $ABCD$ şi $DEFG$ din desen sunt congruente.
Demonstraţi că $m(\angle BDF) = 90°$.

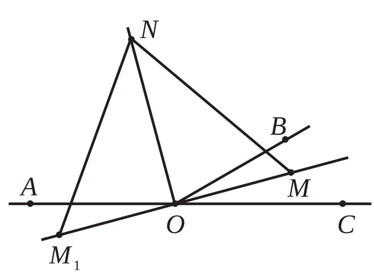


10. Utilizând rezultatul problemei precedente, reproduceţi desenul şi construiţi doar cu ajutorul riglei o dreaptă perpendiculară pe dreapta a:



11. Fie punctele $A(1; 2)$, $B(5; 6)$, $C(5; 2)$ într-un sistem de axe ortogonale. Aflaţi coordonatele:
a) proiecţiei ortogonale a punctului C pe dreapta AB;
b) proiecţiei ortogonale a punctului B pe dreapta AC;
c) proiecţiei ortogonale a punctului A pe dreapta BC.

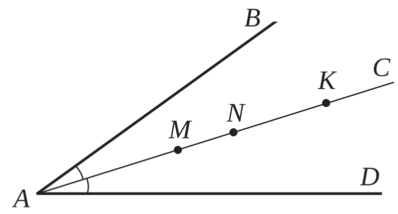
12. Punctele A, O, C sunt coliniare, $[OM$ este bisectoarea unghiului BOC, iar $[ON$ este bisectoarea unghiului AOB, $M_1 \in OM$, $[M_1O] \equiv [OM]$.
Aflaţi:
a) $m(\angle ONM_1)$, dacă $m(\angle OMN) = 55°$;
b) ON, dacă OM = 5 cm şi perimetrul triunghiului M_1NM este egal cu 24 cm, iar perimetrul triunghiului MON este egal cu 18 cm.



§ 4. Proprietățile bisectoarei unghiului

1 Examinați desenul. Semidreapta $[AC$ este bisectoarea unghiului BAD. Cu ajutorul echerului și al riglei gradate, aflați distanțele de la punctele M, N, K la laturile unghiului BAD.

- Ce observați?



Teorema 1

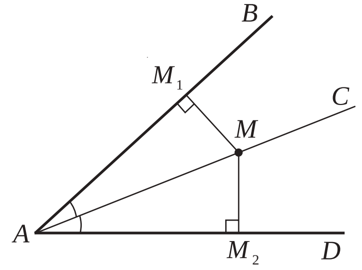
Orice punct al bisectoarei unui unghi este egal depărtat de laturile acestuia.

Să demonstrăm teorema 1.

Ipoteză: ΔBAD, $\angle BAC \equiv \angle CAD$,
$MM_1 \perp AB$, $MM_2 \perp AD$,
$M_1 \in [AB$, $M_2 \in [AD$.

Concluzie: $MM_1 = MM_2$

Demonstrație:



① $\Delta AM_1M \equiv \Delta AM_2M$ (criteriul IU).

② Prin urmare, $[MM_1] \equiv [MM_2]$, adică $MM_1 = MM_2$, c.c.t.d. ►

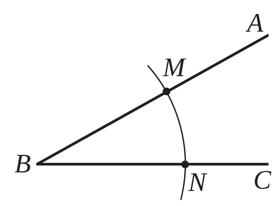
Teorema 2 (reciproca teoremei 1)

Dacă un punct situat între laturile unghiului este egal depărtat de laturile acestui unghi, atunci punctul aparține bisectoarei unghiului.

- Demonstrați teorema 2.

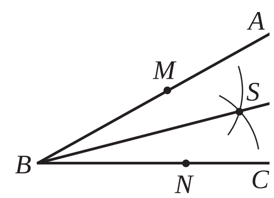
2 Cum poate fi construită bisectoarea unui unghi dat ABC cu ajutorul riglei și al compasului?

Explicăm



① Fixăm piciorul compasului în vârful unghiului și construim un cerc.
Fie M și N punctele de intersecție a cercului cu unghiul ABC.

② Fixăm piciorul compasului în punctul M și construim un cerc cu raza mai mare decât $\frac{MN}{2}$. Cu aceeași deschizătură a compasului construim un alt cerc, cu centrul în punctul N. Fie S punctul de intersecție a celor două cercuri (cuprins între laturile unghiului).

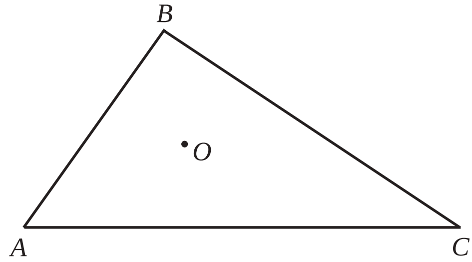


③ $[BS$ este bisectoarea unghiului ABC.

• Luând în considerare că unghiurile alăturate bazei unui triunghi isoscel sunt congruente (vom demonstra această proprietate mai târziu) şi aplicând criteriile de congruenţă şi teorema 2, demonstrați că semidreapta $[BS$ este într-adevăr bisectoarea triunghiului ABC.

• De ce raza celor două cercuri de la pasul ② trebuie să fie mai mare decât $\frac{MN}{2}$?

3 Cum poate fi construit un punct O în interiorul triunghiului ABC, egal depărtat de laturile triunghiului?

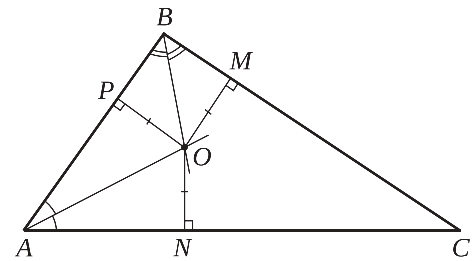


Explicăm

① Deoarece punctul O este egal depărtat de laturile AB şi AC, rezultă că punctul O aparține bisectoarei unghiului A.

② Similar, conchidem că punctul O aparține concomitent bisectoarelor unghiurilor B şi C. Prin urmare, punctul O aparține tuturor bisectoarelor unghiurilor triunghiului.

③ Este suficient să construim bisectoarele a două unghiuri ale triunghiului. Punctul lor de intersecție este punctul căutat.



Bisectoarele unghiurilor triunghiului sunt concurente într-un punct situat la aceeaşi distanță de laturile triunghiului.

Exerciții și probleme

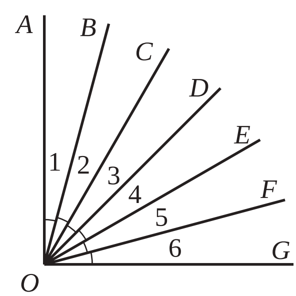
1. Unghiurile 1–6 din desen sunt congruente. Completați:

a) $[CO$ este bisectoarea unghiurilor ... .

b) Bisectoarea unghiului AOG este ... .

c) $\angle AOC \equiv ...,\quad \angle DOG \equiv ...$.

d) Dacă $m(\angle AOG) = 90°$, atunci $m(\angle BOD) = ...$.



2. Punctul X aparține bisectoarei unghiului AOB. Aflați distanța de la punctul X la semidreapta $[OB$, dacă distanța de la punctul X la semidreapta $[OA$ este egală cu:

a) $\sqrt{5}$ cm; b) 3,6 cm; c) $|\sqrt{3}-2|$ cm; d) 0,4 cm.

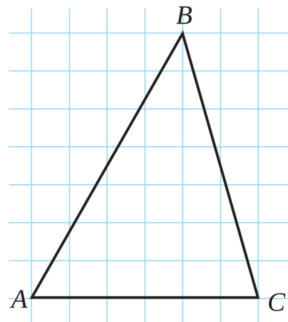
3. Punctul M este egal depărtat de laturile unghiului AOB şi aparține interiorului acestui unghi. Aflați $m(\angle AOM)$, dacă:

a) $m(\angle BOM) = 35°$;

b) $m(\angle AOB) = 80°$;

c) $m(\angle BOM) = 40°26'$;

d) $m(\angle AOB) = 17°$.



4. Reproduceți desenul şi construiți cu ajutorul riglei şi al compasului bisectoarea triunghiului ABC dusă din vârful:

a) A; b) B; c) C.

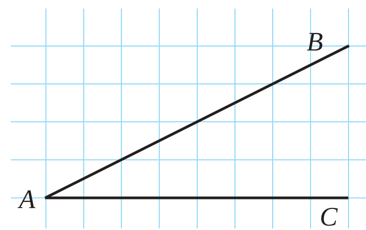
5. Punctul M aparține bisectoarei unghiului AOB, iar punctele M_1 şi M_2 sunt proiecțiile ortogonale ale punctului M pe laturile unghiului AOB. Calculați:

a) $m(\angle M_1OM)$, dacă $m(\angle OMM_2) = 42°$;

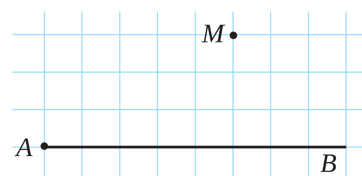
b) $m(\angle OMM_2)$, dacă $m(\angle AOB) = 70°$;

c) $m(\angle AOB)$, dacă $m(\angle OMM_1) = 65°$;

d) $m(\angle AOB)$, dacă $m(\angle M_1MM_2) = 160°$.



6. Reproduceți desenul şi construiți, cu ajutorul riglei şi al compasului, semidreapta $[AD$, astfel încât $[AB$ să fie bisectoarea unghiului CAD.



7. Reproduceți desenul şi construiți, cu ajutorul riglei şi al compasului, semidreapta $[AC$, astfel încât punctul M să fie egal depărtat de $[AB$ şi $[AC$.

8. Semidreapta $[OA$ este opusa bisectoarei unghiului BOC. Aflați:

a) $m(\angle AOB)$, dacă $m(\angle BOC) = 60°$;

b) $m(\angle BOC)$, dacă $m(\angle AOC) = 165°$.

9. Segmentul AD este o bisectoare a triunghiului ABC şi $E \in [AC]$, astfel încât $[AE] \equiv [AB]$. Demonstrați că $BD = DE$.

10. Fie triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [BC]$ şi $[AD]$ o bisectoare a triunghiului. Aflați:

a) $m(\angle CAD)$, dacă $m(\angle B) = 20°$;

b) $m(\angle B)$, dacă $m(\angle BAD) = 25°$.

11. Punctul M este egal depărtat de laturile triunghiului echilateral ABC.
Aflați $m(\angle AOB)$.

12. Semidreapta $[BE$ este bisectoare a unghiurilor ABC şi ADC (fig. 1). Demonstrați că triunghiurile ABC şi ADC sunt isoscele.

13. Examinați figura 2.
Demonstrați că $AC \perp M_1M_2$.

14. Punctul O este egal depărtat de laturile triunghiului echilateral ABC (fig. 3) şi $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $K \in [AC]$, astfel încât $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OK \perp AC$.
Aflați:
a) $m(\angle MON)$;
b) perimetrul triunghiului MNK, dacă $AC = 10$ cm.

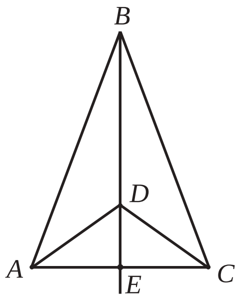


Fig. 1

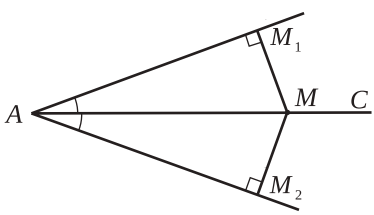


Fig. 2

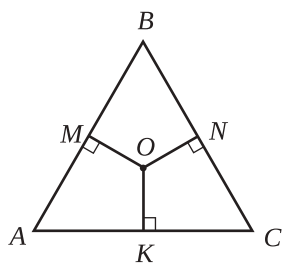
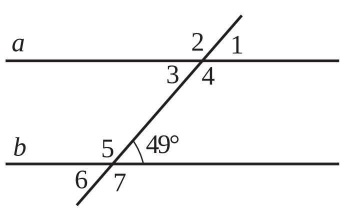


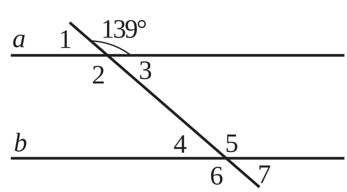
Fig. 3

Exerciții și probleme recapitulative

1. Dreptele a şi b sunt paralele. Aflați măsurile unghiurilor 1–7.



a)



b)

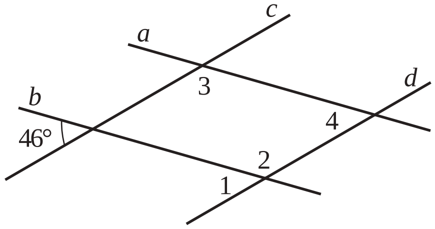
2. Fie două drepte paralele intersectate de o a treia dreaptă. Aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor interne de aceeaşi parte a secantei.

3. La intersecția a două drepte paralele cu o secantă unul din unghiurile interne de aceeaşi parte a secantei are măsura cu 50° mai mare decât celălalt. Aflați măsura unghiului mai mic.

4. Punctele A şi D se află de aceeaşi parte a dreptei BC, $m(\angle ABC)=\alpha$, iar $m(\angle BCD)=\beta$. Aflați poziția relativă a dreptelor AB şi CD, dacă:
a) $\alpha=70°$, $\beta=110°$;
b) $\alpha=65°$, $\beta=115°$.

5. Diferența măsurilor a două unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei (formate la intersecția a două drepte paralele cu o secantă) este de 4 ori mai mică decât suma lor. Aflați măsura unghiului mai mare.

6. Examinați desenul. Aflați măsurile unghiurilor 1–4, dacă $a \parallel b$ şi $c \parallel d$.

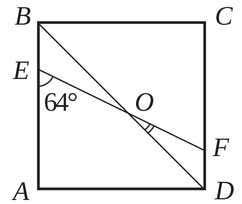


7. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle B)=90°$. Distanța dintre mijlocul ipotenuzei şi o catetă este egală cu 7,5 cm. Aflați lungimea celeilalte catete.

8. Punctul M este egal depărtat de laturile unghiului ABC. Aflați măsura unghiului ABM, dacă măsura unghiului ABC este egală cu 111°.

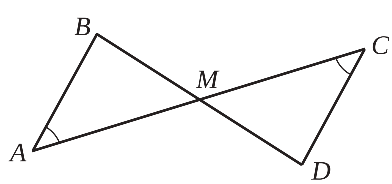
9. Punctul M este egal depărtat de extremitățile segmentului AB. Aflați $m(\angle MAB)$, dacă $m(\angle AMB)=71°$.

10. Examinați desenul. $ABCD$ este pătrat. Aflați $m(\angle DOF)$, dacă $m(\angle AEO)=64°$.

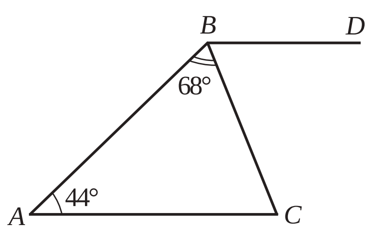


11. Două mediane ale unui triunghi sunt congruente. Demonstrați că triunghiul este isoscel.

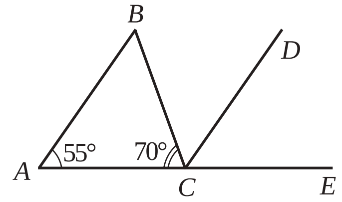
12. Examinați desenul. Demonstrați că $AB \parallel CD$.



13. Examinați desenul. Semidreapta $[BC$ este bisectoarea unghiului ABD.
Demonstrați că $AC \parallel BD$.

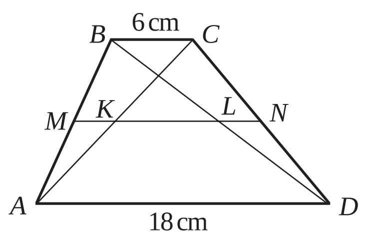


14. Examinați desenul. Semidreapta $[CD$ este bisectoarea unghiului BCE.
Demonstrați că $AB \parallel CD$.



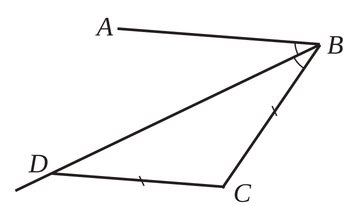
15. Fie $ABCD$ un trapez cu $AD \parallel BC$. Punctele M şi N sunt mijloacele laturilor laterale ale trapezului. Aflați MN, dacă $AD = 12$ cm şi $BC = 4,8$ cm.

16. Fie trapezul $ABCD$ cu $AD \parallel BC$ şi $AD = 18$ cm, $BC = 6$ cm. Punctele M şi N sunt mijloacele laturilor AB şi, respectiv, CD, $MN \cap AC = \{K\}$, $BD \cap MN = \{L\}$. Calculați MK, KL, LN.



17. Segmentele AB şi CD se intersectează în mijlocurile lor. Demonstrați că dacă dreapta a este paralelă cu AC, atunci dreapta a este paralelă şi cu BD.

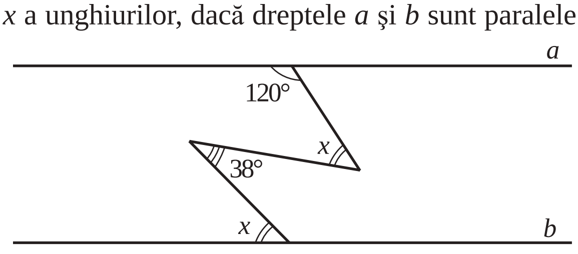
18. Examinați desenul. Semidreapta $[BD$ este o bisectoare a triunghiului ABC şi $[BC] \equiv [CD]$.
Demonstrați că $AB \parallel CD$.
Indicație. Construiți mediana CN a triunghiului BDC şi demonstrați că triunghiurile CNB şi CND sunt congruente.



19. Demonstrați că unghiurile cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.

PENTRU CAMPIONI

20. Aflați măsura x a unghiurilor, dacă dreptele a şi b sunt paralele.



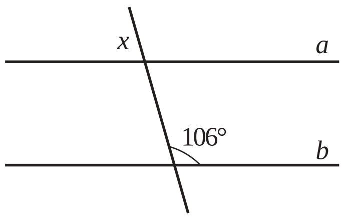
Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 minute

Varianta 1

1 p

1. Dreptele *a* şi *b* sunt paralele. Calculaţi măsura unghiului *x*:



2 p

2. Diferenţa măsurilor a două unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei care intersectează două drepte paralele este egală cu 36°.
Aflaţi măsura unghiului mai mare.

2 p

3. Aflaţi perimetrul triunghiului *ABC*, dacă perimetrul triunghiului *MNK*, unde *M*, *N*, *K* sunt mijloacele laturilor triunghiului *ABC*, este egal cu 22,2 cm.

2 p

4. Aflaţi măsura unghiului format de semidreapta opusă bisectoarei unghiului *A* şi o latură a acestui unghi, dacă:

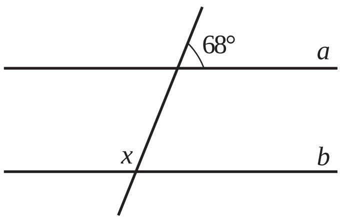
$$m(\angle A) = 88°.$$

3 p

5. Fie punctele *A*, *B*, *C* într-un sistem de axe ortogonale. Aflaţi coordonatele punctului *C*, dacă el aparţine mediatoarei segmentului *AB*, cu *A*(–3, 4), *B*(5, 4), are ordonata pozitivă şi este situat la distanţa de 6 unităţi de segmentul *AB*.

Varianta 2

1. Dreptele *a* şi *b* sunt paralele. Calculaţi măsura unghiului *x*:



2. Diferenţa măsurilor a două unghiuri externe de aceeaşi parte a secantei care intersectează două drepte paralele este egală cu 34°.
Aflaţi măsura unghiului mai mic.

3. Aflaţi perimetrul triunghiului *ABC*, dacă perimetrul triunghiului *MNK*, unde *A*, *B*, *C* sunt mijloacele laturilor triunghiului *MNK*, este egal cu 19,1 cm.

4. Aflaţi măsura unghiului format de semidreapta opusă bisectoarei unghiului *A* şi o latură a acestui unghi, dacă:

$$m(\angle A) = 76°.$$

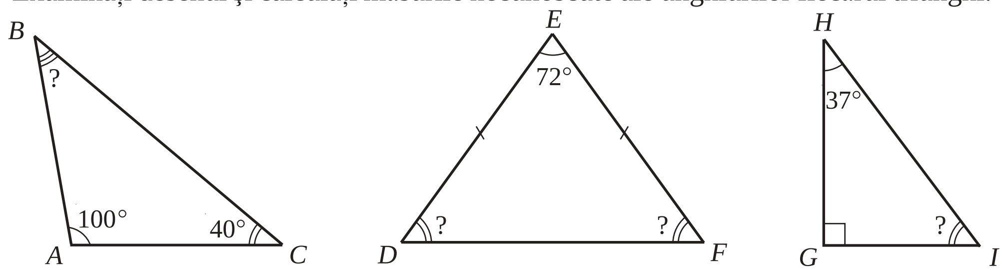
5. Fie punctele *A*, *B*, *C* într-un sistem de axe ortogonale. Aflaţi coordonatele punctului *C*, dacă el aparţine mediatoarei segmentului *AB*, cu *A*(2, 3), *B*(2, –2), are ordonata pozitivă şi este situat la distanţa de 5 unităţi de segmentul *AB*.

CAPITOLUL 4

Proprietăți ale triunghiurilor

§1. Unghi exterior al triunghiului

1 Examinați desenul și calculați măsurile necunoscute ale unghiurilor fiecărui triunghi.



Explicăm

Deoarece suma măsurilor unghiurilor oricărui triunghi este 180°, obținem:

$m(\angle B) = 180° - m(\angle A) - m(\angle C) = 180° - 100° - \square° = \square°.$

$m(\angle D) = m(\angle F) = \dfrac{180° - \square°}{2} = \square°.$

$m(\angle I) = 180° - \square° - \square° = \square°.$

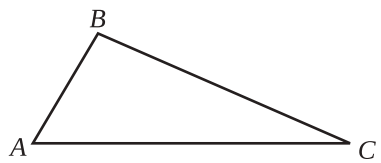
Am utilizat până acum fără demonstrație proprietatea unghiurilor unui triunghi.
Să demonstrăm această proprietate.

Teorema 1
Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°.

Ipoteză: ABC – triunghi.

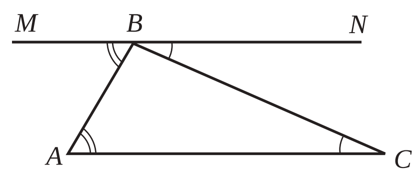
Concluzie: $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180°.$

Demonstrație:



① Construim prin punctul B dreapta MN, paralelă cu dreapta AC.

② $\angle C \equiv \angle CBN$, $\angle A \equiv \angle ABM$ (unghiuri alterne interne formate de secanta BC cu dreptele paralele MN și AC).



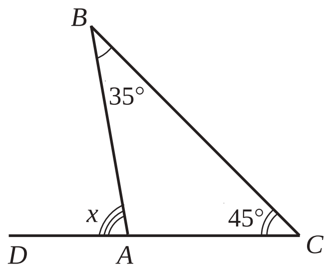
③ $m(\angle MBN) = 180°$ (unghi alungit).

④ $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) \overset{②}{=} m(\angle ABM) + m(\angle B) + m(\angle CBN) =$

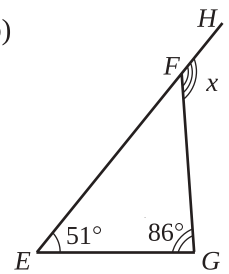
$= m(\angle MBN) \overset{③}{=} 180°$, c.c.t.d. ►

2 Aflați măsura unghiului notată cu x:

a)



b)



Explicăm

a) Unghiurile *BAD* şi *BAC* sunt adiacente suplementare:

$m(\angle BAD) = 180° - m(\angle BAC);$ (1)

$m(\angle BAC) \overset{T_1}{=} 180° - m(\angle B) - m(\angle C).$ (2)

Substituind (2) în (1), obținem:

$m(\angle BAD) = 180° - [180° - m(\angle B) - m(\angle C)] = \square$

$m(\angle BAD) = \square° + \square° = \square°.$

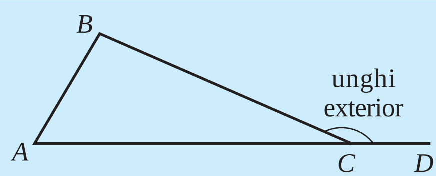
b) $m(\angle HFG) = 180° - m(\angle EFG),$ (1)

$m(\angle EFG) = 180° - \square° - \square°.$ (2)

Substituind (2) în (1), obținem:

$m(\angle HFG) = \square° + \square° = \square°.$

Definiție. **Unghi exterior** al triunghiului de la vârful dat se numeşte unghiul suplement şi adiacent cu unghiul triunghiului de la acest vârf.



Teorema 2

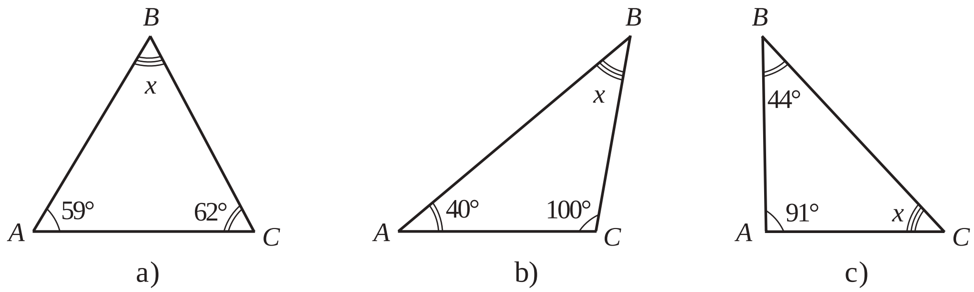
Măsura unghiului exterior al triunghiului este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului neadiacente lui.

$$m(\angle BCD) = m(\angle A) + m(\angle B).$$

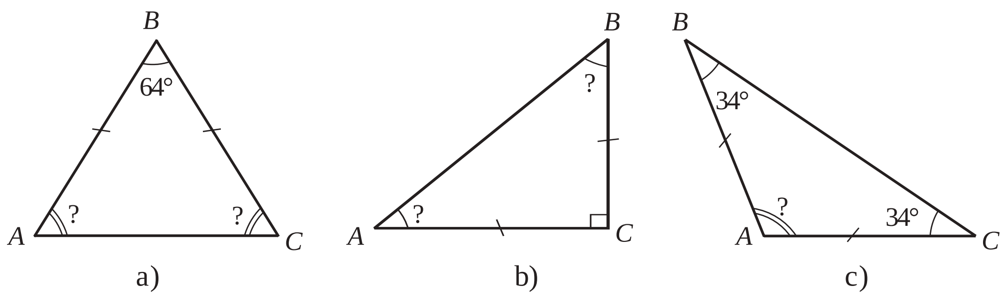
• Demonstrați teorema 2.

Exerciții și probleme

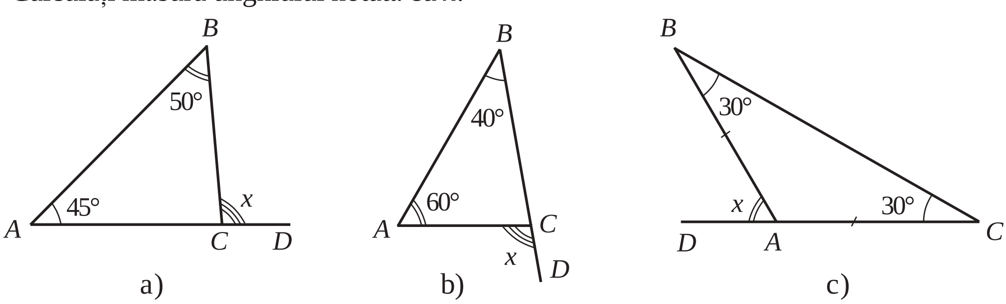
1. Examinați desenul şi calculați măsura unghiului notată cu x.



2. Examinați desenul şi calculați măsurile necunoscute ale unghiurilor triunghiului ABC.



3. Calculați măsura unghiului notată cu x:



4. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale unui triunghi echilateral.

5. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale unui triunghi dreptunghic isoscel.

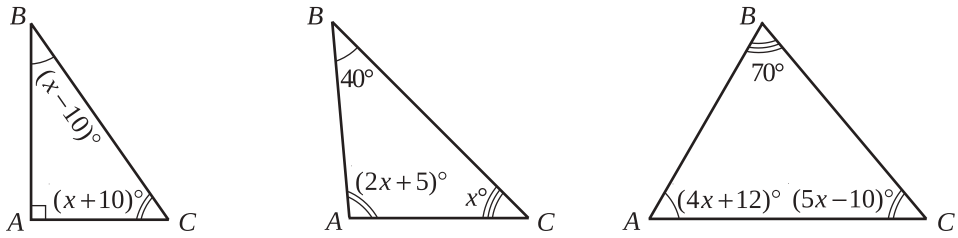
6. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale unui triunghi dreptunghic cu un unghi ascuțit de 20°.

7. Aflați suma unghiurilor exterioare ale oricărui triunghi.

8. Unghiurile exterioare ale unui triunghi au măsurile de 100°, 110°, 150°. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului.

9. Măsurile a două dintre unghiurile exterioare ale unui triunghi sunt egale cu 95° şi 130°. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului.

10. Examinaţi desenul şi calculaţi măsurile necunoscute ale unghiurilor triunghiului *ABC*.

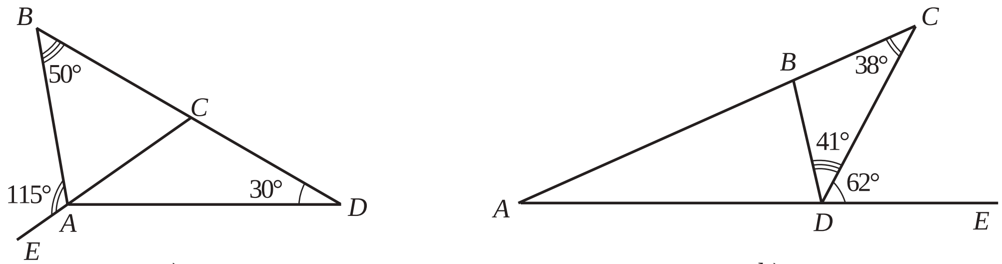


a) b) c)

11. Un unghi al triunghiului isoscel are măsura de 92°. Aflaţi măsurile celorlalte două unghiuri.

12. Aflaţi măsurile unghiurilor unui triunghi, dacă ele sunt direct proporţionale cu numerele 2, 3, 4.

13. Examinaţi desenul şi aflaţi măsura unghiului *CAD*.



a) b)

14. Aflaţi măsurile unghiurilor unui triunghi, dacă măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului sunt direct proporţionale cu numerele 3, 4, 5.

15. Demonstraţi că nu există un triunghi astfel încât toate sumele măsurilor oricăror două unghiuri ale triunghiului să fie:

a) mai mari decât 120°; b) mai mici decât 120°.

16. Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporţionale cu 3 numere naturale consecutive. Demonstraţi că unul dintre unghiuri are măsura de 60°.

Indicaţie. Utilizaţi proprietatea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

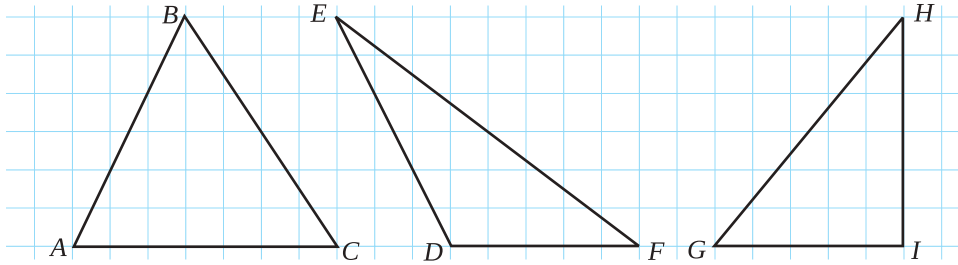
§2. Proprietăți ale liniilor importante ale triunghiului

1 Completați astfel încât să obțineți o propoziție adevărată.

a) Punctul de intersecție a mediatoarelor laturilor unui triunghi este egal depărtat de ... .

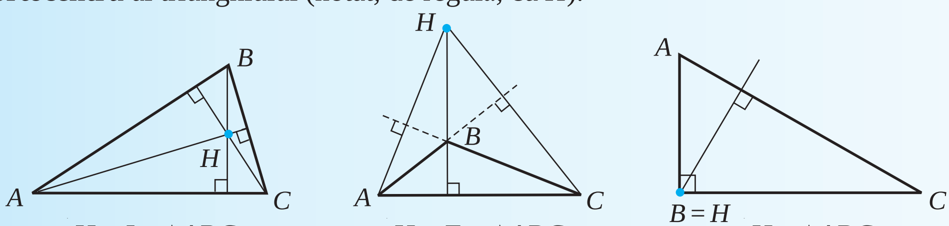
b) Punctul de intersecție a bisectoarelor unui triunghi este egal depărtat de ... .

2 Copiați și construiți înălțimile fiecărui triunghi.



• Observați poziția punctului de intersecție a dreptelor suport ale înălțimilor triunghiului față de triunghi. Formulați ipoteze și verificați-le pe alte triunghiuri de același tip (ascuțitunghice, obtuzunghice, dreptunghice).

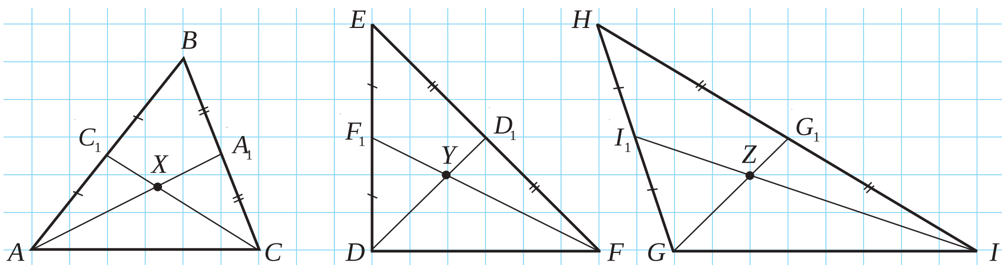
Dreptele suport ale înălțimilor unui triunghi sunt concurente într-un punct, numit **ortocentru** al triunghiului (notat, de regulă, cu H).



$H \in \text{Int}\,\Delta ABC$ $H \in \text{Ext}\,\Delta ABC$ $H \in \Delta ABC$

LUCRARE PRACTICĂ

Examinați desenul. Cu ajutorul riglei, determinați dacă mediana nereprezentată a fiecărui triunghi trece prin punctul de intersecție a celor două mediane construite. Trageți concluzia.

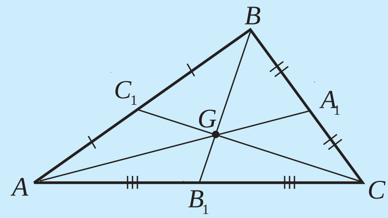


• Punctul de intersecție a medianelor împarte fiecare mediană în două segmente. Cu ajutorul compasului, determinați de câte ori segmentul mai mic se conține în segmentul mai mare. Trageți concluzia.

Medianele unui triunghi sunt concurente într-un punct, numit **centrul de greutate** al triunghiului (notat, de regulă, cu G).

Teoremă

Centrul de greutate al triunghiului se află pe fiecare mediană de două ori mai departe de un vârf al triunghiului decât de mijlocul laturii opuse.



Să demonstrăm teorema.

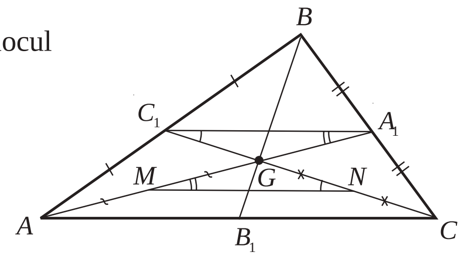
Ipoteză: ΔABC, $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ – medianele triunghiului ABC.

$[AA_1]\cap[BB_1]\cap[CC_1]=\{G\}$.

Concluzie: $AG=2A_1G,\ BG=2B_1G,\ CG=2C_1G$.

Demonstrație:

① Fie M mijlocul segmentului AG, iar N – mijlocul segmentului CG.



② $[A_1C_1]$ este linie mijlocie a triunghiului ABC.

Aşadar, $A_1C_1 \parallel AC$ şi $A_1C_1=\dfrac{AC}{2}$ (1).

$[MN]$ este linia mijlocie a triunghiului AGC.

Prin urmare, $MN \parallel AC$ şi $MN=\dfrac{AC}{2}$ (2).

③ Din (1) şi (2) rezultă că $[MN]\equiv[A_1C_1]$ şi $MN \parallel A_1C_1$ (3).

④ $\angle MNG \equiv \angle A_1C_1G$ (unghiuri alterne interne formate de secanta NC_1 cu dreptele paralele MN şi A_1C_1) (4).

⑤ $\angle NMG \equiv \angle C_1A_1G$ (unghiuri alterne interne formate de secanta MA_1 cu dreptele paralele MN şi A_1C_1) (5).

⑥ Din (3)–(5) rezultă că $\Delta A_1C_1G \equiv \Delta MNG$ (ULU).

Prin urmare, $[A_1G]\equiv[MG]\Rightarrow AG=2A_1G$,

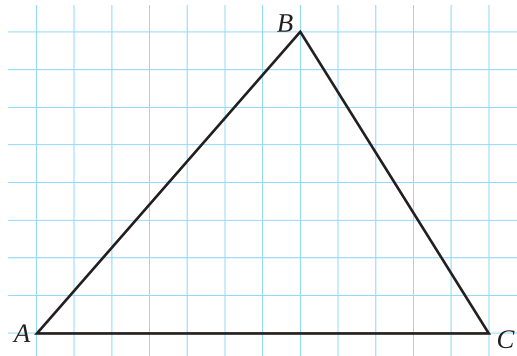
$[C_1G]\equiv[NG]\Rightarrow CG=2C_1G$.

Similar, se demonstrează că $BG=2B_1G$, c.c.t.d. ►

Observație. Teorema poate fi formulată şi astfel:
Punctul de intersecție a medianelor triunghiului împarte fiecare mediană în raportul 2 : 1 (considerând de la vârf).

Exerciții și probleme

1. Reproduceți desenul şi construiți:
a) medianele triunghiului;
b) înălțimile triunghiului;
c) bisectoarele triunghiului.



2. *Adevărat* sau *fals*?

a) Centrul de greutate al unui triunghi este punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului.
b) Medianele unui triunghi sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului.
c) Bisectoarele unui triunghi sunt concurente în centrul cercului înscris în triunghi.
d) Ortocentrul unui triunghi este punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului.

3. Corectați propozițiile false de la exercițiul **2**.

4. Substituiți, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.
a) Ortocentrul unui triunghi ______ aparține exteriorului triunghiului.
b) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC şi AA_1 este o mediană a triunghiului, atunci $\frac{AA_1}{A_1G} =$ ______, $\frac{AA_1}{AG} =$ ______.
c) Dacă diametrul cercului care conține vârfurile unui triunghi este de 10 cm, atunci distanța de la vârful triunghiului până la punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului este egală cu ______ cm.

5. Aflați tipul triunghiului, dacă punctul de intersecție a mediatoarelor lui aparține:
a) triunghiului;
b) interiorului triunghiului;
c) exteriorului triunghiului.

6. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic are lungimea de 6 cm. Aflați raza cercului care conține vârfurile acestui triunghi.

7. Medianele AM şi BN ale triunghiului ABC se intersectează în punctul O. Calculați:

a) AO şi BO, dacă $AM = 9$ cm, $BN = 12$ cm;

b) AM şi BN, dacă $AO = 4\sqrt{3}$ cm, $BO = 6\sqrt{3}$ cm;

c) OM şi ON, dacă $AM = 12$ cm, $BN = 15$ cm;

d) AO şi BO, dacă $OM = \sqrt{5}$ cm, $ON = \sqrt{6}$ cm.

8. Punctul M este egal depărtat de laturile triunghiului ABC. Aflați:

a) măsurile unghiurilor triunghiului ABC, dacă $m(\angle MAC) = 30°$, $m(\angle ACM) = 40°$;

b) $m(\angle BAM)$ şi $m(\angle BCM)$, dacă $m(\angle BAC) = 74°$, $m(\angle ABC) = 70°$;

c) $m(\angle AMC)$ şi $m(\angle BMC)$, dacă $m(\angle BAC) = 46°$, $m(\angle ABC) = 100°$;

d) măsurile unghiurilor triunghiului ABC, dacă $m(\angle AMB) = 100°$, $m(\angle BMC) = 130°$.

9. Segmentul AM este o înălțime a triunghiului ascuțitunghic ABM. Aflați măsurile unghiurilor formate de $[AM$ cu laturile AB şi AC ale triunghiului, dacă:

a) $m(\angle B) = 70°$, $m(\angle C) = 50°$;

b) măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului de la vârfurile B şi C sunt egale cu 120° şi, respectiv, cu 110°.

10. Fie ABC un triunghi isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$, $[AM]$ şi $[CN]$ – două înălțimi ale triunghiului. Calculați:

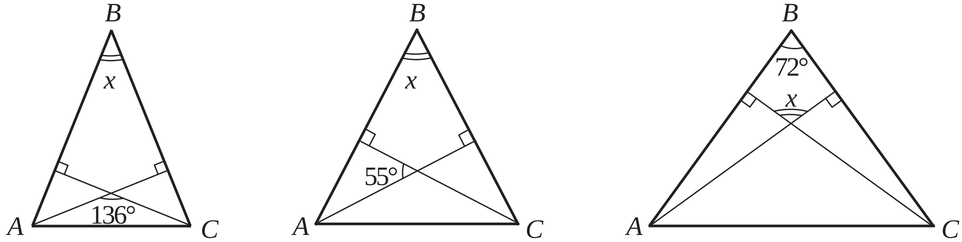
a) măsurile unghiurilor formate de $[AM$ cu $[AB$ şi $[AC$, dacă $m(\angle B) = 78°$;

b) măsurile unghiurilor formate de $[CN$ cu $[CA$ şi $[CB$, dacă $m(\angle A) = 50°$;

c) $m(\angle B)$, dacă $m(\angle MAC) = 27°$;

d) $m(\angle A)$, dacă $m(\angle MCN) = 31°$.

11. Examinați desenul ($[AB] \equiv [BC]$) şi calculați măsura unghiului notată cu x.



a) b) c)

12. Fie triunghiul ABC şi $[AM]$, $[CN]$ mediane ale triunghiului. Calculați:

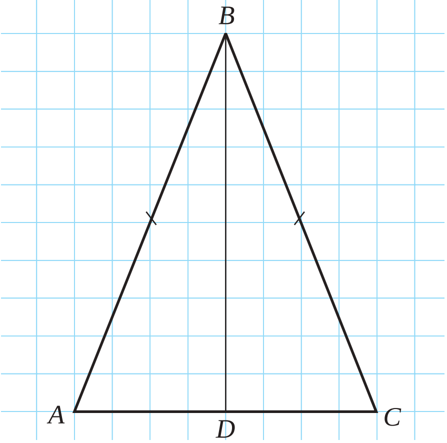
a) perimetrul triunghiului BMN, dacă perimetrul triunghiului ABC este egal cu $8\sqrt{7}$ cm;

b) perimetrul patrulaterului $ANMC$, dacă perimetrul triunghiului ABC este egal cu 28 cm şi $AC = 10$ cm.

13. Mediana AM a triunghiului ABC este congruentă cu segmentul BM. Demonstrați că măsura unui unghi al triunghiului ABC este egală cu suma măsurilor celorlalte două unghiuri ale acestui triunghi.

14. Fie triunghiul ABC cu $[AB]\equiv[AC]$. Punctele M şi N aparțin laturii BC, astfel încât $[BM]\equiv[CN]$. Aflați $m(\angle MAN)$, dacă $m(\angle BMA)=115°$.

§3. Proprietăți ale triunghiului isoscel



1 Examinați desenul. Completați cu una dintre noțiunile *mediană*, *bisectoare*, *înălțime*, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată.

Segmentul BD este o ______ a triunghiului isoscel ABC.

• Trageți concluzia.

Teorema 1

Mediana, bisectoarea şi înălțimea construite din vârful opus bazei triunghiului isoscel coincid.

Să demonstrăm teorema 1.

Ipoteză:	*Concluzie*:
ΔABC, $[AB]\equiv[CB]$.	
Dacă $[BD]$ este mediană,	atunci $[BD]$ este bisectoare şi înălțime.
Dacă $[BD]$ este bisectoare,	atunci $[BD]$ este înălțime şi mediană.
Dacă $[BD]$ este înălțime,	atunci $[BD]$ este mediană şi bisectoare.

Demonstrație:

Dacă $[BD]$ este mediană, atunci $\Delta ABD\equiv\Delta CBD$ (Criteriul LLL).

Dacă $[BD]$ este bisectoare, atunci $\Delta ABD\equiv\Delta CBD$ (Criteriul LUL).

Dacă $[BD]$ este înălțime, atunci $\Delta ABD\equiv\Delta CBD$ (Criteriul IC).

Concluzia teoremei rezultă din congruența triunghiurilor ABD şi CBD, c.c.t.d. ►

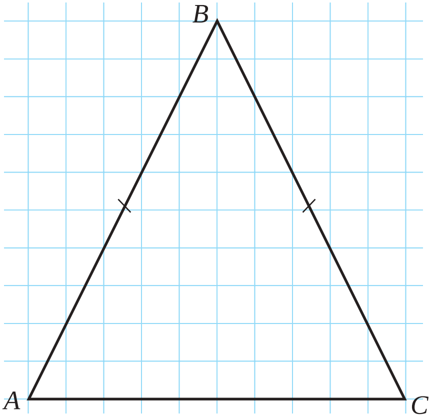
Demonstrând teorema 1, am arătat că triunghiurile *ABD* şi *CBD* sunt congruente. Prin urmare, $\angle A \equiv \angle C$.

Teorema 2
Unghiurile alăturate bazei unui triunghi isoscel sunt congruente.

Observație. Reciproca teoremei 2 de asemenea este o teoremă.

• Formulați şi demonstrați reciproca teoremei 2.

LUCRARE PRACTICĂ



1. Reproduceți desenul.

2. Construiți din vârfurile *A* şi *C* înălțimile, medianele şi bisectoarele triunghiului. Comparați lungimile:
a) medianelor;
b) bisectoarelor;
c) înălțimilor.
Trageți concluzia.

Teorema 3
Medianele construite din vârfurile unghiurilor alăturate bazei triunghiului isoscel sunt congruente.

Teorema 4
Bisectoarele construite din vârfurile unghiurilor alăturate bazei triunghiului isoscel sunt congruente.

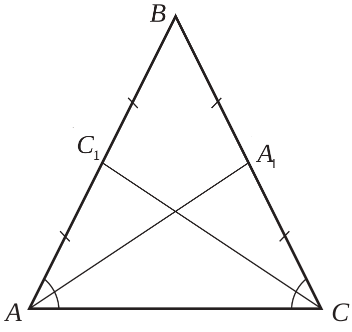
Teorema 5
Înălțimile construite din vârfurile unghiurilor alăturate bazei triunghiului isoscel sunt congruente.

Să demonstrăm teorema 3.

Ipoteză: ΔABC, $[AB] \equiv [CB]$,
$[AA_1]$, $[CC_1]$ – mediane ale triunghiului *ABC*.

Concluzie: $[AA_1] \equiv [CC_1]$.

Demonstrație:



$\Delta AC_1C \equiv \Delta CA_1A$ (Criteriul LUL: $[AC]$ – latură comună, $[AC_1] \equiv [CA_1]$ conform ipotezei, $m(\angle A) \equiv m(\angle C)$ conform teoremei 2).

Prin urmare, $[AA_1] \equiv [CC_1]$, c.c.t.d. ►

• Demonstrați teoremele 4 şi 5.

Observație. Reciprocele teoremelor 3–5 de asemenea sunt teoreme.

- Formulați și demonstrați reciprocele teoremelor 3–5.

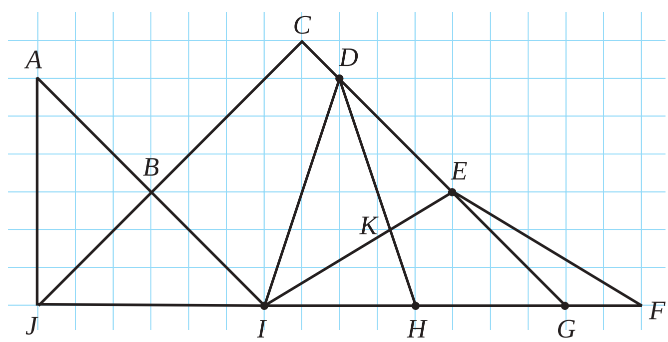
Criteriile triunghiului isoscel

Un triunghi este isoscel dacă are loc cel puțin una dintre condițiile:

1) triunghiul are două unghiuri congruente;
2) o mediană și o bisectoare ale triunghiului coincid;
3) o mediană și o înălțime ale triunghiului coincid;
4) o bisectoare și o înălțime ale triunghiului coincid;
5) două mediane ale triunghiului sunt congruente;
6) două bisectoare ale triunghiului sunt congruente;
7) două înălțimi ale triunghiului sunt congruente.

Exerciții și probleme

1. Examinați desenul și precizați triunghiurile isoscele.



2. Unghiurile A și B ale triunghiului ABC sunt congruente. Calculați:

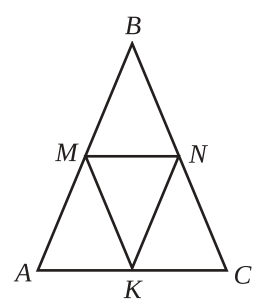
a) AC, dacă $BC = 6$ cm;
b) BC, dacă $AC + BC = 11$ cm;
c) $2AC$, dacă $3BC = 15$ cm;
d) $2AC - BC$, dacă $AC = \sqrt{5}$ cm.

3. Fie $[BM]$ o mediană a triunghiului isoscel ABC cu baza AC. Calculați:

a) $m(\angle ABC)$, dacă $m(\angle ABM) = 25°$;
b) $m(\angle A)$, dacă $m(\angle MBC) = 28°$;
c) $m(\angle C)$, dacă $m(\angle ABM) + m(\angle AMB) = 130°$;
d) $m(\angle ABM)$, dacă $m(\angle C) + m(\angle BMC) = 124°$.

4. În desen, $[AB] \equiv [BC]$ și punctele M, N, K sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC. Precizați:

a) segmentele congruente din desen;
b) unghiurile congruente.



5. Examinați desenul și enunțul problemei **4**. Aflați:

a) $m(\angle MKN)$, dacă $m(\angle A) = 44°$;

b) $m(\angle B)$, dacă $m(\angle KMN) = 55°$;

c) $m(\angle A)$, dacă $m(\angle B) + m(\angle MKN) = 80°$;

d) $m(\angle C)$, dacă $m(\angle A) + m(\angle KMN) = 88°$.

6. Examinați desenul și enunțul problemei **4**. Calculați:

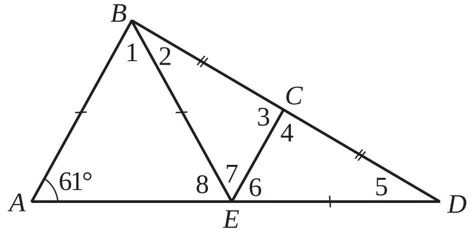
a) MN, dacă $AC + MN = 18$ cm;

b) AM, dacă $MB + NC = 9$ cm;

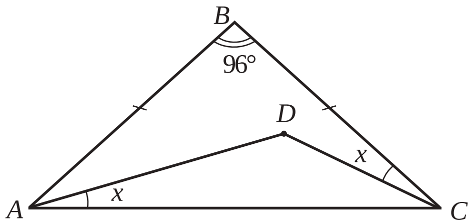
c) BN, dacă $AM + MK = 4\sqrt{3}$ cm;

d) KN, dacă $AB + BC = 8,(4)$ cm.

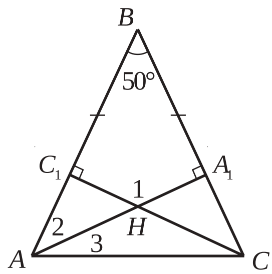
7. Examinați desenul.
Știind că $[AB] \equiv [BE] \equiv [DE]$, $[BC] \equiv [CD]$, $m(\angle A) = 61°$, calculați măsurile unghiurilor 1–8.



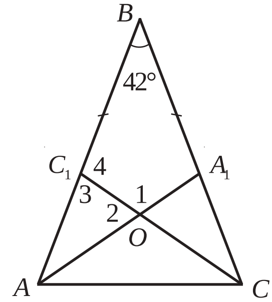
8. Examinați desenul. Știind că $[AB] \equiv [BC]$, $m(\angle B) = 96°$, calculați $m(\angle ADC)$.



9. Examinați desenul. Se știe că $[AB] \equiv [BC]$, $[AA_1]$ și $[CC_1]$ sunt înălțimi ale triunghiului ABC, $m(\angle B) = 50°$. Calculați măsurile unghiurilor 1–3.

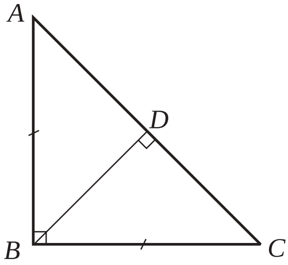


10. Examinați desenul. Se știe că $[AB] \equiv [BC]$, $[AA_1]$ și $[CC_1]$ sunt bisectoare ale triunghiului ABC, $m(\angle B) = 42°$. Calculați măsurile unghiurilor 1–4.



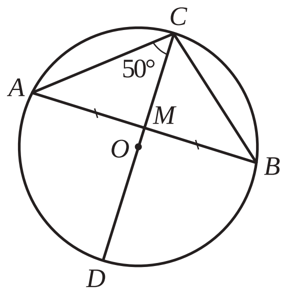
11. Aflați lungimile laturilor unui triunghi isoscel, dacă:
a) perimetrul triunghiului este de 28 cm şi lungimea unei laturi este cu 8 cm mai mică decât lungimea celeilalte;
b) perimetrul triunghiului este de 42 cm şi lungimea unei laturi este de 2,5 ori mai mare decât lungimea celeilalte.

12. Triunghiul ABC din desen este dreptunghic isoscel $(m(\angle B)=90°,\ [AB]\equiv[AC])$, $[BD]$ este o înălțime a triunghiului ABC.
Aflați BD, dacă $AC=4\sqrt{2}$ cm.

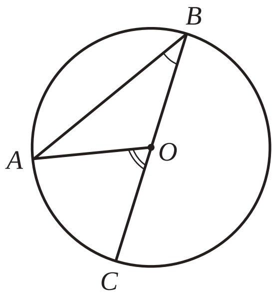


13. Diametrul AB al unui cerc intersectează în punctul M o coardă CD a cercului sub un unghi de 90°. Aflați CM şi DM, dacă $CD=18$ cm.

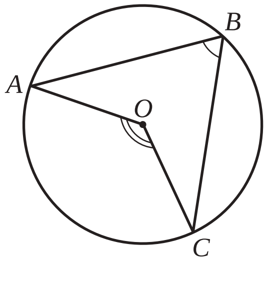
14. Diametrul CD al unui cerc intersectează coarda AB în mijlocul ei – punctul M (vezi desenul). Aflați $m(\angle ABC)$, dacă $m(\angle ACM)=50°$.



15. $[BC]$ este un diametru al cercului de centru O şi punctul A aparține acestui cerc (vezi desenul). Demonstrați că $m(\angle AOC)=2m(\angle ABC)$.



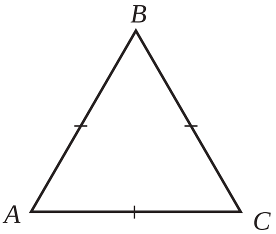
16. Punctele A, B, C aparțin cercului de centru O şi punctul O este situat între laturile unghiului AOB (vezi desenul). Demonstrați că $m(\angle AOC)=2m(\angle ABC)$.
Indicație. Utilizați rezultatul problemei **15**.



§ 4. Proprietăți ale triunghiului echilateral

1 Folosind instrumentele respective și proprietățile triunghiului isoscel, formulați cât mai multe propoziții adevărate despre elementele și liniile importante ale triunghiului echilateral.

Exemplu: Medianele triunghiului echilateral sunt congruente.



Observație. Un triunghi echilateral este în același timp și triunghi isoscel.

Teorema 1

Dacă un triunghi este echilateral, atunci unghiurile lui sunt congruente, având măsura egală cu 60°.

Să demonstrăm teorema 1.

Ipoteză: ΔABC – echilateral.

Concluzie: $\angle A \equiv \angle B \equiv \angle C$, $m(\angle A) = 60°$.

Demonstrație:

① Deoarece $[AB] \equiv [CB]$, rezultă că $\angle A \equiv \angle C$ (conform teoremei despre unghiurile alăturate bazei triunghiului isoscel).

② Deoarece $[AC] \equiv [BC]$, rezultă că $\angle A \equiv \angle B$.

③ Din ① și ② rezultă că $\angle A \equiv \angle B \equiv \angle C$. Prin urmare, $m(\angle A) = 180° : 3 = 60°$, c.c.t.d. ►

Teorema 2 (reciproca teoremei 1)

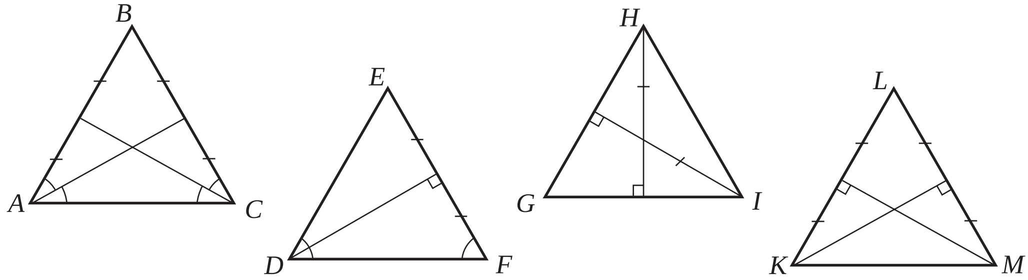
Dacă unghiurile unui triunghi sunt congruente, atunci acest triunghi este echilateral.

• Demonstrați teorema 2.

Teorema 3

Mediana, bisectoarea, înălțimea construite din același vârf al triunghiului echilateral coincid. Medianele, bisectoarele și înălțimile triunghiului echilateral sunt congruente.

2 Examinați desenul și determinați triunghiurile echilaterale.



Teorema 4
Dacă două mediane ale unui triunghi sunt şi bisectoare ale acestui triunghi, atunci triunghiul este echilateral.

Teorema 5
Dacă două mediane ale unui triunghi sunt şi înălțimi ale acestui triunghi, atunci triunghiul este echilateral.

Teorema 6
Dacă două înălțimi ale unui triunghi sunt şi bisectoare ale acestui triunghi, atunci triunghiul este echilateral.

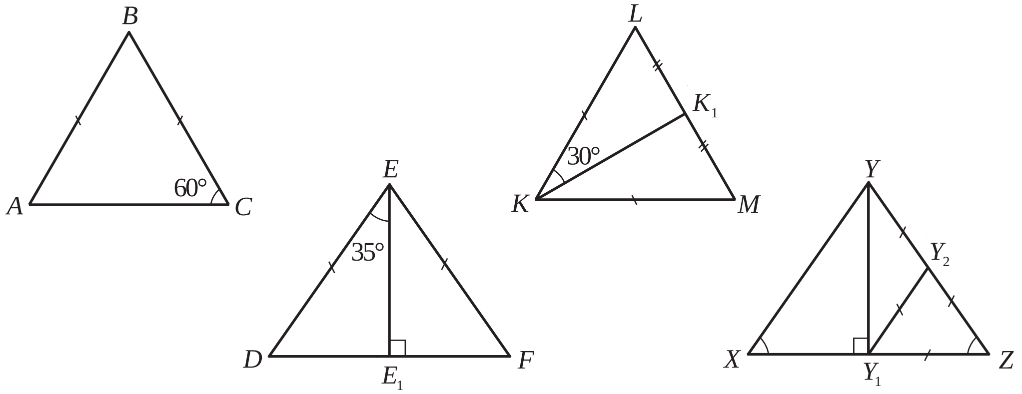
• Demonstrați teoremele 4–6.

Criteriile triunghiului echilateral

Un triunghi este echilateral dacă are loc cel puțin una dintre condițiile:
1) triunghiul are unghiurile congruente;
2) două mediane ale triunghiului sunt şi bisectoare ale acestui triunghi;
3) două mediane ale triunghiului sunt şi înălțimi ale acestui triunghi;
4) două bisectoare ale triunghiului sunt şi înălțimi ale acestui triunghi;
5) medianele triunghiului sunt congruente;
6) bisectoarele triunghiului sunt congruente;
7) înălțimile triunghiului sunt congruente;
8) este isoscel cu unghi de 60°.

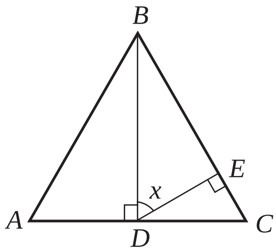
Exerciții și probleme

1. Examinați desenul şi selectați triunghiurile echilaterale.

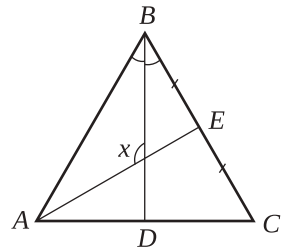


2. Utilizând rigla şi compasul, construiți un triunghi echilateral cu latura de:
a) 4 cm; b) 5 cm.

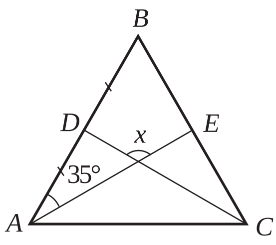
3. Triunghiul *ABC* din desen este echilateral. Calculați măsura unghiului notată cu *x*.



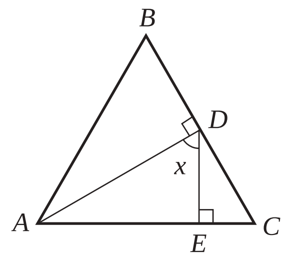
a)



b)



c)



d)

4. Calculați perimetrul unui triunghi echilateral cu linia mijlocie de $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ cm.

5. Aria triunghiului echilateral *ABC* este egală cu 60 cm^2. Aflați aria triunghiului cu vârfurile mijloacele laturilor triunghiului *ABC*.

6. Înălțimea unui triunghi echilateral este de 8 cm, iar *d* este distanța dintre punctul *M* şi laturile triunghiului. Aflați $R + d$, unde *R* este raza cercului care conține vârfurile triunghiului.

7. Înălțimea unui triunghi echilateral este de 9 cm. Aflați raza cercului care conține vârfurile triunghiului.

8. Înălțimea unui triunghi echilateral este de 12 cm. Aflați distanța de la punctul egal depărtat de laturile triunghiului până la aceste laturi.

9. Raza cercului care conține laturile unui triunghi echilateral este de 5 cm. Aflați înălțimea triunghiului.

10. Punctul *M* se află la distanța de 7 cm de laturile unui triunghi echilateral. Aflați înălțimea triunghiului.

11. Înălțimea triunghiului echilateral *ABC* este de 8,4 cm. Aflați înălțimea triunghiului *AOB* dusă din vârful *O*, unde *O* este egal depărtat de laturile triunghiului *ABC*.

12. Aflați măsurile unghiurilor formate la intersecția unei bisectoare și a unei mediane ale triunghiului echilateral.

13. O înălțime și o mediană ale triunghiului echilateral *ABC* se intersectează în punctul *M*. Aflați aria triunghiului *AMB*, dacă aria triunghiului *ABC* este de 24 cm^2.

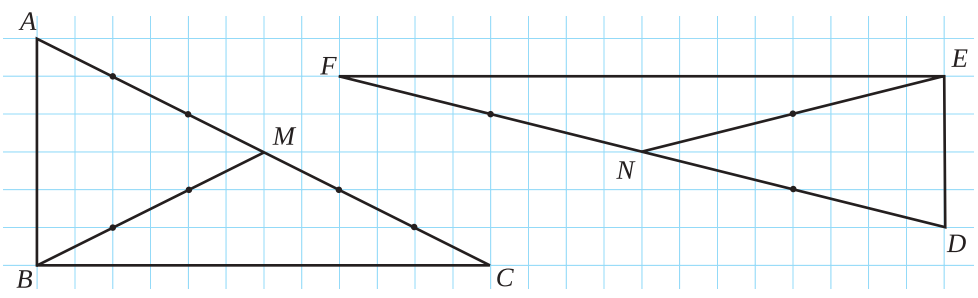
14. Mediana AA_1 și bisectoarea BB_1 ale triunghiului echilateral *ABC* se intersectează în punctul *M*. Aflați aria triunghiului *ABC*, dacă aria triunghiului A_1BM este de 6 cm^2.

15. Bisectoarea AA_1 și înălțimea CC_1 ale triunghiului echilateral *ABC* se intersectează în punctul *M*. Aflați aria triunghiului MA_1C_1, dacă aria triunghiului *ABC* este de 96 cm^2.

16. Fie *ABC* un triunghi isoscel cu $[AB] \equiv [BC]$. Punctele *M* și *N* aparțin exteriorului triunghiului *ABC*, astfel încât triunghiurile *ABM* și *BCN* sunt echilaterale. Demonstrați că $MN \parallel AC$.

§5. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic

• Examinați desenul.



Completați:

a) Triunghiurile *ABC* și *DEF* sunt triunghiuri ______ .

b) ______ și ______ sunt catetele triunghiului *ABC*.

c) $[FD]$ este ______ triunghiului *DEF*.

d) $[BM]$ este ______ triunghiului *ABC*.

$[BM] \equiv$ ______ , $[BM] \equiv$ ______ .

e) ______ este o mediană a triunghiului *DEF*. $[FN] \equiv$ ______ $\equiv [ND]$.

Trageți concluzia. Verificați cu ajutorul compasului.

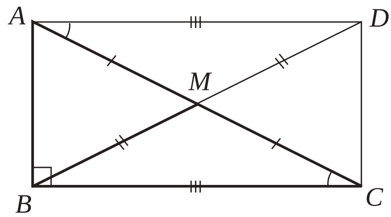
Teorema 1

Lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Să demonstrăm teorema 1.

Ipoteză: ΔABC, $m(\angle B)=90°$, $[BM]$ – mediană.

Concluzie: $BM=\frac{1}{2}AC$.



Demonstrație:

① Pe semidreapta $[BM$ construim punctul D, astfel încât $[BM]\equiv[DM]$.

② $\Delta ADM\equiv\Delta CBM$

(Criteriul LUL: $[AM]\equiv[CM]$ – din ipoteză, $[BM]\equiv[DM]$ – din construcție, $\angle AMD\equiv\angle CMB$ – unghiuri opuse la vârf).

③ $AD\parallel BC$ (Unghiurile alterne interne DAM și BCM sunt congruente conform ②).

④ $AB\perp AD$, deoarece $AB\perp BC$ și $AD\parallel BC$. Prin urmare, ΔBAD este dreptunghic.

⑤ $\Delta ABC\equiv\Delta BAD$ (Criteriul CC: $[AB]$ – catetă comună, $[AD]\equiv[BC]$ conform ②).

Prin urmare, $[AC]\equiv[BD]$ și $BM=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC$, c.c.t.d. ►

• Completați astfel încât să obțineți reciproca teoremei 1, care, de asemenea, este adevărată: *Dacă lungimea unei mediane a unui triunghi este egală cu ..., atunci ...* .

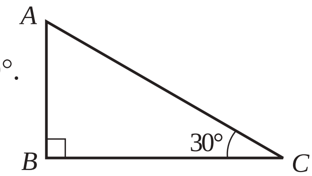
Teorema 2

Dacă măsura unui unghi al triunghiului dreptunghic este egală cu 30°, atunci lungimea catetei opuse acestui unghi este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Să demonstrăm teorema 2.

Ipoteză: ΔABC – dreptunghic, $m(\angle B)=90°$, $m(\angle C)=30°$.

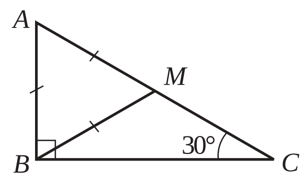
Concluzie: $AB=0{,}5AC$.



Demonstrație:

① Construim mediana $[BM]$.

② $[BM]\equiv[AM]$ (conform teoremei 1).



③ $m(\angle A)=180°-m(\angle B)-m(\angle C)=180°-90°-30°=60°$

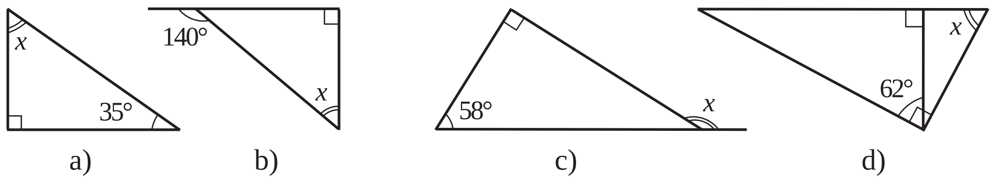
④ ΔAMB isoscel (conform ②) și $m(\angle A)=60°$. Prin urmare, ΔAMB – echilateral (conform criteriului 8, p. 204).

⑤ Așadar, ΔAMB – echilateral și $AB=AM=0{,}5AB$, c.c.t.d. ►

• Reciproca teoremei 2, de asemenea, este teoremă. Formulați și demonstrați reciproca teoremei 2.

Exerciții și probleme

1. Calculați măsura unghiului notată cu x:



2. Fie triunghiul ABC dreptunghic în B. Calculați lungimea medianei BM, dacă:

a) $AC = 10$ cm; b) $AM = 8$ cm; c) $MC = \sqrt{2}$ cm; d) $BM + AC = 12$ cm.

3. $[BM]$ este o mediană a triunghiului ABC dreptunghic în B. Calculați:

a) AC, dacă $BM = 6$ cm; b) AM, dacă $BM = \sqrt{5}$ cm;

c) MC, dacă $AM + BM = 9$ cm; d) $\dfrac{AC + BM}{AM}$.

4. Punctul T este mijlocul ipotenuzei PS a triunghiului dreptunghic PRS. Calculați:

a) $m(\angle S)$, dacă $m(\angle TRS) = 32°$; b) $m(\angle P)$, dacă $m(\angle PTR) = 100°$;

c) $m(\angle TRP)$, dacă $m(\angle S) = 40°$; d) $m(\angle RTS)$, dacă $m(\angle PRT) = 42°$.

5. Fie triunghiul ABC dreptunghic în B. Știind că $m(\angle C) = 30°$, aflați:

a) AB, dacă $AC = 16$ cm;

b) AC, dacă $AB = 6$ cm;

c) AB, dacă $[AC]$ este cu 11 cm mai lungă decât $[AB]$;

d) AC, dacă $[AB]$ este cu $\sqrt{5}$ cm mai scurtă decât $[AC]$.

6. Punctul M este mijlocul ipotenuzei AC a triunghiului dreptunghic ABC. Știind că $m(\angle A) = 30°$, aflați:

a) BM, dacă $BC = 11$ cm;

b) BC, dacă $BM = 9$ cm;

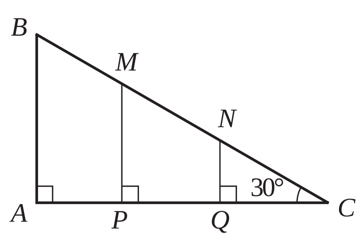
c) perimetrul triunghiului BMC, dacă $AC = 16$ cm;

d) AC, dacă perimetrul triunghiului BMC este egal cu 15 cm.

7. Examinați desenul. Aflați:

a) AB, PM, QN, dacă $BM = 8$ cm, $MN = 9$ cm, $NC = 10$ cm.

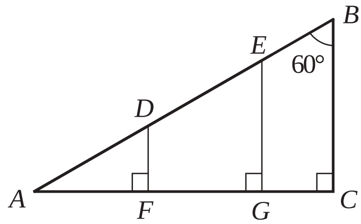
b) BM, MN, NC, dacă $AB = 4\sqrt{2}$ cm, $PM = 3\sqrt{2}$ cm, $QN = 2\sqrt{2}$ cm.



8. Examinați desenul. Aflați:

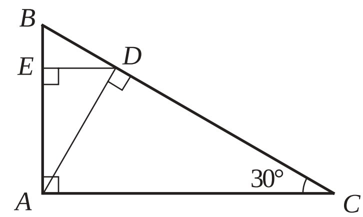
a) DF, EG, BC, dacă
$AD = DE = 4\sqrt{5}$ cm, $EB = 3\sqrt{5}$ cm;

b) AD, DE, EB, dacă
$DF = 0{,}8EG = 0{,}6BC = 4{,}8$ cm.



9. Aflați raza cercului care conține vârfurile unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 6 cm.

10. Aflați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic ale cărui vârfuri aparțin unui cerc cu raza de $8\sqrt{3}$ cm.

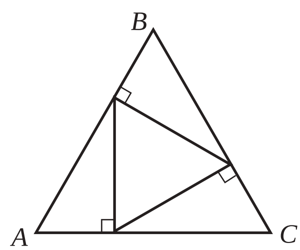


11. Examinați desenul. Aflați:

a) ED, dacă $AC = 24$ cm;

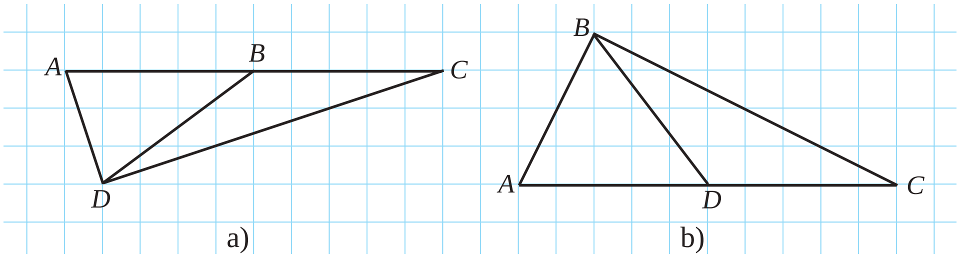
b) AC, dacă $ED = 10$ cm.

12. În triunghiul echilateral ABC a fost înscris alt triunghi echilateral (vezi desenul), ale cărei laturi sunt perpendiculare pe laturile triunghiului ABC. În ce raport vârfurile triunghiului înscris împart fiecare latură a triunghiului ABC?



13. $[BM]$ este o mediană a triunghiului ABC dreptunghic în B. Aflați aria triunghiului ABM, dacă aria triunghiului ABC este de $40\ \text{cm}^2$ și $m(\angle C) = 30°$.

14*. Examinați desenul, luând în considerare că latura unui pătrat al rețelei are lungimea de 0,5 cm. Calculați lungimea segmentului BD.
Compuneți o problemă asemănătoare.



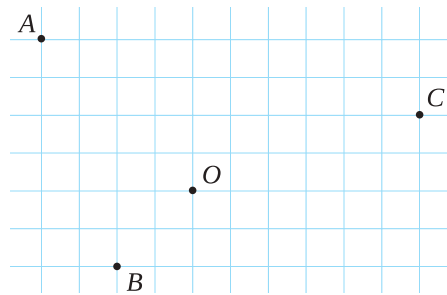
MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

15. Decupați din carton 4 figuri identice de forma unui triunghi dreptunghic cu un unghi de 30°. Formați din ele o figură de forma unui triunghi dreptunghic cu un unghi de 30°.

§ 6. Simetrii

6.1. Simetria față de un punct

1 a) Reproduceți desenul. Construiți punctele A_1, B_1, C_1, astfel încât punctul O să fie mijlocul segmentelor AA_1, BB_1, CC_1.



b) Considerând punctul O origine a unui sistem de axe ortogonale, aflați coordonatele punctelor A_1, B, B_1, C, C_1, dacă punctul A are coordonatele $(-2, 2)$.

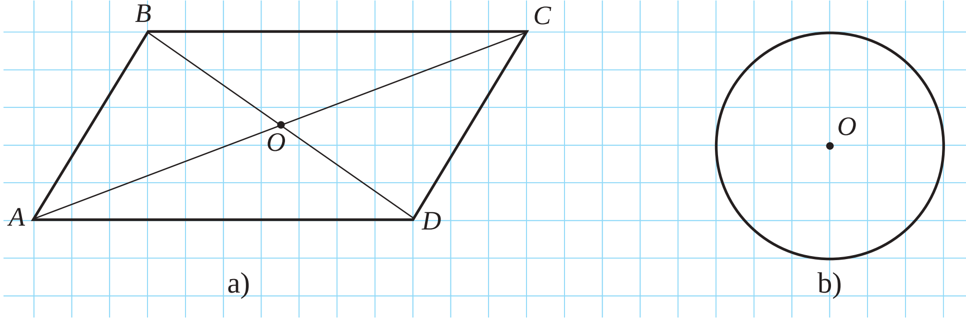
c) Ce relație există între coordonatele extremităților unui segment al cărui mijloc este originea unui sistem de axe ortogonale?

Definiții.
- Punctele A și A_1 se numesc **simetrice față de punctul** O, dacă punctul O este mijlocul segmentului AA_1. Punctul A se numește **simetricul punctului** A_1 **față de punctul** O și invers.
- **Simetrica unei figuri** F **față de un punct** O este mulțimea F_1, formată din simetricele tuturor punctelor figurii F față de punctul O. Figurile geometrice F și F_1 se numesc **simetrice față de punctul** O.

Teorema 1
Două figuri geometrice simetrice față de un punct sunt congruente.

• Fiind dat un segment AB și un punct O, explicați cum se construiește figura simetrică segmentului AB față de punctul O. Justificați aplicând teorema 1.

2 Reproduceți desenul.



Aplicând teorema 1, construiți simetrica figurii față de punctul O. Ce observați?

Definiție. Dacă o figură geometrică F coincide cu simetrica ei față de un punct O, atunci punctul O se numește **centru de simetrie al figurii** F, iar figura F se numește **central simetrică**.

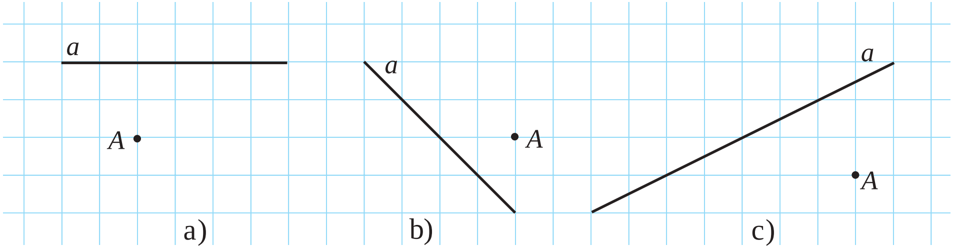
Teorema 2
Centrul cercului este centrul lui de simetrie.

Teorema 3
Punctele $A(x, y)$ și $A_1(-x, -y)$ sunt simetrice față de originea sistemului de axe ortogonale.

• Demonstrați teoremele 2–3.

6.2. Simetria față de o dreaptă

1 Reproduceți desenul. Construiți un punct A_1, astfel încât dreapta a să fie mediatoare a segmentului AA_1. Câte astfel de puncte putem construi?



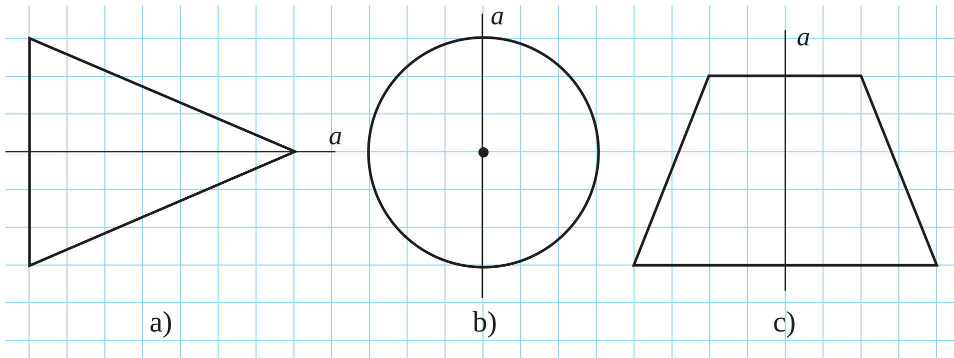
Definiții.
- Punctele A și A_1 se numesc **simetrice față de dreapta** a, dacă dreapta a este mediatoarea segmentului AA_1.
- Punctul A se numește **simetricul punctului** A_1 **față de dreapta** a și invers.
- **Simetrica unei figuri geometrice** F **față de o dreaptă** a este mulțimea F_1, formată din simetricele tuturor punctelor figurii F față de dreapta a. Figurile geometrice F și F_1 se numesc **simetrice față de dreapta** a.

Teorema 1
Două figuri geometrice simetrice față de o dreaptă sunt congruente.

• Fiind dat un segment AB și o dreaptă a, explicați cum se construiește figura simetrică segmentului AB față de dreapta a. Justificați, aplicând teorema 1.

• În ce caz simetricul unui punct față de o dreaptă va coincide cu însuși punctul?

2 Reproduceți desenul. Construiți simetrica figurii față de dreapta a. Ce observați?

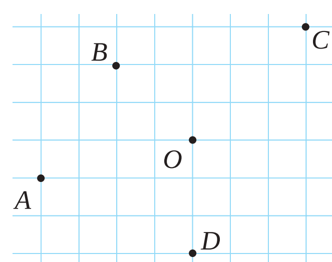


Definiție. Dacă o figură geometrică F coincide cu simetrica ei față de o dreaptă a, atunci dreapta a se numește **axă de simetrie a figurii** F, iar figura F se numește **simetrică față de dreapta** a.

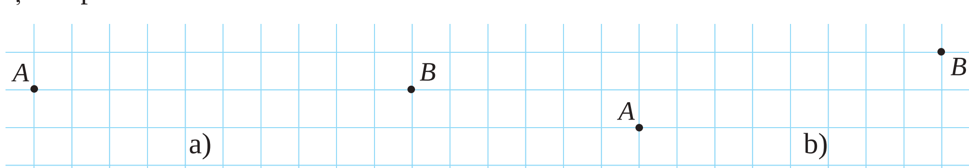
- Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:
  a) „Mediatoarea segmentului este axa lui de simetrie.”
  b) „Triunghiul isoscel este o figură simetrică.”
  c) „Unghiul nu este o figură simetrică.”
  d) „Triunghiul echilateral are o axă de simetrie.”
  e) „Cercul are mai mult de 10 axe de simetrie.”

Exerciții și probleme

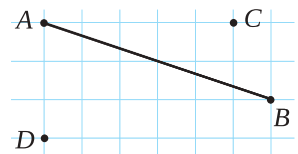
1. Reproduceți desenul. Construiți simetricele punctelor A, B, C, D față de punctul O.



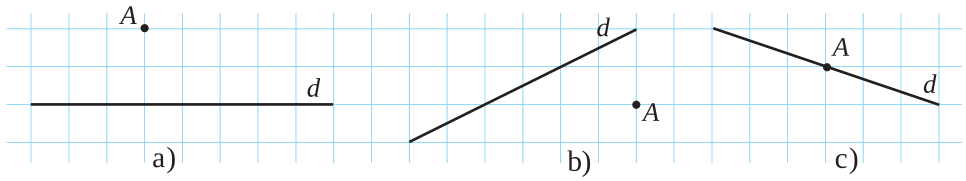
2. Reproduceți desenul. Construiți punctul O, astfel încât punctele A și B să fie simetrice față de punctul O.



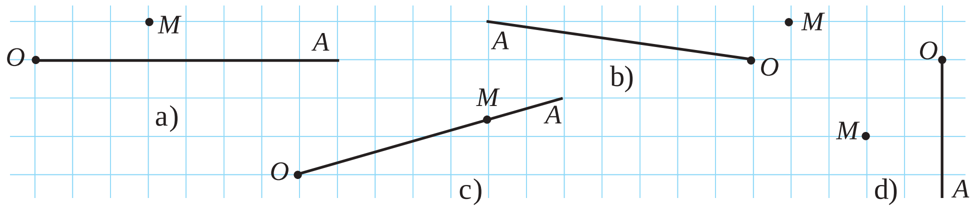
3. Reproduceți desenul. Construiți simetricul segmentului AB față de punctul:
a) C; b) D.



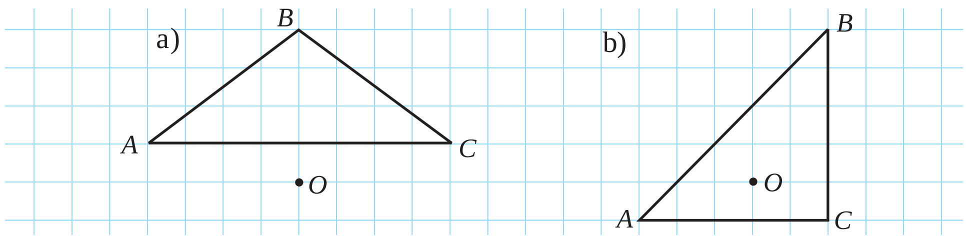
4. Reproduceți desenul. Construiți simetrica dreptei d față de punctul A.



5. Reproduceți desenul. Construiți simetrica semidreptei $[OA$ față de punctul M.

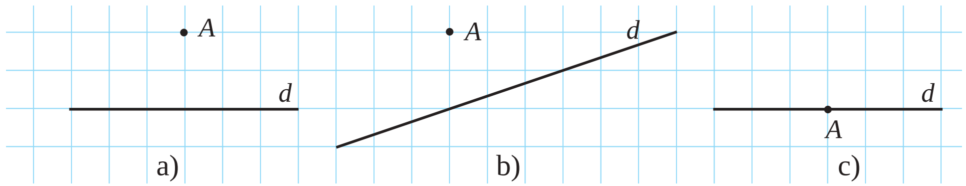


6. Reproduceți desenul. Construiți simetricul triunghiului ABC față de punctul O.

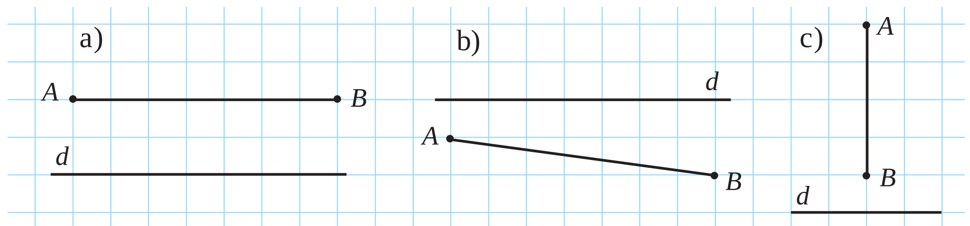


7. Aflați coordonatele simetricului punctelor A (–2, 3), B (1, 4), C (2, –7) față de originea sistemului de coordonate.

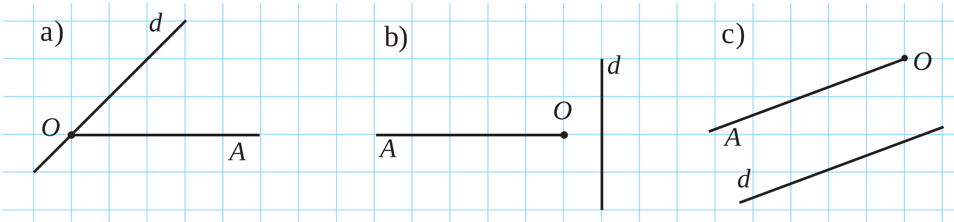
8. Reproduceți desenul. Construiți simetricul punctului A față de dreapta d.



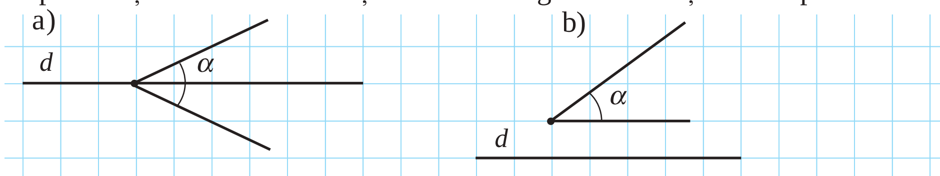
9. Reproduceți desenul. Construiți simetricul segmentului AB față de dreapta d.



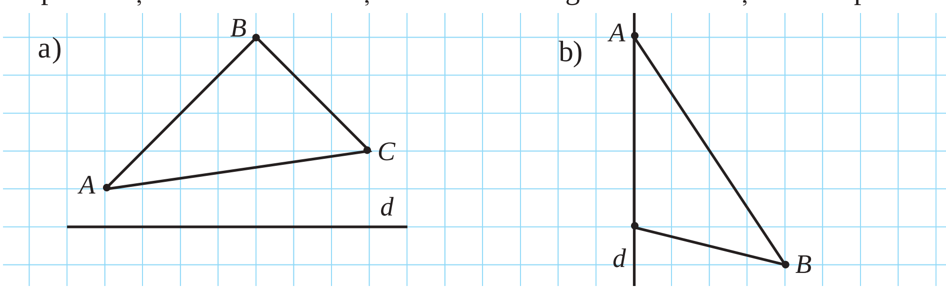
10. Reproduceți desenul. Construiți simetrica semidreptei $[OA$ față de dreapta d.



11. Reproduceți desenul. Construiți simetricul unghiului α față de dreapta d.



12. Reproduceți desenul. Construiți simetricul triunghiului ABC față de dreapta d.



13. Completați cu un număr, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată.

a) „Pătratul are ____ axe de simetrie.”

b) „Semicercul are ____ axe de simetrie.”

c) „Rombul are ____ axe de simetrie.”

d) „Triunghiul echilateral are ____ axe de simetrie.”

14. Punctele A și B sunt simetrice față de punctul M. Aflați coordonatele punctului M, dacă:

a) $A(3, 0)$ și $B(1, 4)$; b) $A(-1, 5)$ și $B(5, -1)$;

c) $A(2, 9)$ și $B(4, 7)$; d) $A(3, -11)$ și $B(0, 1)$.

15. Aflați coordonatele simetricului punctului A față de punctul B, dacă:

a) $A(1, 1)$ și $B(2, 2)$; b) $A(-2, 0)$ și $B(0, -2)$;

c) $A(2, 5)$ și $B(3, 1)$; d) $A(11, -7)$ și $B(8, -4)$.

16. Aflați coordonatele simetricului mijlocului segmentului AB față de O (0; 0), dacă:

a) $A(4, 0)$ și $B(2, 0)$; b) $A(-2, 1)$ și $B(1, -2)$;

c) $A(-5, 5)$ și $B(11, 11)$; d) $A\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ și $B(-1, 2)$.

17. Aflați simetricele punctelor $A\ (2;\ 7)$, $B\ (-3;\ 1{,}5)$, $C\ (2\sqrt{2};\ -4)$ față de:

a) axa Ox; b) axa Oy.

18. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle B) = 90°$ și $m(\angle A) = 35°$, triunghiul $A'B'C'$ – simetricul triunghiului ABC față de o dreaptă. Aflați $m(\angle A'C'B')$, dacă A' este simetricul lui A, iar B' este simetricul lui B.

19. ABC este un triunghi isoscel cu baza BC, iar AP este mediatoarea bazei. Punctele M și N aparțin, respectiv, laturilor AB și AC, astfel încât $MN \parallel BC$. Să se arate că punctele M și N sunt simetrice față de AP.

20. Punctul D este simetricul punctului B față de suportul laturii AC a triunghiului ABC. Ce tipuri de triunghiuri sunt triunghiurile BCD și ABD?

21. ABC este un triunghi cu $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$ și $BC = 4\,\text{cm}$. Punctul D este simetricul punctului B față de AC, iar punctul E este simetricul punctului C față de AB. Calculați:

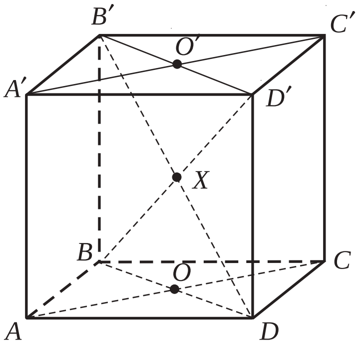
a) $EB + BC + CD$; b) $AE + AD$.

---

22. Figura formată din reuniunea dreptelor d_1, d_2, d_3 are o infinitate de centre de simetrie. Determinați poziția relativă a acestor drepte.

23. Dreptele a și b sunt simetrice față de punctul O. Dreptele c și d sunt concurente în O și intersectează dreapta a în punctele A și B, iar dreapta b – în punctele C și D. Calculați CD, dacă $AB = 12$ cm.

24. În desen este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$, $\{O\} = AC \cap BD$, $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$, $\{X\} = BD' \cap B'D$.



Numiți:

a) simetricul punctului A față de punctul O;
b) simetricul punctului B față de O;
c) simetricul punctului A' față de X;
d) simetricul punctului C' față de X;
e) simetricul punctului O față de X;
f) simetricul punctului B față de X;
g) simetricul punctului D față de X;
h) punctul față de care punctele A și C' sunt simetrice;
i) punctul față de care punctele B' și D sunt simetrice;
j) punctul față de care punctele A și C sunt simetrice.

25. Demonstrați că dacă un triunghi are două axe de simetrie, atunci el este echilateral.

Exerciții și probleme recapitulative

1. Fie triunghiul ABC. Aflați:

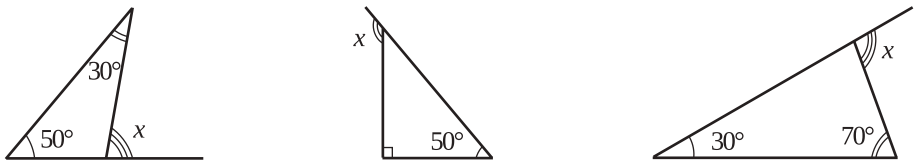
a) $m(\angle A)$, dacă $m(\angle B)=60°$, $m(\angle C)=70°$;

b) $m(\angle B)$, dacă $m(\angle A)=m(\angle C)=25°$;

c) $m(\angle C)$, dacă $m(\angle A)+m(\angle B)=100°$;

d) $m(\angle A)$, dacă $m(\angle A)=m(\angle B)=m(\angle C)$.

2. Aflați măsura unghiului notată cu x:



a) b) c)

3. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului ABC, dacă:

a) $m(\angle A)=30°$, $m(\angle B)=75°$;

b) $m(\angle A)=m(\angle B)=40°$;

c) $m(\angle A)=2m(\angle B)=70°$;

d) $\frac{2}{3}m(\angle A)=m(\angle B)=60°$.

4. *Adevărat* sau *fals*?

a) Dacă ortocentrul unui triunghi coincide cu un vârf al triunghiului, atunci acest triunghi este dreptunghic.

b) Punctul de intersecție a mediatoarelor unui triunghi obtuzunghic aparține interiorului triunghiului.

c) Centrul de greutate al triunghiului obtuzunghic nu aparține interiorului triunghiului.

5. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, iar A_1, B_1, C_1 – mijloacele laturilor BC, AC şi, respectiv, AB. Calculați:

a) AG şi BG, dacă $AA_1=12$ cm şi $BB_1=9$ cm;

b) BG şi CG, dacă $BB_1=3{,}3$ cm, $CC_1=3$ cm;

c) A_1G şi B_1G, dacă $AA_1=18$ cm şi $BB_1=15$ cm;

d) A_1G şi C_1G, dacă $AA_1=1{,}5$ cm şi $CC_1=2{,}4$ cm.

6. Punctul O este egal depărtat de laturile triunghiului ABC. Calculați:

a) măsurile unghiurilor triunghiului ABC, dacă $m(\angle BAO)=30°$, $m(\angle COA)=125°$;

b) $m(\angle BAO)$, $m(\angle COA)$, dacă $m(\angle A)=70°$, $m(\angle B)=100°$;

c) $m(\angle AOB)$, $m(\angle BOC)$, dacă $m(\angle A)=50°$, $m(\angle B)=60°$;

d) $m(\angle AOB)+m(\angle BOC)+m(\angle AOC)$.

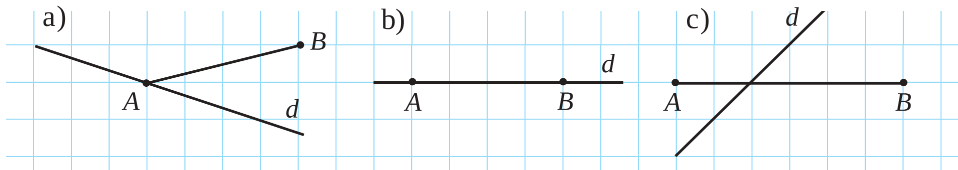
7. Aflați măsurile celorlalte două unghiuri ale unui triunghi isoscel, dacă măsura unui unghi al triunghiului este de:

a) 60°; b) 90°; c) 100°.

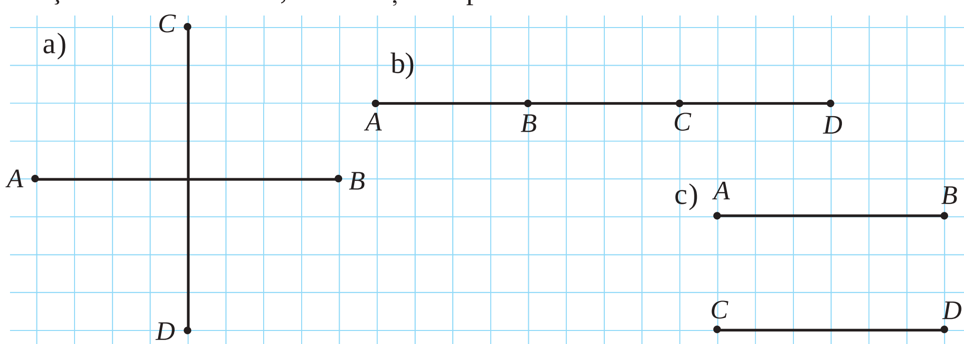
8. Stabiliți tipul triunghiului, dacă se știe că:
a) două mediane ale triunghiului sunt congruente;
b) două bisectoare ale triunghiului intersectează laturile corespunzătoare ale triunghiului în mijlocul lor;
c) o bisectoare a triunghiului este perpendiculară pe latura opusă unghiului respectiv;
d) o bisectoare a triunghiului coincide cu o înălțime, iar altă bisectoare – cu o mediană a triunghiului;
e) o mediană a triunghiului este de două ori mai scurtă decât latura corespunzătoare ei.

9. Calculați suma lungimilor liniilor mijlocii ale unui triunghi echilateral cu latura de 11 cm.

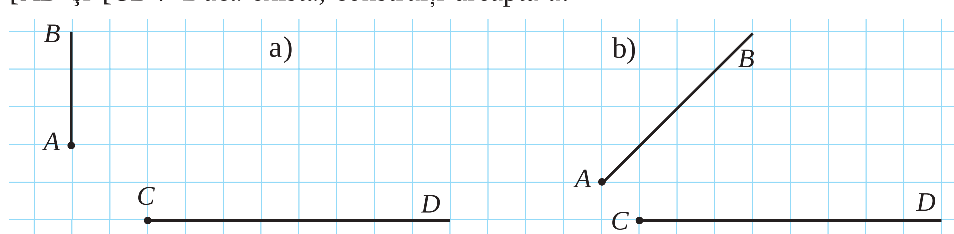
10. Reproduceți desenul. Construiți simetricul segmentului *AB* față de dreapta *d*.



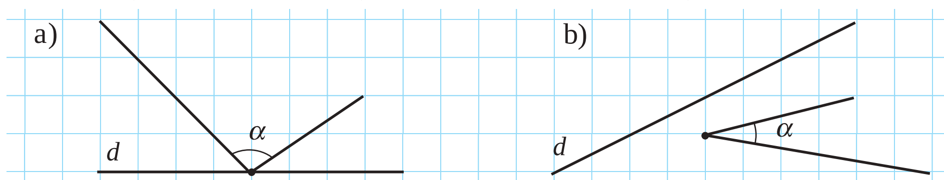
11. Reproduceți desenul. Există oare o dreaptă *d* față de care sunt simetrice segmentele *AB* şi *CD*? Dacă există, construiți dreapta *d*.



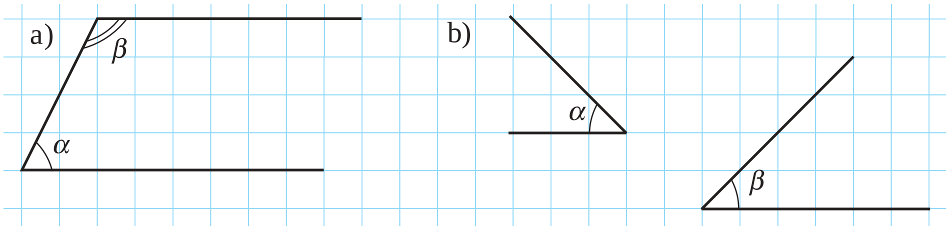
12. Reproduceți desenul. Există oare o dreaptă *d* față de care sunt simetrice semidreptele [*AB* şi [*CD*? Dacă există, construiți dreapta *d*.



13. Reproduceți desenul. Construiți simetricul unghiului α față de dreapta *d*.



14. Reproduceți desenul. Există oare o dreaptă d față de care sunt simetrice unghiurile α și β? Dacă există, construiți dreapta d.

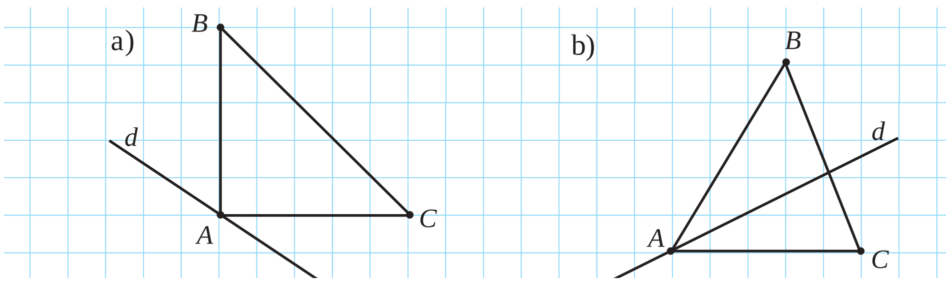


15. Scrieți unghiurile triunghiului ABC în ordinea crescătoare a măsurilor lor, dacă:

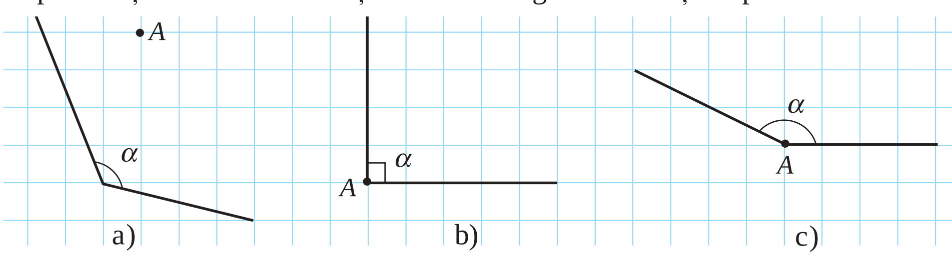
a) $AB = 9$ cm, $AC = 8{,}5$ cm, $BC = 8,(5)$ cm;

b) $AC = \sqrt{11}$ cm, $BC = 3\sqrt{2}$ cm, $AB = 2\sqrt{3}$ cm.

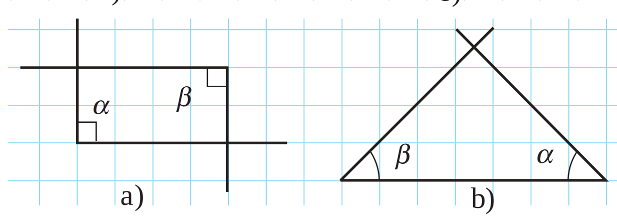
16. Reproduceți desenul. Construiți simetricul triunghiului ABC față de dreapta d.



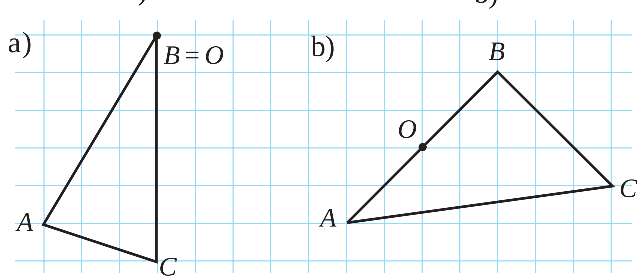
17. Reproduceți desenul. Construiți simetricul unghiului α față de punctul A.



18. Reproduceți desenul. Există oare un punct O, astfel încât unghiurile α și β să fie simetrice față de acest punct? Dacă există, construiți punctul O.



19. Reproduceți desenul. Construiți simetricul triunghiului ABC față de punctul O.



20. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului *ABC*, dacă măsurile unghiurilor lui sunt:
a) direct proporționale cu numerele 1, 2, 3;
b) invers proporționale cu numerele 1,2, 4, 6.

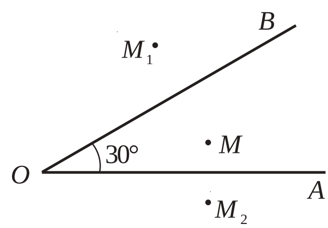
21. Fie *G* centrul de greutate al triunghiului *ABC*, iar A_1, B_1, C_1 – mijloacele laturilor *BC*, *AC* şi, respectiv, *AB*. Calculați:
a) AA_1 şi BB_1, dacă $AG = 6$ cm şi $BG = 5$ cm;
b) BB_1 şi CC_1, dacă $B_1G = 6$ cm şi $C_1G = 5$ cm;
c) A_1G şi B_1G, dacă $AG = 4{,}2$ cm şi $BG = 3{,}8$ cm;
d) AA_1 şi CC_1, dacă $AG = 1{,}2 \cdot GC = 8{,}4$ cm.

22. Aflați măsurile unghiurilor unui triunghi, dacă:
a) măsurile a două dintre unghiurile exterioare ale lui sunt egale cu 70° şi 160°;
b) măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului sunt direct proporționale cu numerele 11, 12, 13.

23. Fie $[AM]$ şi $[BN]$ bisectoare ale triunghiului echilateral *ABC* cu latura de $4\sqrt{5}$ cm. Aflați perimetrul triunghiului *CMN*.

24. Triunghiul *ABC* este isoscel, cu baza $[AB]$ de 8 cm. Aflați raza cercului circumscris triunghiului *AMC*, dacă *M* este mijlocul laturii *AB*, iar perimetrul triunghiului *ABC* este de 30 cm.

25. Punctul *M* aparține interiorului unghiului *AOB* de 30°, punctele M_1 şi M_2 sunt simetricele punctului *M* față de laturile unghiului *AOB*. Aflați $m(\angle M_1OM_2)$ şi perimetrul triunghiului M_1OM_2, dacă $OM = 10$ cm.



26. Punctul *O* este egal depărtat de vârfurile triunghiului isoscel *ABC* cu baza *AB*. Aflați $m(\angle OBA)$, dacă $m(\angle OAC) = 20°$.

27. Demonstrați că suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui triunghi este egală cu 360°.

28. Punctele A_1, B_1, C_1 sunt simetricele punctelor *A*, *B* şi, respectiv, *C* față de punctul *O*. Demonstrați că dacă punctele *A*, *B*, *C* sunt coliniare, A_1, B_1, C_1 de asemenea sunt coliniare.

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

29. Decupați din carton o figură de forma unui triunghi dreptunghic. Tăiați figura în 3 figuri în formă de triunghi fiecare şi formați din ele:
a) un dreptunghi; b) un romb.

PENTRU CAMPIONI

30. Punctul E aparține interiorului pătratului $ABCD$, astfel încât triunghiul DEC este isoscel şi $m(\angle DEC)=150°$. Determinați tipul triunghiului AEB.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 minute

Varianta 1		Varianta 2
1. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului ABC, dacă: $m(\angle A)=60°$, $m(\angle B)=20°$.	**2 p**	**1.** Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului ABC, dacă: $m(\angle B)=30°$, $m(\angle C)=80°$.
2. Medianele AM şi CN ale triunghiului ABC se intersectează în punctul X. Aflați perimetrul triunghiului AXC, dacă $AM=30$ cm, $CN=24$ cm şi $AC=25$ cm.	**2 p**	**2.** Medianele AM şi CN ale triunghiului isoscel ABC, cu baza BC, se intersectează în punctul X. Aflați perimetrul triunghiului AXN, dacă $AM=27$ cm, $CN=24$ cm şi $AC=26$ cm.
3. Aflați înălțimea unui triunghi echilateral ABC ştiind că punctul M aparține interiorului triunghiului ABC şi $AM=BM=CM=8$ cm.	**3 p**	**3.** Aflați la ce distanță de la fiecare vârf al triunghiului echilateral cu înălțimea de 8 cm este situat punctul P, dacă $PA=PB=PC$.
4. Scrieți laturile unghiului ABC în ordinea descrescătoare a lungimilor lor, dacă: $\frac{m(\angle A)}{m(\angle B)}<0{,}9$, $\frac{m(\angle C)}{m(\angle B)}>1{,}1$.	**3 p**	**4.** Scrieți unghiurile triunghiului ABC în ordinea crescătoare a măsurilor lor, dacă: $\frac{AB}{AC}>1{,}2$, $\frac{BC}{AC}<0{,}8$.

Răspunsuri și indicații

Algebră

Capitolul 1. §1. 3. a) $\frac{21}{14}=\frac{7}{2}$; $\frac{4}{18}=\frac{8}{36}$; $\frac{5}{10}=\frac{4}{8}$; $\frac{6}{8}=\frac{18}{24}$; b) $\frac{18}{27}=\frac{6}{9}$; $\frac{12}{16}=\frac{60}{80}$; $\frac{5}{8}=\frac{20}{32}$; $\frac{16}{28}=\frac{64}{112}$.
4. a) $\frac{5}{6}=0,8(3)$; $1\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$; $-\frac{12}{5}=-2,4$; $-2\frac{1}{5}=-2,2$; $-2,(2)=-\frac{20}{9}$; b) $\frac{3}{4}=0,75$; $-\frac{21}{24}=-\frac{7}{8}$; $-0,75=-\frac{6}{8}$; $1,(3)=\frac{4}{3}$; $\frac{7}{8}=0,875$. **5.** a) 4,(1234); –3,(5); –9,878787...; b) 0,0(21); 16,6363121212...
6. a) $\frac{2}{5}=0,4$; $\frac{16}{3}=5,(3)$; $-2\frac{3}{8}=-2,375$; $1\frac{3}{7}=1,(428571)$; $\frac{3}{16}=0,1875$; $-\frac{4}{9}=-0,(4)$; $\frac{25}{90}=0,2(7)$; $-\frac{101}{90}=-1,1(2)$; b) $\frac{1}{8}=0,125$; $\frac{14}{9}=1,(5)$; $-3\frac{5}{6}=-3,8(3)$; $2\frac{5}{7}=2,(714285)$; $\frac{7}{18}=0,3(8)$; $-\frac{7}{9}=-0,(7)$; $\frac{34}{900}=0,03(7)$; $\frac{21}{990}=0,0(21)$. **7.** a) $0,6=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=\frac{12}{20}=\frac{18}{30}$; b) $0,3=\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=\frac{9}{30}=\frac{12}{40}$; c) $2,4=2\frac{4}{10}=\frac{24}{10}=\frac{12}{5}=\frac{36}{15}=\frac{48}{20}$; d) $1,8=1\frac{8}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}=\frac{27}{15}=\frac{36}{20}$. **8.** a) $0,16=\frac{4}{25}$; $-3,14=-3\frac{7}{50}$; $0,(8)=\frac{8}{9}$; $-5,(7)=-5\frac{7}{9}$; $0,3(5)=\frac{16}{45}$; $8,21(6)=8\frac{13}{60}$; $-4,97(35)=-4\frac{4819}{4950}$; b) $-0,72=-\frac{18}{25}$; $5,36=5\frac{9}{25}$; $-0,(42)=-\frac{21}{50}$; $-3,(18)=-3\frac{2}{11}$; $0,5(3)=\frac{8}{15}$; $12,3(45)=12\frac{19}{55}$; $-7,6(543)=-7\frac{2179}{3330}$. **13.** a) 287546 dm; b) 28754,6 m; c) 28,755 m. **14.** a) 22,1 g; b) 0,022 kg.
16. a) $64\frac{981}{990}$; b) $\frac{418}{500}=\frac{209}{250}$. **17.** a) $n\in\{3; 9\}$; b) $n=11$.

§2. 7. $a=8,91$. **8.** a) Fals; b) adevărat; c) fals; d) fals. **9.** a) $5\frac{5}{6}$; b) 8,(8). **11.** a) Adevărat; b) fals. **12.** a) $S=\{3,8; -10,8\}$; b) $S=\{14,76; 21,24\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\{2\}$. **13.** a) 16; b) –11,5. **14.** Schickard. **15.** Cel mai repede se mişcă ghepardul, iar cel mai încet – cangurul. **16.** a) $x>y$; b) $x>y$; c) $x<y$; d) $x<y$. **17.** a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}$; c) $\frac{2}{3}, 1, 2$; d) $\frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}$. **20.** De exemplu: 2, 5, –10, 4, 3.

§3. 1. a) $1\frac{1}{6}$; b) $-\frac{1}{5}$; c) $\frac{5}{21}$; d) $-\frac{3}{16}$; e) $\frac{1}{45}$; f) $-2\frac{19}{60}$. **2.** a) 45,294; b) –4,903; c) –12,857; d) 5,76(1); e) –13,463(54); f) 111111,111. **3.** a) $6\frac{151}{175}$; b) $\frac{67}{550}$; c) 1,(1); d) –13,8(6). **4.** a) $\frac{7}{20}$; b) $\frac{3}{4}$; c) 1,5; d) 3,4. **5.** a) $\frac{7}{9}$; b) $-\frac{2}{3}$; c) $-1\frac{2}{7}$; d) $4\frac{1}{3}$. **7.** a) 2,18; b) –5,65; c) –7,5; d) 9,6. **9.** a) $1\frac{53}{210}$; b) 1; c) 0,009; d) 4,3. **12.** a) Prețurile sunt egale; b) $\frac{31,1}{5}<\frac{21,78}{3}$, deci prețul făinii din pachetul de 5 kg este mai mic. **13.** 3. **14.** 365. **15.** 437. **16.** $\frac{25}{76}$. **17.** $\frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{49}{98}$.
18. Folosim numerele 11, 12 şi 21.

21	7	12	27	13
6	20	11	11	32
22	23	16	9	10
12	21	21	12	14
19	9	20	21	11

§4. 4. a) $1\frac{1}{5}$; b) $-0,5^6$. **6.** a) 1331 lei; b) 7320,5 lei. **7.** 480. **9.** a) 62,8; b) –33,3. **10.** a) 4; b) 1. **11.** De exemplu: a) $2^6\cdot 5^6$; b) $2^5\cdot 10^5$; c) $5^5\cdot 6^5$. **12.** a) 6; b) 1; c) 6. **13.** 2012. **14.** a) $94041648\cdot 10^5$ km.

§5. **1.** a) 2,04; b) $\frac{4}{5}$; c) 3; d) 2,04. **2.** a) $S=\{10,4\}$; b) $S=\{-3,1\}$; c) $S=\{2,2\}$; d) $S=\{16,7\}$; e) $S=\{-4,16\}$; f) $S=\{3,6\}$; g) $S=\{0,48\}$; h) $S=\{9,55\}$. **3.** a) 5; b) 4. **4.** 0,88. **5.** 19,4. **6.** a) 4,2; b) 9,4. **7.** 3,2 lei. **8.** a) 4; b) 1,52; c) 21,(18); d) $12\frac{31}{37}$. **9.** 10 cm. **10.** 4000 lei. **12.** a) $S=\{-7; 7\}$; b) $S=\left\{-\frac{5}{9}; \frac{5}{9}\right\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\{2,99; 3,01\}$; e) $S=\{-0,4; 0,4\}$; f) $S=\{4,75; 5,25\}$. **13.** Problema are 2 soluții: $A(9,2)$, $B(-4,6)$ sau $A(-9,2)$, $B(4,6)$. **14.** Problema are 2 soluții: $A(6,93)$, $B(-7,79)$ sau $A(-6,93)$, $B(7,79)$. **15.** $a=1$, $b=6$. **16.** *Indicație.* $n^5-5n^3+4n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$. **17.** 2178. **19.** 3. **20.** a) 1; b) 1.

Capitolul 2.

§1. **6.** a) $S=\{\pm 3\}$; b) $S=\{\pm 5\}$; c) $S=\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$; d) $S=\varnothing$; e) $S=\varnothing$; f) $S=\{0\}$. **7.** a) 1,7; b) 3,5; c) 0,44; d) 0,72. **8.** a) $\sqrt{8}<3$; b) $9<\sqrt{90}$; c) $3,4>\sqrt{10}$; d) $\sqrt{19}<4,5$; e) $\sqrt{39}>6,2$. **9.** a) 23,45; b) 18,08; c) 89,12; d) 70,09. **13.** a) $\frac{16}{81}$; b) $\frac{49}{81}$; c) $53\frac{7}{9}$; d) 3,36(1); e) 0,07(1); f) $6\frac{3}{121}$. **14.** a) ≈14 cm; b) ≈17 cm; c) ≈15 cm; d) ≈24 cm. **15.** a) 18,(7) cm^2; b) $6\frac{43}{81}$ cm^2; c) 8,7 cm^2; d) 3,(7) cm^2. **16.** a) $\frac{2}{3}$; b) $5\frac{1}{3}$; c) $1\frac{2}{3}$; d) $2\frac{2}{3}$; e) $7\frac{1}{3}$; f) $6\frac{1}{3}$. **17.** a) $\frac{17}{30}$; b) $\frac{23}{30}$.

§2. **2.** b) $\sqrt{71}>-\sqrt{80}$; c) $-\sqrt{\frac{5}{6}}<1$; d) $\sqrt{2}+3>-3\sqrt{2}$. **3.** a) +; b) –; c) –; d) –. **4.** a) $-\sqrt{5}$; c) $-2+\sqrt{3}$; e) $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$; f) $6+2\sqrt{2}$. **5.** a) $-5\sqrt{3}$; $-3\sqrt{5}$; 3,(5); b) $-\frac{7}{4}$; $\sqrt{\frac{4}{7}}$; $\frac{4}{7}$; c) $\sqrt{20}$; $4\frac{1}{2}$; $4\frac{2}{3}$. d) $-8\frac{1}{3}$; –8,3(1); –8,1(3). **8.** c) $-2\sqrt{10}$; $2\sqrt{10}$; d) $-1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5}$. **9.** a) $4-\sqrt{7}$; b) $9-\sqrt{80}$; c) $2\sqrt{3}-\sqrt{6}$; d) $5-\sqrt{20}$. **11.** a) $|x|<\sqrt{6}$; b) $|x|<\frac{1}{6}$; c) $|x|>3$; d) $|x|>2,4$. **12.** a) $x<\frac{4}{5}$; b) $|x|<\sqrt{11}$; c) $|x|>2$; d) $|x|\geq\frac{1}{3}$. **13.** *Indicație*. Numerele sunt egale. **14.** a) $BD=\sqrt{5}$ cm; b) $FG=2\sqrt{3}$ cm.

§3. **1.** a) 5,79; b) 4,604; c) 0,77; d) 4,9. **2.** a) ≈ 4; b) ≈ –0,7; c) ≈ 4,76; d) –0,3(6). **3.** b) $-2\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; $0,3\sqrt{5}$; $7\sqrt{5}$; c) $\sqrt{0,3}$; $2\sqrt{0,3}$. **5.** a) $\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{6}$; c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; d) $\sqrt{5}$. **6.** a) 9; b) –8; c) 6; d) 15. **7.** a) 2; b) –7; c) 6; d) 11. **8.** d) 147; e) $2,1^5$; f) 27. **9.** a) 8; b) 9; c) 0,25; d) 0,0001. **10.** a) $2\sqrt{6}$; b) $3\sqrt{7}$; c) $7\sqrt{2}$; d) $4\sqrt{6}$; e) $10\sqrt{2}$; f) $6\sqrt{3}$. **11.** a) $\sqrt{12}$; b) $\sqrt{18}$; c) $\sqrt{180}$; d) $-\sqrt{150}$; e) $-\sqrt{112}$; f) $\sqrt{147}$. **12.** b) $-3\sqrt{5}>-4\sqrt{3}$; d) $\frac{2}{\sqrt{10}}<\frac{4}{\sqrt{20}}$; f) $\sqrt{5}-2>3\sqrt{5}-9$. **13.** a) $-11\sqrt{2}$; b) $4,6\sqrt{3}$; c) $-5\sqrt{5}$. **14.** a) $33\sqrt{10}$; b) $23\sqrt{6}$; c) $-96\sqrt{21}$; d) $39\sqrt{3}$. **15.** a) –811; b) 32,(6). **16.** $34\sqrt{5}$ cm. **17.** $33\sqrt{3}$ cm. **18.** a) $S=\{\pm 4\}$; b) $S=\{\pm 0,87(1)\}$; c) $S=\{0\}$; d) $S=\varnothing$; e) $S=\{\pm 3\}$; f) $S=\{0, \sqrt{5}\}$. **19.** a) $7\sqrt{11}-10\sqrt{7}$. **20.** $x=2$, $y=1$, $z=-3\sqrt{7}$.

§4. **1.** a) $A\cup B=\{-5, -2, 3, 7, 9\}$, $A\cap B=\{-5, 3, 7, 9\}$, $A\setminus B=\{-2\}$, $B\setminus A=\varnothing$. **2.** a) $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $B=\{-8, -7, ..., 7, 8\}$; c) $C=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. **5.** a) 25; b) 72; c) 19. **8.** a) $A\cap B$ este mulțimea pătratelor. **9.** a) $[AE]$; b) $[AF]$; c) $[CD]$; d) $\varnothing$. **10.** a) {1, 2, 4, 8}; b) {3, 6, 12, 24, 48}; c) {1, 2, 5, 10, 25, 50}; d) {1, 3, 5, 15}; e) M_{15}. **11.** a) $m=2$, $n=5$; b) $m=-8$, $n=9$; c) $m=11$, $n=5$; d) $m=6$, $n=9$. **12.** a) 9; b) 14; c) 0. **13.** a) $A=\{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$, $B=\{2, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $A=\{d, e, f, g, h\}$, $B=\{a, b, c, e, g\}$. **14.** a) $A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{3, 5\}$; b) $A=\{a, b, c\}$, $B=\{a, b\}$; c) $A=\{3, 4, 6, 7\}$, $B=\{5, 6, 7\}$. **15.** 5. **16.** 25. **17.** 40%. **18.** a) $A\subset B$; b) $B\subset A$; c) $A\cap B=\{10, 20, 50, 100\}$. **19.** 7. **20.** 19. **21.** 55%. **22.** 20. **23.** 315. **24.** 120. **25.** 10.

Exerciții și probleme recapitulative. **10.** a) $6+\sqrt{6}$, $6\frac{1}{6}$, $6-\sqrt{6}$, $\frac{\sqrt{6}}{6}$, $-\frac{6}{\sqrt{6}}$, $\sqrt{6}-6$, $-6,(6)$, $-6\sqrt{6}$; b) $7\sqrt{5}$, $5\sqrt{7}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{7}$, $-\frac{7}{5}$, $-\frac{5}{\sqrt{7}}$, $-5\sqrt{7}$, $-7\sqrt{5}$. **11.** a) 8; b) –21; c) 2; d) –1; e) $-1\frac{6}{7}$; f) 5; g) 6; h) $\frac{2}{3}$. **14.** a) $\frac{8}{15}$; b) 0,9(7); c) $\frac{7\sqrt{3}}{8}$; d) 6. **15.** $20\sqrt{5}$ cm. **16.** $4\sqrt{3}$ cm. **17.** 24 cm^2. **18.** a) 1; b) –2. **19.** a) 1; b) 1. **20.** a) –1; b) $\frac{1}{6}$; c) 2. **21.** a) 0; b) 4; c) $8\sqrt{3}$. **22.** a) $1-\sqrt{2}$; b) $\sqrt{2}$. **23.** a) 4; b) 3. **24.** 2,5. **25.** 4,5.

Capitolul 3.

§ 1. **2.** a) $B(3; 1)$, $C(-1; 1)$, $D(1{,}5; 1)$, $E(2; -1)$; b) $F(-1{,}5; -1)$, $G(0; 3{,}5)$, $H(-2{,}5; -1)$, $I(-1{,}5; 3)$; c) $J(2{,}5; 4)$, $K(4; -1)$, $L(-0{,}5; -1{,}5)$, $M(-2; 0)$; d) $N(0; -1)$, $P(-2; -2{,}5)$, $Q(-3{,}5; 3{,}5)$, $R(2{,}5; -2{,}5)$. **3.** $C(-1; -0{,}5)$, $O(0; 0)$, $D(1; 0{,}5)$, $E(2; 1)$. **4.** $A(3; 0)$, $B(1{,}5; 1)$, $C(0; 2)$, $D(-1{,}5; 3)$. **5.** a) I; b) IV; c) II; d) III. **6.** a) Punctele aparțin dreptei care este paralelă cu axa Oy și care trece prin punctul $A(2; 0)$. **7.** a) 5 u.l.; b) 25 u.l.; c) 10 u.l.; d) 17 u.l.; e) 29 u.l. **8.** a) $M(2; 4)$; b) $M(2; 2)$; c) $M(0; 3)$; d) $M(-6; 9)$. **9.** a) $A(-3; 4)$; b) $A(12; -10)$; c) $A(6; 6)$; d) $A(-9; -2{,}5)$. **10.** a) $C(1; 0)$, $D(3; 0)$ sau $C(1; 8)$, $D(-3; 8)$; b) $C(5; 0)$, $D(2; 0)$ sau $C(5; -6)$, $D(2; -6)$. **11.** a) 45 de unități pătrate; b) 24 de unități pătrate. **12.** a) $(-2, \sqrt{5})$; b) (7,4; 4); c) (0,6; –8,1); d) (–13; –10). **13.** a) $\left(3\frac{1}{4}; -4\right)$; b) (6; 5); c) (–0,35; 8); d) (–85; 58). **14.** a) 21 de unități pătrate; b) 54 de unități pătrate.

§ 2. **1.** a)

–3	2	0	1	5
3	–2	0	–1	–5

b)

–2	–1	0	1	2	3
–8	–1	0	1	8	27

2. Da. **3.** Da. **4.** a) Da; b) nu; c) nu. **5.** Nu. **10.** a) $f: B\to A$, $f(x)=-x$; b) $f: A\to B$, $f(x)=\frac{1}{x}$; c) $f: \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$; d) $f: \{x \mid |x|<7, x\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=\sqrt{x}$. **11.** a) –9,6; b) 14; c) $4\sqrt{2}$; d) –6,5. **12.** a) 4; b) –2,5; c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; d) $1\frac{7}{8}$. **13.** a)

x	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

b)

x	0	1	4	9	16	25
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

c)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	–1	0	1	2	3	4	5	6	7

d)

x	–6	–4	–2	0	2	4	6	8
$f(x)$	–18	–12	–6	0	6	12	18	24

14. a) $f(x)=0{,}1x$; b) $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$; c) $f(x)=x+0{,}6$; d) $f(x)=2^x$. **15.** a) $f(x)=5-x$; b) $f(x)=-|x|$; c) $f(x)=\frac{6}{x}$; d) $f(x)=-\sqrt{x}$. **16.** F_i este format din $\left(\frac{i+1}{2}\right)i$ puncte. Astfel, obținem: 15; 55; 120. **17.** a) 2; 0,3; b) –4; –6; –8. **18.** $f(x)=x-\left[\frac{x}{10}\right]\cdot 10$.

§ 3. **5.** a) Da; b) nu; c) da. **9.** $f: \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$; b) $f: \mathbb{R}_-\to\mathbb{R}$, $f(x)=-1{,}5$; c) $f: \mathbb{R}_-\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x$. **10.** a) $A(3, 0)$; b) $A(2, 0)$; c) $A(2; 0)$, $B(-2; 0)$; d) $A(2{,}3; 0)$, $B(-2{,}3; 0)$. **11.** a) Da; b) da; c) nu. **12.** a) Graficul este simetric față de axa Oy; b) graficul este simetric față de $O(0, 0)$. **13.** a) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$; b) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|-1$; c) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2{,}5-|x|$.

§ 4. **4.** a) $A(0; 8)$, $B(-10; 0)$; b) $A(0; -6)$, $B(-2; 0)$; c) $A\left(0; \frac{1}{5}\right)$, $B\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$; d) $A(0; 2)$, $B(-\sqrt{2}; 2)$. **6.** a) I, III; b) II, IV; c) I, III; d) I, IV. **7.** Toate. **8.** $m=1{,}6-0{,}1t$, unde t este timpul. **9.** $r=20-3x$, unde x este numărul de caiete. **11.** Viteza primei persoane. **12.** a) $f(x)=\frac{1}{2}x-1$; b) $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$; c) $y=-x+\sqrt{3}$; d) $f(x)=2x-4{,}5$. **13.** a) Drepte paralele; b) drepte concurente; c) drepte paralele;

d) drepte paralele. **14.** a) Obtuz; b) ascuțit; c) ascuțit; d) obtuz. **15.** a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=0{,}8x-2$; b) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+4=0$. **17.** a) $f(x)=3x-2$; b) $f(x)=-3x+8$. **18.** a) $A(2;\ -2)$; b) $A(1;\ -1)$.

Exerciții și probleme recapitulative. **3.** a) $f(a)=1$; $f(c)=3$; $f(d)=4$; $g(2)=6$; $g(3)=8$; $g(4)=6$; b) $h(1)=0$; $h(4)=1$; $h(5)=5$; $t(a)=f$; $t(d)=j$; $t(e)=i$. **4.** a) $f(c)=3$; $g(2)=g(4)=6$; b) $h(3)=h(5)=5$; $t(a)=f$. **5.** a)

x	1	3	5
$f(x)$	4	10	16

b)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	4	2	0	2	4

c)

x	–3	–2	1	2	3
$f(x)$	3	2	–1	–2	–3

d)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	8	3	0	–1	0	3	8

6. a) $f(1)=\frac{1}{15}$; $f(3)=\frac{1}{5}$; $f(5)=\frac{1}{3}$; b) $f(1)=1$; $f(3)=-1$; $f(5)=-3$; c) $f(1)=3$; $f(3)=1$; $f(5)=-1$; d) $f(1)=3$; $f(3)=5$; $f(5)=7$. **7.** a) $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(x)=2x^2$; b) $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=-x$; c) $f\colon \mathbb{Q}^*\to\mathbb{Q},\ f(x)=\frac{1}{x}$; d) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{|x|}$. **8.** a) $E=\left\{-\frac{1}{2};\ -1;\ \frac{1}{7};\ \frac{1}{5}\right\}$; b) $E=\{2;\ 1;\ 0;\ -1\}$; c) $E=\{0\}$; d) $E=\mathbb{R}_+$. **11.** a) $f\colon \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}\to\mathbb{N},\ f(x)=x^2$; b) $f\colon \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}\to\mathbb{N},\ f(x)=2x$; c) $f\colon \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=2x$; d) $f\colon \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}\to\mathbb{Q},\ f(x)=\frac{1}{x}$. **14.** a) $A\left(\frac{1}{5};\ 4\right)$; b) $B\left(\frac{1}{3};\ -6\right)$; c) $C\left(-\frac{1}{4};\ -3\right)$; d) $D\left(\frac{3}{5};\ -1\right)$. **15.** c). **18.** a) $f\colon \{-5;\ -3;\ -1;\ 3;\ 5\}\to\mathbb{Q},\ f(x)=-\frac{1}{15}x$; b) $f\colon \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=1-x$; c) $f\colon \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}\to\mathbb{N},\ f(x)=3-x$; d) $f\colon \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}\to\mathbb{N}$, $f(x)=|x|+1$. **19.** a) $f(x)=2x-1$; b) $f(x)=2x+3$; c) $C(4;\ -15)$; d) $D(-5;\ 3)$. **22.** a) $A(4;\ 4)$; b) nu conține; c) $A(-25;\ -25)$; d) Punctele $M(a,\ a),\ a\in\mathbb{R}_+$. **23.** a) $f(x)=\frac{3}{25}x$; b) $f(180)=21{,}6l$; $f(0{,}5)=0{,}06l$; $f(200)=24l$; c) 37,5; 5; $4\frac{1}{6}$. **25.** a) $S(x)=\begin{cases}24, & x\le 300;\\ 24+(x-300)\cdot 0{,}096, & x>300;\end{cases}$ $E(x)=\begin{cases}6, & x\le 200;\\ 6+(x-200)\cdot 0{,}24, & x>200.\end{cases}$ b) $S(100)=24$; $S(400)=33{,}6$; $E(100)=6$; $E(250)=18$; $E(300)=30$; $E(400)=54$.

Capitolul 4. **§1.** **3.** a) $5x-4y$; b) $a-2b-2$; c) $3\sqrt{2}x$; d) $1{,}5a+0{,}5b$. **4.** $15xy$; b) $6ab$; c) $2x^2y$. **5.** a) $5xy+2{,}5xy$; b) $-\frac{1}{5}x^2+\left(-\frac{1}{5}x^2\right)$; c) $-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}y$; d) $-4x+5x$. **6.** a) $-0{,}5x^3y^2$; b) $3a^3b^3$; c) $-\sqrt{2}x^3y^2$; d) $-6a^4b^3$. **7.** a) $4y$; b) $\frac{2}{3}xy^3$; c) $-0{,}02a^3$; d) $2{,}8a^3b^2$. **8.** a) $4a^6b^2$; b) $81x^4y^8$; c) $\frac{1}{27}x^{15}y^3$; d) $\frac{1}{64}a^4b^{20}$. **10.** a) $3xy^2$; b) $5a^2$; c) $0{,}1x^4y$; d) $\frac{1}{3}ab^2$. **11.** a) $-10x^2-5x+1$; b) $ax^2+1{,}2ax-a^2x+a^2$. **12.** a) $2x^2y$; b) $9a^2b^3$; c) $\frac{1}{3}x^2y^8$; d) $6a^5b^5$. **13.** a) $6{,}65x+5{,}5y$; b) $3{,}8a+9\sqrt{3}y$. **14.** 30. **15.** De $\frac{5}{3}$ ori. **16.** De 1,8 ori. **17.** 5 și 62.

§2. **1.** a) $xy+xz$; b) $yz-xz$; c) $6ab-2ac$; d) $-x^2-\frac{1}{2}xy$. **2.** a) $xu+xv+yu+yv$; b) $ux+uy-vx-vy$; c) $ac-ad-bc+bd$; d) $bx+by-ax-ay$. **3.** a) –9; b) 6; c) 3; d) $3\frac{13}{16}$. **4.** 4 cm^2. **5.** a) $x^3y-\frac{1}{3}x^2y^3$; b) $\frac{4}{3}xy^4+2x^3y^2$; c) $5x^3+0{,}5x^2y-10y^2x-y^3$; d) $x^3y+\frac{1}{4}x^5+\frac{4}{3}y^2+\frac{1}{3}yx^2$. **6.** a) $2a^3+(6-\sqrt{3})a^2-5\sqrt{3}a+3$; b) a^3-b^3; c) $2b^3-3b^2+1$; d) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$. **7.** a) $6m(n+1)$; b) $3b(4y-3)$; c) $5x(3a+4b)$; d) $7y^3(y^2+3)$; e) $(x-1)(4x+1)$; f) $(x-2)(9-y)$; g) $(a-b)(5+ay-by)$. **8.** Aria dreptunghiului este cu 10 cm^2 mai mică. **9.** Perimetrul dreptunghiului este cu $4\sqrt{3}$ cm mai mic. **10.** a) $5x^2y(2xy-5y)=10x^3y^2-25x^2y^2$; b) $-7ax\left(-\frac{1}{7}a+2a^2x\right)=$

$=a^2x-14a^3x^2$; c) $-\frac{1}{12}xy\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{4}{3}y^2\right)=-\frac{1}{16}x^3y+\frac{1}{9}xy^3$; d) $\frac{5}{6}a^2b\left(\frac{6}{5}b+6\right)$. **11.** a) $5ab(a-5b)$; b) $-6x^4y^4(3y+4x)$; c) $-xy(2-3x^2)$; d) $8y(2xy^3+3)$. **12.** 18, 19, 20. **13.** a) $5(x-y)^2$; b) $(x-3)(y-2)$; c) $(x-y)(3-y)$; d) $(b+1)(2a+b)$. **14.** 9 cm^2. **15.** a) x^3y-xy^4; b) $7ab^3$. **16.** 1 şi 7. **18.** 50 de bani. **19.** $\frac{99}{100}$.

§ 3. **2.** a) $4x^2-12xy+9y^2$; b) $9a^2+30ab+25b^2$; c) $3x^2-2\sqrt{6}xy+2y^2$; d) $\frac{1}{9}a^2+\frac{4}{3}ax+4x^2$; e) $3+6\sqrt{3}b+9b^2$; f) $\frac{b^2}{16}-\frac{1}{6}ab+\frac{a^2}{9}$. **4.** a) $(7y+8a)(7y-8a)=49y^2-64a^2$; b) $(5x-\sqrt{7}y)(5x+\sqrt{7}y)=25x^2-7y^2$; c) $(5y-3b)(5y+3b)=25y^2-9b^2$; d) $(0{,}6a+\sqrt{2}b)(0{,}6a-\sqrt{2}b)=0{,}36a^2-2b^2$. **5.** a) $(3a+7)^2=9a^2+42a+49$; b) $(6a-5b)^2=$ $=36a^2-60ab+25b^2$; c) $(4x-3y)^2=16x^2-24xy+9y^2$; d) $(\sqrt{6}b+\sqrt{2}a)^2=6b^2+4\sqrt{3}ab+2a^2$. **6.** a) $(9-4\sqrt{5})$ cm^2; b) $(13+4\sqrt{3})$ cm^2. **7.** 32; **8.** 43. **9.** 8 cm. **10.** 12 cm. **13.** a) Adevărat; b) fals; c) fals. **14.** a) 14; b) 194. **15.** a) 66; b) 4354. **16.** a) 1; b) 1; c) 1024; d) 6561.

§ 4. **3.** a) $(4x+y)^2$; b) $(3y-2x)^2$; c) $(5x+4)^2$; d) $(0{,}5a-2b)^2$. **4.** a) 1; b) $\sqrt{3}$; c) 2; d) $2\sqrt{6}$; e) $3\sqrt{2}$; f) $3\sqrt{2}$. **5.** a) $(3+2\sqrt{5})^2$; b) $(5-4\sqrt{3})^2$; c) $(9+2\sqrt{2})^2$; d) $(8-3\sqrt{3})^2$; e) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$; f) $(\sqrt{5}-\sqrt{12})^2$. **8.** a) $(\sqrt{3}+3\sqrt{3})^2$; b) $(\sqrt{7}+\sqrt{7})^2$; c) $(-2\sqrt{35}+\sqrt{35})^2$; d) $(3\sqrt{7}+\sqrt{7})^2$; e) $(2\sqrt{11}+\sqrt{11})^2$. **10.** a) $3\sqrt{2}-4\sqrt{2}a$; b) $2a$; c) $x-4y$; d) $2(x-\sqrt{5})^2$; e) $-4ax$. **11.** a) $(2a+y)(2a-y-1)$; b) $(3x-y)(3x-y+1)$; c) $(5b-4y)(5b+4y+1)$. **12.** a) 8; b) 62; c) $1\frac{13}{35}$. **13.** –4. **14.** 4. **16.** a) $a^2+b^2=a^2+b^2+2|a||b|-2|a||b|=(a+b)^2-2|a||b|=(a+b)^2-(\sqrt{2|ab|})^2=$ $=(a+b-\sqrt{2|ab|})(a+b+\sqrt{2|ab|})$.

Exerciții și probleme recapitulative. **1.** a) $1{,}5a+4{,}2b$; b) $-4x+y-2$; c) $-2{,}5x^2y^2+2x^2y+\frac{1}{4}yx^2$; d) $-ab+\frac{5}{4}a-0{,}5$. **2.** a) $2x^2y^3$. **3.** a) $7x^2y$. **4.** a) $64x^{18}y^{12}$. **5.** a) 12; b) 3; c) 20; d) –42. **6.** a) –49; b) $8-5\sqrt{2}$; c) $4\sqrt{15}+24\sqrt{3}-10\sqrt{5}-60$; d) 162. **7.** a) $y(x^2+3z)$. **8.** a) $\frac{9}{16}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{4}{81}$. **9.** a) $(2y+3x)^2=4y^2+12xy+9x^2$. **10.** a) $(15+11\sqrt{3})$ cm^2. **11.** a) $(51-14\sqrt{2})$ cm^2. **12.** a) 80. **13.** a) $-2a^2+4a-16$; b) $5x-14$; c) $4a$; d) $9+x^2$; e) 49. **14.** a) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}=\frac{3(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=$ $=\frac{2(2+\sqrt{3})}{4-3}=2(2+\sqrt{3})$. **15.** a) $(x-9y)^2$. **16.** a) $(2-\sqrt{3})$ cm; b) $(3\sqrt{5}-2)$ cm. **17.** a) 22; b) 2,5. **18.** a) $\sqrt{5}$; b) $2\sqrt{21}$; c) 0,8; d) $\sqrt{2}$. **19.** 11. **20.** 14. **21.** a) $S=\{-2; 6\}$; b) $S=\{-4; 1\}$; c) $S=\left\{-\frac{10}{3}; 4\right\}$; d) $S=\{-12; 2\}$. **22.** a) 22; b) –1; c) –1; d) 1. **23.** a) 1; b) 36. **24.** 304; 92288. **25.** 0,2. **28.** $2011=1006^2-1005^2$.

Capitolul 5. **§ 1.** **1.** a) 0; b) 14; c) –1; d) $-\frac{4}{9}$. **2.** a) 14; b) –25; c) –30,25; d) $2\frac{35}{36}$. **6.** a) 1; b) 1; c) $\frac{5}{6}$; d) 1,3. **7.** a) 5; b) $\frac{8}{3}$; c) –9; d) 0,8. **8.** a) $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; b) $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$; c) $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$; d) $\mathbb{R}\setminus\left\{13\frac{1}{3}\right\}$; e) $\mathbb{R}\setminus\{\pm3\}$; f) $\mathbb{R}\setminus\{\pm0{,}6\}$. **9.** a) 2,8; b) –3,2; c) $7\frac{7}{15}$; d) $\frac{8}{35}$. **10.** a) $F(0)<F(1)$; b) $F(-2)<F(-1)$; c) $F(0{,}5)>F(-0{,}5)$; d) $F(10)<F(-10)$. **11.** a) $F(-1), F(-2), F(-3), F(3), F(2), F(1)$; b) $F\left(\frac{1}{2}\right), F(-4), F(4), F\left(-\frac{1}{2}\right)$. **12.** a) –5; 1; 3; 9; b) –2; 2; 4; 8; c) –11; –5; –3; –1; 1; 7;

d) –14; –12; –11; –9; –8; –6. **13.** a) $-\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{5}$; c) –3; d) $-\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$.

§ 2. **6.** a) $\frac{x^2}{2y}$; b) $\frac{-x^2}{3y^2}$; c) $\frac{x^2}{2x+y}$; d) $\frac{3x+2y}{7y}$. **7.** a) $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}=\frac{0{,}3}{0{,}4}=\frac{8{,}4}{11{,}2}=\frac{-16{,}8}{-22{,}4}$; b) $\frac{5}{8}=\frac{11}{17{,}6}=\frac{8}{12{,}8}=\frac{-32}{-51{,}2}=\frac{-17{,}5}{-28}$. **8.** a) $\frac{x-1}{xy}=\frac{x^2-x}{x^2y}=\frac{xy-y}{xy^2}=\frac{0{,}5x^3-0{,}5x^2+x-1}{0{,}5x^3y+xy}$; b) $\frac{x+y}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}=\frac{-7x-7y}{7y-7x}=\frac{3y^2-3x^2}{-3(x-y)^2}$. **10.** a) $\frac{3}{x+2}$; b) $\frac{2(a-b)}{a+b}$; c) $\frac{-x-y}{x}$; d) $\frac{4(b-2x)}{b+2x}$. **11.** 80. **12.** 9.

§ 3. **1.** a) 1; b) $\frac{6}{7}$; c) $-\frac{2}{47}$; d) $-\frac{7}{39}$. **2.** a) $1\frac{3}{8}$; b) $-\frac{11}{30}$; c) $\frac{16}{45}$; d) $1\frac{17}{48}$; e) $-1\frac{17}{84}$. **3.** a) $\frac{13}{xy}$; b) $\frac{a+b}{a-b}$; c) $\frac{4x}{x^2+1}$; d) $-3y$. **4.** a) $\frac{a^2+b^2}{ab}$; b) $\frac{6+2y}{xy}$; c) $\frac{2ax}{x^2-a^2}$; d) $\frac{4-x^2}{2x(x+1)}$. **5.** a) $\frac{36}{85}$; b) $-\frac{63}{80}$; c) $-\frac{3}{11}$; d) $\frac{1}{6}$. **6.** a) $\frac{3x^2}{y^3}$; b) $\frac{10x^3y^2}{y^2-1}$; c) $\frac{4(x^2-1)}{(x-2)^2}$; d) $\frac{8}{7x}$. **7.** a) $\frac{11}{4}$; b) $-\frac{5}{4}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) $\frac{4}{7}$. **8.** a) $\frac{4y}{3x}$; b) $\frac{b+ay}{ax-b}$; c) $\frac{3x^2}{7x-5}$; d) $\frac{25-x^2}{4y}$. **9.** a) $\frac{ab}{y}$; b) $\frac{1-x}{x+2}$; c) –1; d) $\frac{8x}{y}$. **10.** a) $\frac{36}{49}$; b) $-\frac{27}{125}$; c) $\frac{256}{625}$; d) $\frac{3^8 5^6}{2^{10}}$. **11.** a) $\frac{x^3y^3}{27a^3}$; b) $\frac{x^2(x+y)^2}{(x-y)^2}$; c) $\frac{x^6a^3}{y^{15}b^9}$; d) $\frac{4(x-1)^2}{(3a+b)^2}$. **12.** a) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; b) $\frac{-x-2}{(x+1)^2}$; c) $\frac{-3x}{a(x+y)}$. **13.** a) $\frac{2x}{x+y}$; b) $\frac{2xy}{x+y}$. **14.** a) $\frac{5}{4\sqrt{2}+1}=\frac{20\sqrt{2}-5}{31}$; b) $\frac{17}{1-8\sqrt{5}}=\frac{17(1+8\sqrt{5})}{319}$.

Exerciții și probleme recapitulative. **2.** a) 5; b) 4,5; c) 5; d) $\frac{13}{5}$. **5.** a) $\frac{3}{x+3}$; b) $\frac{a-b}{a+b}$; c) $\frac{-a}{x+a}$; d) $-\frac{x+2}{x}$. **6.** a) $\frac{y+2x}{x^2y^2}$; b) $\frac{2x+16y}{x^2-4y^2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{-7x-23}{x^2-16}$. **7.** a) $\frac{(x+1)^2}{x-2}$; b) $xy+y^2$; c) $\frac{y}{10ab^2x^2}$; d) $\frac{axy}{z^2}$. **8.** a) $\frac{9x+3}{y}$; b) $-\frac{x}{3x+6}$; c) $-\frac{a^4b^6}{6(x-1)^3}$; d) $\frac{a+3}{2ax}$. **9.** a) $\frac{a-b}{x}$; b) $\frac{1-x}{y+z}$; c) $\frac{x-y}{z-t}$; d) $\frac{y-z}{x}$. **10.** a) $\frac{a^3(x+1)^6}{b^3(x-1)^3}$; b) $\frac{x^8(x-1)^4}{y^{12}(x+1)^8}$; c) $\frac{a^2b^4x^6}{(a-b^2)^4y^8}$; d) $\frac{25(a^2-x)^8}{9y^8x^4}$. **11.** a) $\frac{(ax-b)^2}{a^2}$; b) $\frac{(x-3y)^2}{y^2}$; c) $\frac{x^2-x+2}{x^2-1}$; d) $\frac{6a-3}{4a^2-9}$. **12.** a) $\frac{a-2}{a+b^2}$; b) $\frac{x+y^2}{x-2}$; c) $\frac{3x+y}{xy}$; d) $\frac{a-b}{4(a+b)}$. **13.** a) 3,6; b) 2,5; c) –3; d) –3. **14.** a) $\frac{4}{x+1}$; b) $-2x$.

Capitolul 6. § 1.

1. a) $20=x+8$; b) $x=\frac{1}{3}(x+2)$. **2.** **C.** **4.** a) 0; b) –1; 1. **5.** a) O soluție; b) nu are soluții. **6.** a) O soluție; b) nu are soluții. **7.** a) Orice număr din mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; b) 1. **8.** a) Fals; b) fals; c) fals; d) fals. **9.** a) $\mathbb{R}^*$; b) $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. **10.** a) O soluție; b) nu are soluții; c) un număr infinit de soluții. **11.** a) $\frac{7+x}{2}=7x$; b) $0{,}12x=25$. **12.** $5x-3=3x+1$. **13.** a) De exemplu, 7; b) de exemplu, $\sqrt{3}$. **16.** a) Da; b) nu; c) $S=\mathbb{R}_+$. **17.** a) $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$; b) $[0;+\infty)$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{R}^*$. **22.** **C.** **23.** a) Nu; b) nu; c) da; d) da.

§ 2. **2.** a) $S=\{3\}$; b) $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$; c) $S=\left\{\frac{2}{15}\right\}$; d) $S=\left\{\frac{1}{28}\right\}$; e) $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$; f) $S=\{50\}$; g) $S=\{-0{,}48\}$; h) $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **3.** a) –3; b) –2,56; c) $-\frac{1}{5}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **4.** a) $S=\{3\}$; b) $S=\{4\}$; c) $S=\{7{,}36\}$;

d) $S=\left\{-1\frac{3}{4}\right\}$; e) $S=\{5\}$; f) $S=\{-40\}$; g) $S=\left\{-1\frac{1}{17}\right\}$; h) $S=\{5\}$. **8.** a) $S=\{7\}$; b) $S=\{-46\}$. **9.** –3. **10.** $\frac{7}{11}$. **11.** a) 8; b) 9; c) –2; d) –5. **12.** a) 50; b) 40; c) 5; d) 3. **13.** a) $S=\{8\}$; b) $S=\left\{1\frac{1}{5}\right\}$; c) $S=\{2\}$; d) $S=\{6\}$. **14.** a) –1; b) $\frac{1}{2}$; c) 0; d) –10. **15.** a) $m\in\mathbb{R}^*$, $S=\left\{\frac{4}{m}\right\}$; b) $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $S=\left\{-\frac{2}{m+1}\right\}$; c) $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $S=\{0\}$. **16.** a) $S=\{\pm2\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\{-1; 5\}$; d) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; e) $S=\{-2{,}8; 3{,}2\}$; f) $S=\{-8{,}3; 16{,}3\}$; g) $S=\varnothing$; h) $S=\{-56; 44\}$.

§3. **1.** a) 6; b) 46. **3.** 6 kg; 12 kg. **4.** 30 de elevi. **5.** 10 min. **6.** 14 min. **7.** 10; 11; 12. **8.** 45. **9.** 24 *l*; 21 *l*; 16 *l*. **10.** 1,5 kg. **11.** La ora 13:00. **12.** 4 km/h. **13.** 76 de colțunaşi. **14.** 6 km. **15.** 2,4 km.

§4. **2.** c) $5\le 8{,}5$; d) $-6\ge-12$. **3.** a) A; b) F; c) A; d) F; e) F. **4.** a) Da; b) nu; c) da; d) da; e) nu; f) da. **8.** a) A; b) F; c) A; d) F; e) F; f) A. **9.** a) [2; 5); b) (0; 50]; c) [0; 5000]. **11.** a) [–2; 6); b) $(-\infty, 3)$; c) $[1; +\infty)$; d) [–1; 0]; e) $(-3; +\infty)$; f) $(-\infty; 0]$. **13.** a) $a>b$; b) $a<b$; c) $a<b$; d) $a>b$. **14.** Nu. **16.** a) –9; –1; b) –1; 2; c) 6; 9; d) 3; 17; e) 2; 7; f) –3; 5; g) –9; 0; h) –4; 3. **18.** a) (–10; 7); b) (–3; 78]; c) $(-\infty; +\infty)$; d) (–7,3; 3,5]; e) $(-\infty; +\infty)$; f) $(-\infty; 1]$. **19.** a) (–2, 2); b) (–1, 2); c) $\varnothing$; d) $(0, +\infty)$; e) $\varnothing$; f) {7}. **20.** a) $[0, +\infty)$; b) {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}; c) {0, 1, 2, 3, 4, 5}; d) $\mathbb{R}$. **23.** a) {2, 3, 4}; b) {–3, –2}; c) {4, 5}; d) {–3, –2}.

§5. **1.** a) $S=(6, +\infty)$; b) $S=(-\infty, -5]$; c) $S=(-\infty, 3)$; d) $S=[2, +\infty)$; e) $S=(-\infty; -0{,}5)$; f) $S=\varnothing$; g) $S=(-\infty; 36]$; h) $S=(-\infty; -3)$. **3.** a) $x\in\left(-\infty, -\frac{5}{8}\right)$; b) $x\in\left(1\frac{1}{4}, +\infty\right)$; c) $x\in\left[-\frac{5}{8}, +\infty\right)$; d) $x\in(-\infty, 2]$. **4.** a) –1; b) 0; c) 4; d) –4. **5.** a) 3; b) 8; c) –3; d) 30. **6.** a) $S=\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$, $\{\sqrt{2}, 101\}\subset S$; b) $S=[11; +\infty)$, $101\in S$; c) $S=\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$, $-21\in S$; d) $S=(-\infty; 1{,}5)$, $\{-21, -\frac{1}{5}, 0, \sqrt{2}\}\subset S$. **7.** $x\in(-\infty, -9]$. **8.** $y\in\left(-\infty, 1\frac{6}{7}\right]$. **9.** a) $S=\mathbb{R}$; b) $S=\left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$; c) $S=(-\infty, -11]$; d) $S=\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$. **10.** a) $S=\left(-\infty, -2\frac{2}{7}\right)$; b) adevărată. **11.** a) $S=\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; b) falsă. **13.** a) $S=(2, +\infty)$; b) $S=[-3, +\infty)$. **14.** a) $x\in(-\infty, 7)$; b) $x\in(-\infty, -6]$. **15.** $x\in[-5; 0)$. **16.** $x\in(0; 2]$. **17.** a) $a=7$; b) $a=5$; c) $a=-4$. **19.** a) $S=(1, 4]$; b) $S=(2, +\infty)$. **20.** a) $S=(-\infty, -3]\cup[3, +\infty)$; b) $S=[-5; 5]$; c) $S=(-3{,}5; 3{,}5)$; d) $S=(-\infty; -6)\cup(6; +\infty)$.

Exerciții și probleme recapitulative. **1.** 8. **2.** 4. **3.** a) $S=\{1\}$; b) $S=\{-1\}$; c) $S=\{-4{,}5\}$; d) $S=\{2\}$. **4.** 5 cm; 11 cm. **5.** a) $S=(-11, +\infty)$; b) $S=(-\infty, 4]$; c) $S=[0; +\infty)$; d) $S=\left(-\infty, 1\frac{2}{3}\right)$. **6.** a) $S=\{-2\}$; b) $S=\{1{,}75\}$; c) $S=\{15\}$; d) $S=\varnothing$. **7.** 400 lei. **9.** a) $S=\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$; b) $S=(-\infty, -1)$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$. **10.** {1, 2, 3, 4, 5}. **12.** a) $S=\{2\}$; b) $S=\{6\}$; c) $S=\{8\}$; d) $S=\left\{1\frac{1}{5}\right\}$. **13.** $S=\{-1\}$. **14.** a) $m=4$; b) $m=-2$. **15.** a) $a\in(-\infty, 0)$; b) $a\in(0, +\infty)$; c) $a=0$. **16.** 160 de nuci. **17.** $S=[-3, 1)$. **18.** a) $S=\{8\}$; b) $S=\{-1\}$.

Geometrie

Capitolul 1. **§1.** **3.** a) 1,8 cm; b) 4,6 cm; c) 14,6 cm; d) 8,2 cm. **4.** a) Da; b) da; c) da; d) nu. **6.** $[aB \cap [bB$ sau $[aB \cap [bA$. **7.** a) K; b) N; c) N; d) M. **9.** 3. **12.** a) Adevărat; b) fals; c) fals; d) fals; e) adevărat; f) fals. **13.** a) 4; b) 6; c) 6; d) 12. **14.** a) 46,6 cm; b) 83,4 cm; c) 48,2 cm. **15.** a) În 7 moduri: a, AB, AC, BC, BA, CA, CB; b) în 13 moduri. **17.** a) 6; b) 10; c) 17.

§2. **4.** a) 3; b) 6; c) 10; d) 45. **6.** a) Necoplanare sau concurente; b) nu; c) concurente sau necoplanare; d) nu. **7.** a) Posibil; b) posibil; c) imposibil; d) posibil. **9.** a) 6; b) 8; c) 8. **10.** Posibil. De exemplu, dreptele suport ale muchiilor unei piramide triunghiulare sunt necoplanare, însă fiecare două sunt concurente.

§3. **4.** a) Adevărat; b) adevărat; c) fals; d) adevărat. **5.** 28 cm. **6.** 12 cm. **7.** 4 cm, 8 cm sau 12 cm, 24 cm. **10.** De 3 ori.

§4. **1.** a) Aparține cercului; b) aparține exteriorului cercului; c) aparține exteriorului cercului; d) aparține interiorului cercului. **2.** a) 10π m; b) $4{,}5\pi$ m; c) 6 m; d) $2\sqrt{7}\pi$ m. **3.** a) 8π m; b) $1{,}(4)\pi$ m; c) 6 m; d) $4\sqrt{5}\pi$ m. **4.** a) 49π m^2; b) 12π m^2; c) $13(4)\pi$ m^2; d) $1{,}5625\pi$ m^2. **5.** a) 16π m^2; b) $11(1)\pi$ m^2; c) 2,25 m^2; d) 11π m^2. **6.** a) 3 m; b) 4,5 m; c) $\frac{1}{2\pi}$ m; d) $\frac{10}{\pi}$ m. **7.** a) 20 m; b) 10 m; c) $\frac{20}{\sqrt{\pi}}$ m; d) $\frac{40}{\sqrt{\pi}}$ m. **8.** a) 6 cm; b) 8π cm; c) $4\sqrt{3}$ cm; d) $\frac{4}{7}$ cm. **11.** a) 5π m; b) $2\sqrt{3}\pi$ m; c) 3π m. **12.** a) 8π m^2; b) 5π m^2; c) $0{,}75\pi$ m^2. **13.** a) 84π m^2; b) 200π m^2. **15.** b) 20 cm. **16.** $\frac{15}{\pi}$ m.

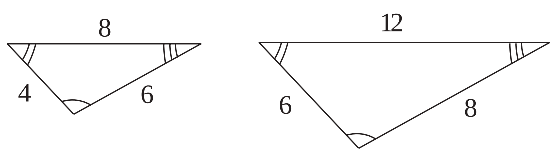
§5. **3.** a) 1; b) 0; c) 4 sau -4; d) pentru orice valoare întreagă.

Exerciții și probleme recapitulative. **4.** a) 23,1 cm; b) 12,4 cm. **6.** a) 5,4 m; b) 8 m. **7.** 3 cm. **8.** $MN = 48$ cm; $KP = 24$ cm. **9.** 4 cm, 6 cm, 7 cm. **10.** a) $11+7=18$; b) $3\cdot 11-4\cdot 7=5$; c) $6\cdot 11-8\cdot 7=10$. **11.** a) 3,5; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{1}{3}$. **12.** a) 6; b) 10; 15; c) 7; 8. **14.** a) $[BC]$; b) $[AD]$; c) $\varnothing$; d) $[BE$; e) $[BC]$; f) $[CD$. **15.** $\frac{5}{12}$ cm sau $7\frac{1}{12}$ cm. **16.** a) Adevăr; b) fals; c) fals; d) adevăr.

Capitolul 2. **§1.** **3.** a) 30°; b) 52°; c) 110°; d) 169°. **4.** a) $m(\angle ACB) = m(\angle DCE) = 50°$, $m(\angle ACE) = 130°$. **5.** a) 30°; b) 80°; c) 35°; d) 65°. **6.** a) 45°; b) 150°; c) 65°; d) 165°. **7.** a) 103°10′; b) 162°3′; c) 126°54′3″; d) 76°16′15″. **8.** a) 61°31′. **9.** a) 23°42′. **11.** a) 136° și 44°; b) 68° și 112°. **12.** 22° și 68°. **13.** 34° și 146°. **14.** 130° și 50°. **15.** a) Adevărat; b) fals; c) adevărat; d) adevărat. **16.** 20°, 20°, 160°, 160°. **17.** Coincid sau sunt perpendiculare. **18.** 5°.

§2. **4.** a) 110°; b) 48°; c) 50°; d) 60°. **5.** a) 29,1 cm; b) 34,6 cm; c) 27 cm; d) 24 cm. **6.** a) 88°; b) 25°. **7.** a) $m(\angle A) = 70°$, $m(\angle B) = 80°$, $m(\angle C) = 30°$. **8.** a) 51 cm; b) $15\sqrt{2}$ cm. **9.** a) Nu pot; b) nu pot; c) pot; d) pot. **10.** a) $\angle B$ – cel mai mare, $\angle A$ – cel mai mic. **11.** a) BC, AC, AB. **12.** 60 cm. **13.** 50,4 cm. **14.** 52,7 cm^2. **16.** a) Adevărat; b) adevărat; c) adevărat; d) fals. **17.** 17 cm, 18 cm, 19 cm. **18.** a) Fals; b) adevărat. **20.** 60°, 108°, 12°. **21.** Mai mult de 8 cm și mai puțin de 40 cm.

§3. **5.** a) $[AC] \equiv [DF]$; b) $\angle B \equiv \angle E$. **6.** $AO = BO = 8$ cm, $BC = 7$ cm. **10.** 8 cm. **11.** 40°. **14.** a) Nu; b) nu. **15.** $AC = 9$ cm, $BC = 10$ cm. **16.** Nu (vezi cazul din desen).



§ 4. **1.** $AD = 9$ cm, $DC = 6$ cm, $BD = 6$ cm. **2.** $BD = 6$ cm, $CD = 5$ cm. **4.** 12 cm. **6.** 35°. **9.** $AB = 7$ cm. **10.** $BE = 10$ cm.

Exerciții și probleme recapitulative. **1.** a) 72°; b) 62°; c) 99°; d) 44°. **2.** a) 90°; b) 90°; c) 45°; d) 45°. **3.** a) 90°; b) 148°. **4.** 75° și 75°. **5.** 20° și 70°. **6.** 55° și 125°. **7.** a) 114°41′; b) 72°46′; c) 66°50′23″; d) 48°13′37″. **8.** 8°47′6″. **9.** 18°. **11.** a) 80°; b) 36°; c) 90°; d) 90°. **20.** a) *Indicație*. $180° - 19° \cdot 9 = 9°$. **21.** a) 50°; b) 52°30′. **22.** *Indicație*. Utilizați inegalitatea dintre laturile unui triunghi.

Capitolul 3. **§ 1.** **4.** 7. **5.** 55°. **6.** 88°. **7.** a) 35; b) 20; c) 450; d) 15. **9.** $y = -\frac{2}{3}x + 2$ este ecuația dreptei AB. Fie $-\frac{2}{3}x + b$ ecuația dreptei MN, unde $MN \parallel AB$. Întrucât $C(6, 0) \in MN \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 = -\frac{2}{3} \cdot 6 + b \Rightarrow b = 4$. Prin urmare, $y = -\frac{2}{3}x + 4$ este ecuația dreptei MN. Astfel, de exemplu, pentru $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ obținem punctele $M(0, 4)$, $N(3, 2)$. **10.** 42°, 42°, 42°, 42°, 138°, 138°, 138°, 138°.

§ 2. **1.** a) 1,5 cm, 2 cm, 2,5 cm; b) $\frac{5}{16}$ cm, $\frac{3}{7}$ cm, $\frac{2}{5}$ cm; c) $\sqrt{3}$ cm, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ cm, $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ cm; d) 1,(2) cm, 1,8(3) cm, 0,9(4) cm. **2.** a) 23,(8) cm; b) $18\sqrt{3}$ cm; c) 14,(8) cm. **3.** 45°, 60°, 75°. **4.** $2\sqrt{7}$ cm. **6.** 12 cm, 14 cm, 14 cm. **7.** 10 cm, 10 cm, 12 cm. **8.** 5 cm, 5 cm, 6 cm, 6 cm. **9.** a) $AC = 9$ cm, $BC = 10$ cm; b) $AC = 10{,}8$ cm, $AB = 8{,}2$ cm; c) $AC = 6\sqrt{5}$ cm, $BC = 5\sqrt{5}$ cm; d) $AC = 10,(4)$ cm, $AB = 8,(8)$ cm. **10.** 22,(6) cm. **11.** 29,2 cm.

§ 3. **2.** a) $AM = 8$ cm. **3.** a) $M_1(\sqrt{3}, 0)$. **4.** a) 3; b) 2. **5.** a) 7 cm; b) 60°. **6.** a) 40°; b) 100°. **7.** a) 48°; b) 55°. **8.** 3. **11.** a) $C_1(3; 4)$; b) $B_1 = C$; c) $A_1 = C$. **12.** a) 35°; b) 6 cm.

§ 4. **3.** a) 35°; b) 40°; c) 40°26′; d) 8°30′. **5.** a) 48°; b) 55°; c) 50°; d) 20°. **8.** a) 150°; b) 30°. **10.** a) 40°; b) 80°. **14.** a) 120°; b) 15 cm.

Exerciții și probleme recapitulative. **2.** 90°. **3.** 65°. **4.** a) Paralele; b) paralele. **5.** 112°30′. **7.** 15 cm. **8.** 55°30′. **9.** 54°30′. **10.** 19°. **16.** $MK = LN = 3$ cm, $KL = 6$ cm. **20.** 49°.

Capitolul 4. **§ 1.** **1.** a) 59°; b) 40°; c) 45°. **2.** a) 58°; b) 45°; c) 112°. **3.** a) 95°; b) 100°; c) 60°. **4.** 120°. **5.** 90°, 135°, 135°. **6.** 90°, 110°, 160°. **7.** 360°. **8.** 30°, 70°, 80°. **9.** 45°, 50°, 85°. **10.** a) 35°, 55°; b) 45°, 95°; c) 60°, 50°. **11.** 44°. **12.** 40°, 60°, 80°. **13.** a) 35°; b) 24°. **14.** 45°, 60°, 75°.

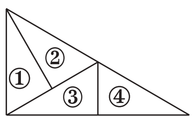
§ 2. **2.** a) Fals; b) fals; c) adevărat; d) fals. **5.** a) Dreptunghic; b) ascuțitunghic; c) obtuzunghic. **6.** 3 cm. **7.** a) $AO = 6$ cm, $BO = 8$ cm; b) $AM = 6\sqrt{3}$ cm, $BN = 9\sqrt{3}$ cm; c) $OM = 4$ cm, $ON = 5$ cm; d) $AO = 2\sqrt{5}$ cm, $BO = 2\sqrt{6}$ cm. **8.** a) 60°, 80°, 40°; b) $m(\angle BAM) = 37°$, $m(\angle BCM) = 18°$; c) $m(\angle AMC) = 140°$, $m(\angle BMC) = 113°$; d) $m(\angle A) = m(\angle B) = 80°$, $m(\angle C) = 20°$. **9.** a) $m(\angle BAM) = 20°$, $m(\angle MAC) = 40°$; b) $m(\angle BAM) = 30°$, $m(\angle MAC) = 20°$. **10.** a) 12°; b) $m(\angle ACN) = 40°$, $m(\angle BCN) = 25°$; c) 63°; d) 62°. **11.** a) 44°; b) 55°; c) 108°. **12.** a) $4\sqrt{7}$ cm; b) 24 cm. **14.** 50°.

§ 3. **2.** a) 6 cm; b) 5,5 cm; c) 10 cm; d) $\sqrt{5}$ cm. **3.** a) 50°; b) 62°; c) 50°; d) 56°. **5.** a) 92°; b) 70°; c) 70°; d) 44°. **6.** a) 6 cm; b) 4,5 cm; c) $2\sqrt{3}$ cm; d) 2,(1) cm. **7.** a) $m(\angle 1) = 58°$, $m(\angle 2) = m(\angle 5) = 30°30′$,

$m(\angle 3) = m(\angle 4) = 90°$, $m(\angle 6) = m(\angle 7) = 59°30'$, $m(\angle 8) = 61°$. **8.** 138°. **9.** $m(\angle 1) = 130°$, $m(\angle 2) = 40°$, $m(\angle 3) = 25°$. **10.** $m(\angle 1) = 111°$, $m(\angle 2) = 69°$, $m(\angle 3) = 76°30'$, $m(\angle 4) = 103°30'$. **11.** a) 4 cm, 12 cm, 12 cm; b) 7 cm, 17,5 cm, 17,5 cm. **12.** $2\sqrt{2}$ cm. **13.** $CM = DM = 9$ cm. **14.** 40°.

§ 4. **3.** a) 60°; b) 120°; c) 125°; d) 60°. **4.** $8\sqrt{3}$ cm. **5.** 15 cm^2. **6.** 8 cm. **7.** 6 cm. **8.** 4 cm. **9.** 7,5 cm. **10.** 21 cm. **11.** 2,8 cm. **12.** 120°, 60°. **13.** 8 cm^2. **14.** 36 cm^2. **15.** 8 cm^2.

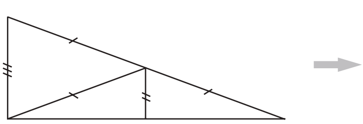
§ 5. **1.** a) 55°; b) 50°; c) 148°; d) 62°. **2.** a) 5 cm; b) 8 cm; c) $\sqrt{2}$ cm; d) 4 cm. **3.** a) 12 cm; b) $\sqrt{5}$ cm; c) 4,5 cm; d) 3. **4.** a) 32°; b) 40°; c) 50°; d) 84°. **5.** a) 8 cm; b) 12 cm; c) 11 cm; d) $2\sqrt{5}$ cm. **6.** a) 11 cm; b) 9 cm; c) 24 cm; d) 10 cm. **7.** a) $AB = 14,5$ cm, $PM = 9,5$ cm, $QN = 5$ cm; b) $BM = MN = 2\sqrt{2}$ cm, $NC = 4\sqrt{2}$ cm. **8.** a) $DF = 2\sqrt{5}$ cm, $EG = 4\sqrt{5}$ cm, $BC = \frac{11\sqrt{5}}{2}$ cm; b) $AD = 9,6$ cm, $DE = 2,4$ cm, $EB = 4$ cm. **9.** 3 cm. **10.** $16\sqrt{3}$ cm. **11.** a) 6 cm; b) 40 cm. **12.** $\frac{1}{2}$. **13.** 20 cm^2. **14.** a) 2,5 cm; b) 2,5 cm. **15.**



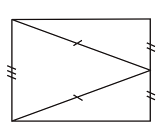
§ 6. **7.** $A_1(2; -3)$; $B_1(-1; -4)$; $C_1(-2; 7)$. **13.** a) 4; b) 1; c) 2; d) 3. **14.** a) $M(2; 2)$; b) $M(2; 2)$; c) $M(3; 8)$; d) $M(1,5; -5)$. **15.** a) $A_1(3; 3)$; b) $A_1(2; -4)$; c) $A_1(4; -3)$; d) $A_1(5; -1)$. **16.** a) $M(-3; 0)$; b) $M(0,5;\ 0,5)$; c) $M(-3;\ -8)$; d) $M\left(\frac{1}{3}; -1,5\right)$. **17.** a) $A_1(2; -7)$, $B_1(-3; -1,5)$, $C_1(2\sqrt{2}; 4)$; b) $A_1(-2; 7)$, $B_1(3; 1,5)$, $C_1(-2\sqrt{2}; -4)$. **18.** 55°. **20.** Isoscele. **21.** a) 12 cm; b) 15 cm. **22.** Paralele echidistante (situate la aceeași distanță una de alta). **23.** 12 cm.

Exerciții şi probleme recapitulative. **2.** a) 80°; b) 140°; c) 100°. **3.** a) 105°, 105°, 150°; b) 80°, 100°, 100°; c) 105°, 110°, 145°; d) 90°, 120°, 150°. **4.** a) Adevărat; b) fals; c) fals. **5.** a) $AG = 8$ cm, $BG = 6$ cm; b) $BG = 2,2$ cm, $CG = 2$ cm; c) $A_1G = 6$ cm, $B_1G = 5$ cm; d) $A_1G = 0,5$ cm, $C_1G = 0,8$ cm. **6.** a) 50°, 60°, 70°; b) $m(\angle BAO) = 35°$, $m(\angle COA) = 140°$; c) $m(\angle BOC) = 115°$, $m(\angle AOB) = 125°$; d) 360°. **7.** a) 60°, 60°; b) 45°, 45°; c) 40°, 40°. **8.** a) Isoscel; b) echilateral; c) isoscel; d) echilateral; e) dreptunghic. **9.** 16,5 cm. **15.** a) $\angle B, \angle A, \angle C$; b) $\angle B, \angle C, \angle A$. **20.** a) 60°, 120°, 180°; b) 240°, 72°, 48°. **21.** a) $AA_1 = 9$ cm; $BB_1 = 7,5$ cm; b) $BB_1 = 18$ cm, $CC_1 = 15$ cm; c) $A_1G = 2,1$ cm; $B_1G = 1,9$ cm; d) $AA_1 = 12,6$ cm, $CC_1 = 10,5$ cm. **22.** a) 20°, 50°, 110°; b) 50°, 60°, 70°. **23.** $6\sqrt{5}$ cm. **24.** 5,5 cm. **25.** 60°, 30 cm. **26.** 50°.

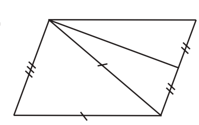
29.



a)



b)



30. Echilateral.

CUPRINS

Algebră

Geometrie